5 प्रायिकता एवं सांख्यिकी (Probability and Statistics)

INSIDE THIS CHAPTER

- **Probability:** Introduction, Addition and Multiplication theorem and simple problem.
- **Distribution:** Discrete and continuous distribution, Binomial distribution, Poisson distribution, Normal distribution.

प्रश्न 1. किसी पासे (Dice) को फेंकने पर 5 आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—किसी पासे (Dice) में छः पृष्ठ जिन पर क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 तथा 6 बिंदियाँ अंकित होती है। जब पासे को फेंका जाता है। तो उसको कोई भी पृष्ठ ऊपर आ सकता है। अतः 5 आने की अनुकूल स्थितियाँ = $1 = a$

5 आने की प्रतिकूल स्थितियाँ = $5 = b$ (ना आने की)

$\therefore$ 5 आने की प्रायिकता, $P(E) = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$

प्रश्न 2. एक पासे को फेंकने पर ऊपर विषम संख्या (Odd number) आने की प्रायिकता ज्ञान करो।

[UPBTE 2011]

उत्तर—विषम संख्या आने की अनुकूल स्थितियाँ $(1, 3, 5) = a = 3$, विषम संख्या ने आने की अनुकूल स्थितियाँ $(2, 4, 6) = b = 3$,

$\therefore$ विषम संख्यायें आने की प्रायिकता = $P(E) = \frac{a}{a+b} = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 3. किसी लीप वर्ष (Leap year) में 53 रविवार (Sunday) होने की प्राणिकता ज्ञात करो।

[UPBTE 2004, 07, 09]

उत्तर—किसी भी लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं। जिनमें 52 सप्ताह तथा 2 दिन शेष होते हैं। इन शेष दो दिनों में निम्न संचय बन सकते हैं जिसमें एक रविवार अवश्य हो क्योंकि 52 सप्ताह में 52 रविवार होंगे।

(शनिवार तथा रविवार), (रविवार तथा सोमवार),
(सोमवार तथा बृहस्पतिवार), (बृहस्पतिवार तथा शुक्रवार),
(शुक्रवार तथा शनिवार)

अतः रविवार होने की अनुकूल परिस्थिति = $S(E) = 2$

कुल परिस्थितियाँ = $S(P) = 7$

प्रयिकता $P(E) = \frac{S(E)}{S(P)} = \frac{2}{7}$

प्रश्न 4. एक थैले में 6 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं। एक काली गेंद यादृच्छया (Randomly) निकालने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर— थैले में कुल काली गेंदें = $S(E) = 3$

थैले में कुल गेंदें = $S(P) = 3 + 6 = 9$

$\therefore$ एक काली गेंद निकालने की प्रायिकता = $P(E) = \frac{S(E)}{S(P)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

प्रश्न 5. A तथा B दो व्यक्ति बारी-बारी सिक्का फेंकते हैं। जो पहले हेड (H) फेंकेगा वही जीतेगा A तथा B के अलग-अलग जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—माना किसी घटना के होने की प्रायिकता $P(E)$ तथा उस घटना के ना होने की प्रायिकता $P(E)$ हो तो

$$P(E) + P(E) = 1$$

अब माना A के जीतने की प्रायिकता $= a$

जब A फेल हो जायेगा तो B की अवसर मिलेगा तो

$$B \text{ के जीतेगा प्रायिकता} = \frac{a}{2}$$

$$a + \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ A जीतने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$

तो B के जीतने की प्रायिकता $= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

प्रश्न 6. यदि पाँच व्यक्तियों A, B, C, D तथा E में से तीन को किसी कमेटी में चुनना है तो

(a) A तथा B दोनों के कमेटी में चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।

(b) A के न चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—पाँच व्यक्तियों A, B, C, D तथा E में से तीन के संचय निम्नलिखित हो सकते हैं।

संचय = (ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE तथा CDE)

अत: $\therefore$ $S(P) = 10$

(a) माना A तथा B दोनों के कमेटी में चुने जाने की प्रायिकता $= P(E)$ A तथा B दोनों के चुने जाने के संचय $= 3$

$= S(E)$

$\therefore$ $P(E) = \frac{S(E)}{S(P)} = \frac{3}{10}$ $[(ABC \cdot ABD \cdot ABE)]$

(b) माना A के न चुने जाने की प्रायिकता $= P'(E)$

A के न चुने जाने के संचय $- S'(E) = 4[BCD, BCE, BDE,$ तथा $CDE)$

$\therefore$ $P' = \frac{S'(E)}{S(P)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

प्रश्न 7. 12 टिकटों पर 1 से 12 तक को अलग-अलग संख्यायें लिखी हैं। यदि इन टिकटों में यादृच्छया (Randomly) एक टिकट उठाया जाये तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात करो कि उस टिकट पर लिखी संख्या 2 या 3 के गुणक में होगी।

उत्तर—1 से 12 तक की संख्याओं में 2 या 3 के गुणक क्रमश: 2, 3, 4, 6, 8; 9, 10, 12 होते हैं। अत: कुल स्थितियाँ 2 या 3 के गुणक होंगे पर $= S(E) = 8$

कुल स्थितियाँ $= S(P) = 12$

$\therefore$ प्रायिकता, $P(E) = \frac{S(E)}{S(P)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

प्रश्न 8. किसी थैले में 8 सफेद तथा 6 लाल गेंदें हैं। एक ही रंग की दो गेंद निकलने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—(A) 8 सफेद गेंदों में से 2 सफेद गेंद निकलने के प्रकार

$$= {}^8C_2 = \frac{\lfloor 8}{\lfloor 6 \lfloor 2} = \frac{8 \times 7 \times 16}{\lfloor 6 \times \lfloor 2 \times 1} = 28$$

कुल 14 गेंदों में से 2 सफेद गेंद निकलने के प्रकार $= {}^{14}C_2$

$$= \frac{\lfloor 14}{\lfloor 12 \lfloor 2} = \frac{14 \times 13 \times \lfloor 12}{\lfloor 12 \times 2 \times 1} = 91$$

$\therefore$ 2 सफेद गेंद निकलने की प्रायिकता $= \frac{28}{91} = \frac{4}{13}$

(B) 6 लाल गेंदों में से 2 लाल गेंद निकलने के प्रकार $= {}^6C_2 = \frac{6}{\lfloor 4 - \lfloor 2} = \frac{6 \times 5 \times \lfloor 4}{\lfloor 4 \times 2 \times 1} = 15$

$\therefore$ कुल 14 गेंदों में से 2 लाल गेंदें निकालने की प्रायिकता $= \frac{15}{91}$

$\therefore$ 2 गेंदें एक ही रंग की (लाल या सफेद) निकलने की प्रायिकता $= \frac{4}{13} + \frac{15}{91} = \frac{28+15}{91} = \frac{43}{91}$

प्रश्न 9. ताश की गड्डी में से एक-एक करके चार ताश खींचें जाते हैं तथा खींचे गये पत्ते की गड्डी में नहीं रखा जाता है। खींचे गये पत्तों के बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर— ताश की गड्डी में पत्तों की संख्या = 52

ताश की गड्डी में बादशाहों की संख्या = 4

$\therefore$ एक बादशाह निकलने की प्रायिकता $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

क्योंकि खींचा गया ताश गड्डी में नहीं रखना है तो शेष पत्ते = 51 तथा शेष

बादशाह = 3 $\therefore$ दूसरी बार भी बादशाह निकलने की प्रायिकता $= \frac{3}{51}$

इसी प्रकार, तीसरी बार भी बादशाह निकलने की प्रायिकता $= \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$

तथा चौथी बार बादशाह निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{49}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{51} \times \frac{1}{25} \times \frac{1}{49} = \frac{1}{270725}$

प्रश्न 10. किसी खेल में चार टीमों के जीतने की प्रायिकतायें क्रमशः $\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ तथा $\frac{1}{10}$ है। चारों टीमों में से किसी एक टीम के जीतने की प्रायिकता तथा किसी भी टीम के ना जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर— पहली टीम के जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{7}$

दूसरी टीम के जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

तृतीय टीम के जीतने की प्राथिकता $= \frac{1}{9}$

तथा चौथी टीम के जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{10}$

किसी भी एक टीम के जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$

$$= \frac{360+315+280+252}{2520} = \frac{1207}{2520}$$

किसी भी टीम के ना ज़ीतने की प्रायिकता $= 1-\frac{1207}{2520} = \frac{2520-1207}{2520} = \frac{1313}{2520}$

प्रश्न 11. किसी थैले में 4 सफेद तथा 3 काली गेंदें हैं। यदि वे एक-एक करके निकाली जाये तो पहली गेंद के सफेद दूसरी काली, तीसरी सफेद, चौथी काली, पांचवीं सफेद, छटी काली तथा सातवीं सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर— पहली गेंद के सफेद निकलने की प्रायिकता $= \frac{4}{7}$

दूसरी गेंद के काली निकलने की प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अब थैले में 6 गेंदें शेष हैं जिनमें 3 काली गेंद हैं।

तीसरी गेंद के सफेद होने की प्रायिकता $= \frac{3}{5}$

अब थैले में 5 गेंद शेष है जिनमें 3 सफेद हैं।

इसी प्रकार चौथी गेंद काली निकलने की प्रायिकता $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

पाँचवीं गेंद सफेद निकलने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$

छठी गेंद काली निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

सातवीं गेंद सफेद निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{1} = 1$

$\therefore$ घटना के होने के प्रायिकता $= \frac{4}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{35}$

प्रश्न 12. पत्तों की ताश की गड्डी से तीन पत्ते निकाले जाते हैं। सभी पत्ते एक ही रंग के हो इसकी प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—ताश के पत्ते दो रंगों में हों हैं। लाल (पान तथा ईंट) तथा दूसरा काला (हुकुम तथा चिड़ी) दोनों में से एक रंग के पत्ते निकलने के प्रकार $= {}^2C_1 = 2$

क्योंकि दो रंगों में पत्ते होते हैं। अत: एक रंग के पत्ते 26 होते हैं।

$\therefore$ तीन पत्तों के निकलने की प्रायिकता $= {}^{26}C_3 = \dfrac{\lfloor 26}{\lfloor 23 \lfloor 3} = \dfrac{26\times25\times24\times\lfloor 23}{\lfloor 23\times\lfloor 3\times2\times1}$

$= 2600$

$\therefore$ घटनाओं की कुल संख्या $= n(E) = 2 \times 2600 = 5200$

$\therefore$ सभी पत्ते एक ही रंग के निकलने की प्रायिकता $= P(E) = \dfrac{n(E)}{h(S)}$

$\therefore$ $P(E) = \dfrac{5200}{{}^{52}C_3} = \dfrac{5200}{\dfrac{52}{\lfloor 49\times\lfloor 3}} = \dfrac{5200\times3\times2\times1}{52\times51\times50}$

$= \dfrac{4}{17}$

प्रश्न 13. A किसी निशाने की पाँच में से चार बार लगाता है। B चार में से तीन बार तथा C तीन में से दो बार निशाना लगाता है। यदि तीनों एक साथ निशाना लगाते हैं तो कम से कम दो व्यक्तियों द्वारा निशाना लगाये जाने की प्रायकिता ज्ञात करो।

उत्तर— 'A' के निशाना लगाये जाने की प्रायिकता $= \dfrac{4}{5}$

'B' के द्वारा निशाना लगाये जाने की प्रायिकता $= \dfrac{3}{4}$

'C' के द्वारा निशाना लगाये जाने की प्रायिकता $= \dfrac{2}{3}$

कम से कम दो व्यक्तियों द्वारा निशाने निम्न प्रकार लगाये जा सकते हैं।

A, B तथा C सभी का निशाना लग जाने की प्रायिकता $= \dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}$

B तथा C का निशाना लग जाने तथा A का निशाना ना लगने की प्रायिकता

$= \dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{10}$

A तथा C का निशाना लग जाने तथा B का निशाना न लगने की प्रायिकता

$= \dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{15}$

A तथा B का निशाना लग जाने तथा C का निशाना ना लगाने की प्रायिकता

$= \dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$

अत: कम से कम दो व्यक्तियों द्वारा निशाना लग जाने की प्रायिकता

$$= \frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{2}{15}+\frac{1}{5} = \frac{12+3+4+6}{30} = \frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

प्रश्न 14. एक थैले में 6 सफेद तथा 4 काली गेंदें हैं। इसमें से पाँच गेंदें निकाली जाती हैं। 3 सफेद तथा 2 काली गेंदें निकलने की प्रायिकता क्या होगी।

उत्तर— थैले में कुल गेंदों की संख्या = 6 + 4 = 10

अत: कुल 10 गेंदों में से 5 गेंदें लेने पर संचयों की संख्या = ${}^{10}C_5$

$$n(S) = \frac{\lfloor 10}{\lfloor 5 \lfloor 5} = \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}$$

$$n(S) = 252$$

6 सफेद गेंदों में से 3 सफेद तथा 4 काली गेंदों में से 2 काली गेंदें पर संचयों की संख्या

$$n(E) = {}^6C_3 \times {}^4C_2 = \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 3} \times \frac{4}{\lfloor 2 \lfloor 2}$$

$$= \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1} = 120$$

अत: थैले में से 3 सफेद तथा 2 काली गेंदें निकालने की प्रायिकता,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$P(E) = \frac{120}{252} = \frac{10}{21}$$

प्रश्न 15. किसी थैले में 8 सफेद, 6 काली, 4 हरी तथा 2 पीली गेंदें हैं। एक काली या एक हरी या एक पीली गेंद के निकलने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर— थैले में कुल गेंदों की संख्या = 8 + 6 + 4 + 2 = 20

काली गेंद निकलने की प्रायिकता = $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

हरी गेंद निकलने की प्रायिकता = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

तथा पीली गेंद निकलने की प्रायिकता = $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

∴ एक काली या हरी या पीली गेंद निकलने की प्रायिकता = $\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10} = \frac{3+2+1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

प्रश्न 16. यदि किसी ताश की गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप (Randomly) निकाला जाता है तो इस पत्ते के चिड़ी की बेगम (Queen of Clubs) या ईंट का बादशाह (King of Diamond) निकालने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर— चिड़ी की बेगम निकलने की प्रायिकता = $\frac{1}{52}$

या ईंट का बादशाह निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{52}$

$\therefore$ चिड़ी की बेगम या ईंट का बादशाह निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{52}+\frac{1}{52} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

प्रश्न 17. किसी लाटरी में A के तीन हिस्से हैं। जिसमें तीन इनाम तथा छः खाली है। इस प्रकार किसी अन्य लाटरी में B का एक हिस्सा है। जिसमें एक इनाम तथा दो खाली है। सिद्ध करो कि A के इनाम जीतने की प्रायिकता तथा B के इनाम जीतने की प्रायिकता से 16 : 7 का अनुपात है।

उत्तर— A के लाटरी के कुल हिस्सों की संख्या $= 3 + 6 = 9$

9 में से 3 हिस्से चुनने के प्रकारों की संख्या $= {}^{0}C_3 = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 6 \lfloor 3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

A के 6 खाली हिस्सों में से 3 हिस्से चुने जाने के प्रकार $= {}^{6}C_3 = \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

$\therefore$ A के किसी भी इनाम को न जीत सकने की प्रायिकता $= 1-\frac{5}{21} = \frac{16}{21}$

$\therefore$ A के कम से कम एक इनाम जीतने की प्रायिकता $= 1-\frac{5}{21} = \frac{16}{21}$

B के लाटरी के कुल हिस्सों की संख्या $= 1 + 2 = 3$

B के द्वारा हिस्सा चुने जाने के प्रकार $= {}^{2}C_1 = 2$

$\therefore$ B के किसी भी इनाम को न जीत पाने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$

अतः B के कम से कम 1 इनाम जीतने की प्रायिकता $= 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ $\frac{A \text{ के इनाम जीतने की प्रायिकता}}{B \text{ के इनाम जीतने की प्रायिकता}} = \frac{16/21}{1/3} = \frac{16\times3}{21} = \frac{16}{7}$

प्रश्न 18. यांत्रिकी के एक प्रश्न को तीन विद्यार्थियों A, B तथा C द्वारा हल करने की प्रायिकता कपस $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ है तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर— विद्यार्थी 'A' द्वारा प्रश्न हल न होने को प्रायिकता $= 1 - P_1$ $\left(\because P_1 = \frac{1}{2}\right)$

$= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

इसी प्रकार विद्यार्थी 'B' द्वारा प्रश्न हल न होने की प्रायिकता $= 1 - P_2$ $\left(\because P_2 = \frac{1}{3}\right)$

तथा विद्यार्थी 'C' द्वारा प्रश्न हल न होने की प्रायिकता $= 1 - P_3$ $\left(\because P_3 = \frac{1}{4}\right)$

$= 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

∴ A, B तथा C द्वारा प्रश्न हल न होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

अत: A, B तथा C द्वारा प्रश्न हल होने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

श्न 19. किसी ताश की गड्डी से चार आदमी एक-एक ताश खींचते हैं। इनमें चारों रंगों के ताश आने की ायिकता ज्ञात करो।

तर—किसी ताश की गड्डी में प्रत्येक रंग के 13-13 ताश होते हैं। अत: चार आदमियों द्वारा एक-एक ताश खींचने पर चारों ों ताश निकलने के कुल प्रकार

$$= {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 28561$$

ताश की गड्डी में से कुल 4 ताश निकलने के प्रकार

$$= {}^{52}C_4 = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2,70,725$$

∴ चारों रंग के ताश निकलने की प्रायिकता $= \frac{28,561}{2,70,725} = \frac{105}{100} = \frac{21}{20}$

श्न 20. किसी ताश की गड्डी में से 2 ताश निकाले जाते हैं। इसमें से एक के राजा तथा दूसरे के रानी होने ी प्रायिकता ज्ञात करो।

तर— किसी ताश की गड्डी में पत्तों की संख्या = 52

∴ 52 पत्तों में से 2 पत्ते निकालने के प्रकारों की संख्या $= {}^{52}C_2 = \frac{52 \times 51}{2} = 1326$

4 राजाओं में से एक राजा तथा 4 रानियों में से एक रानी निकालने के संचयों की संख्या

$$= {}^4C_1 \times {}^4C_1 = 4 \times 4 = 16$$

∴ एक राजा तथा एक रानी निकालने की प्रायिकता $= \frac{16}{1326} = \frac{8}{663}$

श्न 21. किसी कमेटी में 9 छात्र हैं जिसमें दो छात्र प्रथम वर्ष, तीन छात्र द्वितीय वर्ष तथा चार छात्र तृतीय वर्ष ं हैं। तीन छात्र चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात करो यदि—

(A) तीनों छात्र अलग-अलग कक्षाओं के हैं।

(B) तीनों छात्र एक ही कक्षा के हैं।

त्तर—(A) जब तीनों छात्र अलग-अलग कक्षाओं के हैं। प्रथम वर्ष के 2 छात्रों में से एक छात्र चुनने के प्रकार $= {}^2C_1 = 2$

द्वितीय वर्ष के 3 छात्रों में से एक छात्र चुनने के प्रकार $= {}^3C_1 = 3$

तथा तृतीय वर्ष के 4 छात्रों में से एक छात्र चुनने के प्रकार $= {}^4C_1 = 4$

कुल 9 छात्रों में से 3 छात्रों के चुनने के प्रकार $= {}^9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

∴ तीनों छात्रों के अलग-अलग कक्षाओं के होने की प्रायिकता $= \frac{2 \times 3 \times 4}{84} = \frac{2}{7}$

(B) जब तीनों छात्र एक ही कक्षा के हैं।

प्रथम वर्ष में केवल 2 ही छात्र है। अत: तीन छात्र लेना सम्भव नहीं है।

द्वितीय वर्ष के 3-छात्रों में से 3-छात्र चुनने के प्रकार = ${}^3C_1 = 1$

अत: द्वितीय वर्ष के 3-छात्रों में से 3-छात्र चुनने की प्रायिकता = $\frac{1}{84}$

तृतीय वर्ष के 4-छात्रों में से 3-छात्र चुनने के प्रकार = ${}^4C_3 = 4$

अत: तृतीय वर्ष के 4-छात्रों में से 3-छात्र चुनने की प्रायिकता = $\frac{4}{84} = \frac{1}{24}$

$\therefore$ तीनों छात्र एक ही कक्षा के होने की प्रायिकता = $\frac{1}{84}+\frac{1}{21} = \frac{1+4}{84} = \frac{5}{84}$

प्रश्न 22. किसी थैले में 5-सफेद, 7-लाल तथा 4-काली गेंदें हैं। थैले में से यादृच्छया (Randomly) 3 गेंदें निकालने पर तीनों गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—

थैले में कुल गेंदों की संख्या = 5 + 7 + 4 = 16

कुल गेंदों में से तीन गेंदों को निकालने के प्रकार = ${}^{16}C_3 = \frac{16\times15\times14}{3\times2\times1} = 560$

पाँच सफेद गेंदों में से एक ही बार में तीन गेंदों को निकालने के प्रकार

$= {}^5C_3 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$

अत: तीनों गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता = $P(E) = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$

प्रश्न 23. किसी सिक्के को 12 बार उछाला जाता है। तो निम्न की प्रायिकता ज्ञात करो—

(A) 4-चित (Head) आने की।

(B) अधिकतम 4-चित (Head) आने की। *[UPBTE 2011]*

उत्तर—सिक्के को उछालने पर चित (Head) या पट (Tail) आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होती है।

$P = \frac{1}{2}$ तथा $q = \frac{1}{2}$ $(P + q = 1)$

क्योंकि सिक्कों 12 चार उछाला जाता है। $\therefore n = 12$

द्विपद बटन द्वारा, $(q + p)^n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{12}$

(A) 4-चित (Head) आने की प्रायिकता = ${}^{12}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{12-4}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$= \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}\times\frac{1}{2^8}\times\frac{1}{2^4} = \frac{445}{4096}$

(B) अधिकतम 4-चित आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + {}^{12}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\left(\frac{1}{2}\right) + {}^{12}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$+ {}^{12}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}^{12}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{1}{2^{12}}\left[1+12+\frac{12\times11}{2\times1}+\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}+\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{12}}[1+12+66+220+495] = \frac{794}{4096} = \frac{397}{2048}$$

श्न 24. यदि 7-सिक्कों को 256 बार उछाला जाये तो निम्न की प्रायिकता ज्ञात करो।

(A) तीन सिक्कों पर चित (Head) आने की।

(B) सभी सिक्कों पर चित (Head) आने की।

तर—सिक्के को उछालने पर चित या पट आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होती है। $\therefore p = q = \frac{1}{2}$

n = सिक्कों की संख्या = 7, $N = 256$

(क्योंकि घटना 256 बार दोहरायी जाती है)

(A) तीन सिक्कों पर चित आने की प्रायिकता $= N\,{}^nC_r\,q^{n-r}p^r$

$$= 256\times{}^7C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 256\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{1}{16}\times\frac{1}{8}$$

= 70 बार

(B) सभी सिक्कों पर चित आने की प्रायिकता $= 256\times{}^7C_7\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 256\times1\times1\times\frac{1}{128}$

= 7 बार

श्न 25. यदि किसी मशीन द्वारा बनाये गये बोल्ट (Bolts) 10% त्रुटिपूर्ण 5-बोल्ट जो यादृच्छिया निकाले जाये ी प्रायिकता ज्ञात करो जबकि बोल्ट

(A) कोई त्रुटिपूर्ण न हो

(B) एक त्रुटिपूर्ण हो तथा

(C) अधिक से अधिक एक त्रुटिपूर्ण हो।

त्तर—दिया है, $P = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, $q = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ $n = 5$

अत: द्विपद बंटन $\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\right)^5$ द्वारा,

(A) किसी भी बोल्ट के त्रुटिपूर्ण न होने की प्रायिकता $= {}^5C_0\left(\frac{9}{10}\right)^5\left(\frac{1}{10}\right)^0 = \frac{59049}{100000}$

(B) एक बोल्ट के त्रुटिपूर्ण होने की प्रायिकता $= {}^5C_1\left(\frac{9}{10}\right)^{5-1}\left(\frac{1}{10}\right)^1$

$$= \frac{32805}{100000} = \frac{6561}{20000}$$

(C) अधिक से अधिक एक बोल्ट के त्रुटिपूर्ण होने की प्रायिकता $= \frac{59044}{100000} + \frac{6561}{20000} = \frac{91854}{100000} = \frac{45927}{50000}$

प्रश्न 26. 30 वर्षीय व्यक्ति के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता 0.65 है। 10 व्यक्ति जोकि अब 30 वर्ष के हैं इनमें से कम से कम 8 व्यक्तियों के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—दिया है, $P = 0.65 \therefore q = 1 - 0.65 = 0.35$ तथा $n = 10$

द्विपद बंटन द्वारा, $(q + p)^n = {}^nC_0q^n + {}^nC_1q^{n-1}P^1 + \ldots + {}^nC_n \cdot P^n$

$$(0.35 + 0.65)^{10} = (0.35)^{10} + {}^{10}C_1(0.35)^9 \cdot (0.65) + {}^{10}C_2\,(0.35)^8\,(0.65)^2 + \ldots + (0.65)^{10}$$

10 व्यक्तियों में जोकि 30 वर्षीय हैं। इनमें से कम से कम 8 के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता

$$= {}^{10}C_8(0.35)^2\,(0.65)^8 + {}^{10}C_9(0.35)\,(0.65)^9 + {}^{10}C_{10}\,(0.35)^0\,(0.65)^{10}$$

$$= \frac{10\times9}{2\times1}\times(0.35)^2(0.65)^8 + \frac{10}{0}(0.35)(0.65)^9 + (0.65)^{10}$$

$$= 4.5 \times (0.1225)\,(0.0318644) + 10 \times 0.35 \times (0.0207118) + 0.01346 = 6$$

$$= 0.17565 + 0.07249 + 0.01346 = 0.2616$$

प्रश्न 27. किसी द्विपद बंटन का माध्य 8 तथा विचलन 9 है। क्या ये तथ्य सही है।

उत्तर—दिया है,

$$\text{माध्य} = np = 8 \qquad \ldots(1)$$

तथा

$$\text{विचलन} = \sqrt{npq} = q - npq = 81 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर,

$$\frac{npq}{np} = \frac{81}{8}$$

$$\therefore \quad q = \frac{81}{8} > 1 \qquad (\text{परन्तु } p + q = 1)$$

लेकिन p या q का मान 1 से अधिक नहीं हो सकता अत: दिये गये तथ्य सही नहीं है।

प्रश्न 28. किसी द्विपद बंटन का माध्य 5 है तथा मानक विचलन 3 हो तो बताओ कि क्या यह कथन सत्य है।

उत्तर—दिया है,

$$\text{माध्य} = np = 5 \qquad \ldots(1)$$

$$\text{मानक विचलन} = \sqrt{npq} = 3 \Rightarrow npq = q \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) को (1) से भाग देरे पर,

$$\frac{npq}{np} = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \quad q\frac{9}{5} > 1$$

लेकिन p या q का मान 1 से अधिक नहीं सकता अत: दिया गया कथन सत्य है।

न 29. उस द्विपद बंटन को ज्ञात करो जिसका माध्य 9 तथा मानक विचलन $\frac{3}{2}$ है तथा अधिक से अधिक सफलता की प्रायिकता ज्ञात करो।

र—माना द्विपद बंटन $(q+p)^n$ है यहाँ सफलता होने की प्रायिकता 'p' है तथा असफल होने की प्रायिकता q और कुल सों की संख्या 'n' है।

दिया है, माध्य $= np = 9$

तथा मानक विचलन $= \sqrt{npq} = \frac{3}{2}$

$\because$ $np = q \Rightarrow \sqrt{9q} = \frac{3}{2} \Rightarrow q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$np = 9 \Rightarrow n \times \frac{3}{4} = 9$

$n = 12$

द्विपद बटन $(q+p)^n = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{12} = \left(\frac{1}{4}\right)^{12} + {}^{12}C_1\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{12}$

$= 4^{-12}[1 + 39 + 594 + \ldots + 531441]$

अधिक से अधिक एक सफलता की प्रायिकता

$= {}^{12}C_0 q^{12} p^0 + {}^{12}C_1 q^{11} p^1 = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{12} + 1 + 12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{4}\right)^1$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{12} [1 + 36] = 37 \times 4^{-12}$

न 30. यदि किसी इंजेक्शन द्वारा खराब प्रतिक्रिया (Reaction) की संभावना 0.001 हो तो 2000 व्यक्तियों से दो से अधिक को खराब प्रतिक्रिया होने की प्रायिकता ज्ञात करो, जबकि $e = 2.818$. ***[UPBTE 2011]***

तर—दिया है, $p = 0.001, n = 2000$

$\therefore$ $M = np = 2000 \times 0.001 = 2$

दो से अधिक व्यक्तियों को खराब प्रतिक्रिया होने की प्रायिर्कता

$= 1 - [p(0) + p(1) + p(2)]$

सूत्र द्वारा, $p(0) = \frac{M^r e^{-M}}{\lfloor r} \quad \therefore \quad p(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{\lfloor 0} = e^{-2}$

$p(1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1} = 2e^{-2}, \; p(2) = \frac{2^2 \times e^{-2}}{2} = 2e^{-2}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 1 - [e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2}] = 1 - 5e^{-2}$

$= 1 - 5 \cdot (2.818)^{-2} = 1 - 0.63 = 0.37$

प्रश्न 31. किसी फैक्ट्री में बनाये गये बल्बों में 1% बल्ब खराब निकलते हैं। 1000 बल्बों में से यादृच्छिक (Randomly) 4 बल्ब खराब होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—दिया है, $p = 1\% = \frac{1}{100}$ तथा $n = 1000$

$$M = np = 1000 \times \frac{1}{100} = 10$$

4-बल्ब खराब होने की प्रायिकता $= \frac{M^r e^{-m}}{\lfloor r} = \frac{(10)^4 C^{-10}}{\lfloor 4} = \frac{0.454}{4\times3\times2\times1} = 0.0189$

प्रश्न 32. किसी कम्पनी के स्विच बोर्ड पर 2 बजे से 4 बजे के बीच में फोन आने की संख्या 2.5 प्रति मिनट है। एक विशेष मिनट के बीच में

(A) फोन न आने की प्रायिकता तथा

(B) 3-फोन आने की प्रायिकता ज्ञात करो

दिया है, $e^{-2} = 0.13534$ तथा $e^{-0.5} = 0.6065$

उत्तर— प्रति मिनट फोन आने की संख्या = 2.5,

अत: माध्य $= M = 2.5$

प्रति मिनट (r) फोन आने की प्रायिकता $P(r) = \frac{M^r e^{-m}}{\lfloor r}$

(A) किसी एक विशेष मिनट में फोन न आने की प्रायिकता

$$P(0) = \frac{M^0 e^{-M}}{\lfloor 0}$$

$\therefore$ $$P(0) = \frac{2.5e^{0-2.5}}{1} = e^{-2} \times e^{-0.5}$$

$$= 0.13534 \times 0.6065 = 0.08208$$

(B) तीन फोन आनें की प्रायिकता, $P(3) = \frac{M^3 e^{-M}}{\lfloor 3}$

$$= \frac{(2.5)^3 \times e^{-2.5}}{\lfloor 3} = \frac{(2.5)^3 \times 0.08208}{6} = 0.2175$$

प्रश्न 33. ब्लेड बनाने वाली किसी कम्पनी में ब्लेड के त्रुटिपूर्ण होने की सम्भावना 0.002 है। प्रत्येक पैकेट में 10 ब्लेड है। 10,000 पैकेटों में ऐसे कितने पैकेट हैं जिनमें

(A) कोई दोष नहीं है

(B) एक दोषरहित ब्लेड पैकेटों की संख्या तथा

(C) दो दोषरहित ब्लेड पैकेटों की संख्या ज्ञात करो

दिया है, $e^{-0.02} = 0.9802$

उत्तर—दिया है, $p = 0.002$, $n = 10$ तथा $N = 10000$

$\therefore$ $$M = np = 10 \times 0.002 = 0.02$$

(A) दोषरहित ब्लेड पैकेटों की प्रायिकता $P(0) = \frac{M^0 e^{-m}}{\lfloor 0}$

$$P(0) = \frac{(0.02)^0 e^{-0.02}}{1} = 0.9802$$

10,000 पैकेटों में दोषरहित पैकेटों की संख्या $= N \cdot P(0)$

$$= 10{,}000 \times 0.9802 = 9802$$

(B) $\because$ एक दोषरहित ब्लेड पैकेटों की संख्या $= N \cdot P(1) = \frac{10{,}000 \times (0.02)^1 \cdot e^{-0.02}}{\lfloor 1}$

$$= 10{,}000 \times 0.2 \times 0.9802 = 196$$

(C) दो दोषरहित ब्लेड पैकेटों की संख्या $= N \cdot P(2) = \frac{10{,}000 \times (0.02)^2 e^{-0.02}}{\lfloor 2}$

$$= 1.96 = 2$$

प्रश्न 34. यदि किसी फैक्ट्री द्वारा बनाये गये बल्बों में 1% बल्ब खराब होते हैं। तो 400 बल्बों के नमूने में निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात करो।

(A) 3 बल्ब खराब होने की

(B) 3 तथा 5 के बीच बल्बों के खराब होने की।

उत्तर—दिया है, $P = 1\% = \frac{1}{100}$, $n = 400$

$\therefore$ $M = np = 400 \times \frac{1}{100} = 4$

$\therefore$ सूत्र द्वारा $P(r) = \frac{M^r e^{-m}}{\lfloor r}$

(A) 3 बल्ब खराब होने की प्रायिकता $P(3) = \frac{4^3 \times e^{-4}}{\lfloor 3} = \frac{64 \times 0.0183}{6} = 0.195$

(B) 3 तथा 5 के बीच बल्बों के खराब होने की प्रायिकता

$$= P(3) + P(4) + P(5)$$

$$= \frac{4^3 \times e^{-4}}{\lfloor 3} + \frac{4^4 \times e^{-4}}{\lfloor 4} + \frac{4^5 \times e^{-4}}{\lfloor 5}$$

$$= \frac{4^3 \times e^{-4}}{6}\left[1 + \frac{4}{4} + \frac{16}{20}\right]$$

$$= \frac{64 \times 0.0183}{6} \times \frac{56}{20} = 0.54656$$

प्रश्न 35. किसी फैक्ट्री में एक स्वचालित मशीन द्वारा किलप बनायी जाती है। 400 किलपों में से एक दोषपूर्ण मिलता है। यदि प्रत्येक पैकेट में 100 किलप हो तो निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात करो कि किसी भी पैकेट में

(A) कोई भी क्लिप दोषपूर्ण न हो

(B) एक या अधिक दोषपूर्ण हो

(C) दो से कम दोषपूर्ण हो।

उत्तर—दिया है, $P = \frac{1}{400} = 0.0025, n = 100$

$\therefore$ 100 किलपों के पैकेट में दोषपूर्ण किलपों की प्रायिकता

$$= M = np = 100 \times 0.0025 = 0.25$$

(A) कोई भी किलप दोषपूर्ण न होने की प्रायिकता

$$P(0) = \frac{M^0 e^{-M}}{\lfloor 0} = e^{-0.25} = 0.7787$$

(B) एक या अधिक किलपों के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता

$$= 1 - P(0) = 1 - 0.7787 = 0.2213$$

(C) दो से कम दोषपूर्ण होने की प्रायिकता $= P(0) + P(1)$

$$= \frac{M^0 e^{-0.25}}{\lfloor 0} + \frac{M^1 e^{-0.25}}{\lfloor 1} = e^{-0.25} + 0.25 \times e^{0.25}$$

$$= e^{-0.25} \times 1.25 = 0.9734$$

प्रश्न 36. सीता और गीता ने एक परीक्षा में क्रमशः 60 तथा 88 अंक ज्ञात किये। परीक्षा का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 80 तथा 8 हो तो उनके मानक अंक ज्ञात करो।

उत्तर—(A) सीता के लिये $M = 80, \sigma = 8$ तथा $x = 60$

सूत्र द्वारा, $z = \frac{x - M}{\sigma} \Rightarrow z = \frac{60 - 80}{8} = -\frac{20}{8} = -2.5$

(B) गोटा के लिये, $M = 80, \sigma = 8$ तथा $x = 88$

$\therefore$ सूत्र द्वारा $z = \frac{x - M}{\sigma} \Rightarrow z = \frac{88 - 80}{8} = \frac{8}{8} = 1$

प्रश्न 37. किसी परीक्षा में दो परीक्षार्थियों ने क्रमशः 70 तथा 45 अंक प्राप्त किये यदि उनके मानक अंक क्रमशः 1.5 तथा –2.5 हो तो माध्य तथा मानक विचलन के मान ज्ञात करो।

उत्तर—दिया है, $x = 70$ तथा $z = 1.5$

$\therefore$ $z = \frac{x - M}{\sigma}$ से, $x = z\sigma + M$

$\therefore$ $70 = 1.5\sigma + M$

$M = 1.5\sigma = 70$ ...(1)

$x = 45$ तथा $z = -2.5$

$45 = -2.5\sigma + M$

या $M - 2.5\sigma = 45$ ...(2)

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$1.50 + 250 = 70 - 45$$

$$4\sigma = 25 \Rightarrow \sigma = 6.25$$

$\therefore$ समीकरण (1) से,

$$M = 1.5 \times 6.25 = 70$$

$\Rightarrow$ $$M = 70 - (6.25 \times 1.5)$$

$\therefore$ $$M = 60.625$$

प्रश्न 38. किसी प्रसामान्य बंटन के माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 60 तथा 10 है। प्रसामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल (A) 30 तथा 45(B) 70 तथा 80 के बीच ज्ञात करो।

उत्तर—दिया है, $M = 60$ तथा $\sigma = 10$

(A) सूत्र $= \dfrac{x - M}{\sigma}$ से

$$z_1 = \frac{30 - 60}{10} = -\frac{30}{10} = -3$$

तथा $$z_2 = \frac{45 - 60}{10} = -\frac{15}{10} = -1.5$$

$\therefore$ प्रसामान्य के नीचे 30 तथा 45 के बीच का क्षेत्रफल $= z_2 - z_1$

$= 0.4987 - 0.4332 = 0.0655$ [तालिका से]

(B) इसी प्रकार, $z_1 = \dfrac{70 - 60}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$ तथा $z_2 = \dfrac{80 - 60}{10} = \dfrac{20}{10} = 2$

$\therefore$ प्रसामान्य वक्र के नीचे 70 तथा 80 के बीच का क्षेत्रफल $= z_2 - z_1$

$= 0.4772 - 0.3413$

$= 0.1359 = 0.136$ [तालिका से]

प्रश्न 39. यदि प्रसामान्य बंटन का माध्य 40 तथा मानक विचलन 4 हो तो प्रसामान्य बंटन की $35 < x < 45$ के लिये प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर—सूत्र $z = \dfrac{x - M}{\sigma}$ से, $z_1 = \dfrac{35 - 40}{4} = -\dfrac{5}{4} = -1.25$

तथा $$z_2 = \frac{45 - 40}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

अभीष्ट प्रायिकता = [$z = -1.25$ से $= 1.25$ के बीच का क्षेत्रफल]

$= 2 \times$ [$z = 0$ से $z = 1.25$ के बीच का क्षेत्रफल]

$= 2 \times 0.3944$ [तालिका से]

$= 0.7888$

प्रश्न 40. कोई मशीन 20% बोल्ट खराब बनाती है तो 400 बोल्टों के नमूनों में निम्न की प्रायिकता ज्ञात करो।

(A) अधिक से अधिक 60 बोल्ट खराब है तथा

(B) 90 से अधिक बोल्ट खराब है।

उत्तर—दिया है, $P = 20\% = 0.2$, $q = 1 - P = 1 - 0.2 = 0.8$, $n = 400$

$\therefore$ माध्य, $M = np = 400 \times 0.2 = 80$

तथा $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0.2 \times 0.8} = 8$

(A) अधिक से अधिक 60 बोल्ट खराब होने की प्रायिकता,

$$z = \frac{x - M}{\sigma} = \frac{60 - 80}{8} = -\frac{20}{8}$$

$\therefore$ $z = -2.5$

अभीष्ट प्रायिकता = ($z = -25$ के बायीं ओर का क्षेत्रफल)

= 0.5 – ($z = 0$ से $z = 2.50$ तक का क्षेत्रफल)

= 0.5 – 0.4938 = 0.0062

(B) 90 बोल्ट से अधिक खराब होने की प्रायिकता

$$z = \frac{x - M}{0} = \frac{90 - 80}{8} = \frac{10}{8} = 1.25$$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता = $z = 1.25$ के दायीं ओर का क्षेत्रफल

= 0.5 – ($z = 0$ से $z = 1.25$ तक का क्षेत्रफल)

= 0.5 – 0.3944 = 0.1056

प्रश्न 41. 300 विद्यार्थियों की ऊँचाइयों के प्रसामान्य बंटन में माध्य 160 सेमी० तथा मानक विचलन 6 सेमी० है। यदि $z = 1.5$ के संगत प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल 0.4332 हो तो कितने विद्यार्थी

(A) 151 सेमी० से कम है।

(B) 151 सेमी० तथा 169 सेमी० के बीच की ऊँचाई है।

उत्तर—दिया है, $M = 160$ सेमी०, $\sigma = 6$ सेमी०

(A) $x = 151$ सेमी०

$\therefore$ सूत्र $z = \frac{x - M}{\sigma}$, द्वारा, $z = \frac{151 - 160}{6} = -\frac{9}{6} = -1.5$

अत: 151 सेमी० से कम ऊँचाई वाले विद्यार्थियों की संख्या

= 300 × ($z = -15$ के बायीं ओर का क्षेत्रफल)

$= 300 \times [z = 0$ के बायीं ओर का क्षेत्रफल $- (z = 0$ से $z = -1.5$ के बीच का क्षेत्रफल]

$= 300 \times [0.5 - 0.4332]$

$= 300 \times 0.0668$

$= 20.04 = 20$ विद्यार्थी

[$\because z = 0$ के बायीं या दायीं ओर का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} = 0.5$ तथा तालिका से]

(B) $x_1 = 151$ पर, $z_1 = \frac{151-160}{6} = -\frac{9}{6} = -1.5$

तथा $x_2 = 169$ पर, $z_3 = \frac{169-160}{6} = 1.5$

$\therefore$ 151 तथा 169 सेमी० के बीच की ऊँचाई वाले विद्यार्थियों की संख्या

$= 300 \times [z = -15$ से $z = 1.5$ के बीच का क्षेत्रफल]

$= 300 \times 2 \times [z = 0$ से $z = 1.5$ के बीच का क्षेत्रफल तालिका से]

$= 300 \times 2 \times 0.4332$

$= 259.92 = 260$ विद्यार्थी

प्रश्न 42. यदि एक पांसा उछाला जाता है तो उस पर विषम अंक आने की प्रायिकता होगी—

(i) $\frac{1}{6}$ **(ii)** $\frac{1}{3}$ **(iii)** $\frac{1}{2}$ **(iv)** $\frac{2}{3}$

उत्तर—(iii) $\frac{1}{2}$

व्याख्या—जब एक पांसा उछाला जाता है, तो कुल संभव परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 होते हैं।

यह संकेत करता है, संभावित परिणामों की कुल संख्या $n = 6$

1 से 6 तक की विषम संख्याएँ 1, 3 और 5 हैं।

अनुकूल परिणामों की कुल संख्या = 3

हम वह जानते हैं,

$$\text{किसी घटना की प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित परिणामों की कुल संख्या}}$$

इसलिए,

एक सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

प्रश्न 43. 52 पत्तों की ताश की गड्डी से एक ताश का पत्ता निकाला जाता है। पत्ते के राजा या हुकुम का पत्ता होने की प्रायिकता है—

(i) $\frac{1}{26}$ **(ii)** $\frac{3}{26}$ **(iii)** $\frac{4}{13}$ **(iv)** $\frac{3}{13}$ *[UPBTE 2023]*

उत्तर— प्रायिकता (Probability) = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम (Favourable result)}}{\text{कुल परिणाम (Total result)}}$

अनुकूल परिणाम = 4 (राजा) + 12 (हुकुम के पत्ते) = 16

$$\text{प्रायिकता} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

उत्तर—(iii)

प्रश्न 44. द्विपद बंटन (Binomial distribution) का माध्य तथा प्रसारण ज्ञात कीजिये। *[UPBTE 2023]*

उत्तर—द्विपद बंटन का समान्तर माध्य (Arithmetic Mean of Binomial Distribution)—यदि किसी यादृच्छिक चर के मानों $x_1, x_2, ..., x_n$ की क्रमशः प्रायिकतायें $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ हो तो

$$\text{प्रायिकता बंटन का माध्य} = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i$$

द्विपद बंटन के लिये, $x_i = r$, तथा $P_i = P(r) = {}^nC_r\, q^{n-r} \cdot P^r$

$$\text{माध्य (Mean)} = \sum_{r=0}^{n} r\, {}^nC_r\, q^{n-r} P^r$$

$$= 0 \cdot q^n + 1 \cdot {}^nC_1, q^{n-1} \cdot P + 2 \cdot {}^nC_2, ..., q^{n-2} \cdot P^2 + ... + n \cdot {}^nC_n \cdot P^n$$

प्रश्न 45. निम्न कथन की विवेचना कीजिये। प्वायसन-बंटन (Poisson distribution) का माध्य 5 है तथा मानक विचलन 4 है। *[UPBTE 2023]*

उत्तर— माध्य (Mean) = $np = 5$

मानक विचलन (Standard deviation) = $\sqrt{npq} = 4$

$$npq = 16$$

$$5 \times q = 16$$

$$q = \frac{16}{5}$$

$$q = 3.2$$

$$q > 1$$

$\begin{cases} p = \text{सफल होने की प्रायिकता} \\ q = \text{असफल होने की प्रायिकता} \\ p + q = 1 \end{cases}$

लेकिन p या q का मान 1 से अधिक नहीं हो सकता, अतः दिये गये तथ्य सही नहीं हैं।

46. एक 50 वर्षीय व्यक्ति की एक वर्ष के भीतर मृत्यु होने की प्रायिकता 0.01125 है। बारह ऐसे व्यक्तियों में से कम से कम ग्यारह के 51वें जन्मदिन मनाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये। *[UPBTE 2023]*

हल—दिया है—$q = 0.01125$, $p = 1 - 0.01125 = 0.98875$, $n = 12$

द्विपद बंटन द्वारा,

$$(q + p) = {}^{q}C_0 q^n + {}^{n}C_1 q^{n-1} P^1 + \ldots + {}^{n}C_n \cdot p^n$$

$$(0.01125 + 0.98875)^{12} = (0.01125)^{12} + {}^{12}C_1(0.01125)^{11}(0.98875) + {}^{12}C_2(0.01125)^{10}(0.98875)^2 + \ldots + (0.98875)^{12}$$

12 व्यक्तियों में से जो 50 वर्ष के हैं। इनमें से कम से कम 11 के 51वां जनमदिन मनाने की प्रायिकता

$$= {}^{12}C_{11}(0.01125)^1(0.98875)^{11} + {}^{12}C_{12}(0.01125)^0(0.98875)^{12}$$

$$= 12 \times (0.01125) \times (0.98875)^{11} + 0.98875^{12}$$

$$= 0.11920247 + 0.87304767$$

$$= 0.99225$$

❑❑❑