3

अवकलन समीकरण

(Differential Equation

INSIDE THIS CHAPTER

- **Formation, Order, Degree, Types, Solution:** Formation of differential equations through physical, geomet mechanical and electrical considerations, Order, Degree of a differential equation, Linear, Nonlinear equati
- **First Order Equations:** Variable seperable, Equations reducible to seperable forms, Homogeneous equt equations reducible to homogeneous forms, Linear and Bernoulli form exact equation and their solutions.
- **Higher Order Linear Equation:** Property of solution, Linear differential equation with constant coefficient for X = e^{ax}, Sin ax, Cos ax, X^n, e^{ax} V, XV.
- **Simple Applications:** LCR circuit, Motion under gravity, Newton's law of cooling, Radioactive decay, Popula growth, Force vibration of a mass point attached to spring with and without damping effect. Equivalenc electrical and mechanical system.

प्रश्न 1. किसी अवकल समीकरण की कोटि एवं घात को परिभाषित कीजिये।

उत्तर—अवकल समीकरणों की कोटि (Order of a Differential Equation)—किसी अवकल समीकर उपस्थित महत्तम अवकलज (Highest derivative) को कोटि को उस अवकल समीकरण की कोटि कहते हैं।

उदाहरण—$xdy + ydx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ की कोटि = 1 है।

अवकल समीकरणों की घात (Degree of Differential Equations)—किसी अवकल समीकरण में उप महत्तम अवकलज (Highest derivatives) की घात को उस अवकल समीकरण की घात (Degree) कहते हैं। यह बात का ध्यान रखना है कि अवकल गुणांक भिन्नात्मक घातों (Fractional Powers) तथा करणी (Radical) चिन्ह स्वतन्त्र होना चाहिए।

प्रश्न 2. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को कोटि (Order) तथा घात (Degree) ज्ञात करो।

(A) $\frac{dy}{dx} = \sin x$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y$ (C) $\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right] - xy\left[\frac{dy}{dx}\right]^3 + y = 0$

(D) $\frac{d^2x}{dy^2} + \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2} = 0$

[UPBTE 20

(E) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (F) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^3} = 0$

[UPBTE 20

उत्तर—(A) $\frac{dy}{dx} = \sin x \Rightarrow$ महत्तम अवकलज $= \frac{dy}{dx}$ की घात $\Rightarrow$ कोटि = 1

महत्तम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ की घात = 1

(B) $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y \Rightarrow$ महत्तम अवकलज $= \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow$ कोटि = 2

$$\text{महत्तम अवकलज } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ की घात} \Rightarrow \text{ घात} = 1$$

(C) $\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]^2 - xy\left[\frac{dy}{dx}\right]^3 + y = 0 \Rightarrow$ महत्तम अवकलज $= \frac{d^3y}{dx^3} \Rightarrow$ कोटि $= 3$

$$\text{महत्तम अवकलज } \frac{d^3y}{dx^3} \text{ की घात} \Rightarrow \text{ घात} = 2$$

(D) $\frac{d^2x}{dy^2} + \sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2} = 0 \Rightarrow \left[\frac{d^2x}{dy^2}\right] = -\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}$

दोनों ओर का वर्ग करने पर,

$$\left[\frac{d^2x}{dy^2}\right]^2 = 1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2$$

$\therefore$ महत्तम अवकलज $\frac{d^2x}{dy^2}$ की घात $\Rightarrow$ कोटि $= 2$

महत्तम अवकलज $\frac{d^2x}{dy^2}$ की घात $\Rightarrow$ घात $= 2$

(E) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \Rightarrow$ महत्तम अवकलज $= \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow$ कोटि $= 2$

$$\text{महत्तम अवकलज } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ की घात} \Rightarrow \text{ घात} = 1$$

प्रश्न 3. उन वृत्तों का अवकल समीकरण ज्ञात करो जो मूल बिन्दु से जाते हैं जिनके केन्द y अक्ष पर स्थित है। **[*UPBTE 2005*]**

उत्तर—माना वृत्त का केन्द्र $(0, a)$ है। जोकि y-अक्ष पर स्थित है। अत: वृत्त की त्रिज्या 'a' होगी।

अत: वृत्त के समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ से

$$(x-0)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

प्रथम अवकलन करने पर,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2a\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ...(1)$$

प्रश्न 4. समीकरण $(1 + x^2)dy = (1 + y^2)dx$ को हल करो। **[*UPBTE 2004, 05*]**

उत्तर—दिया है, $(1 + x^2)dy = (1 + y^2)dx$

समीकरण को निम्न प्रकार करने पर,

$$\frac{dy}{(1+y^2)} = \frac{dx}{(1+x^2)}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)} = \int -\frac{dx}{(1+x^2)}$$

$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$ यहाँ 'c' समाकलन स्थिरांक है।

$\therefore$ $$\tan^{-1} y \cdot \tan^{-1} x = c \Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{y-x}{1+yx}\right] = c$$

या $$\frac{y-x}{1+yx} = \tan c = a \text{ (माना)}$$

$\therefore$ $$\boxed{(y-x) = a(1+yx)}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 5. समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 \cdot e^{-y}$ को हल करो। [UPBTE 200

उत्तर—दिया है, $$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y} = e^x \cdot e^{-y} + x^2 \cdot e^{-y} = e^{-y}\, e^{-y} \cdot (e^x + x^2)$$

या $$\frac{dy}{e^{-y}} = dx \cdot (e^x + x^2)$$

या $$e^y \cdot dy = (e^x + x^2)dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int e^y \cdot dy = \int (e^x + x^2)\,dx$$

$$\boxed{e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c}$$

यही अभीष्ट हल है

प्रश्न 6. समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ को हल करो।

उत्तर—दिया है, $$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy = (1+x) + y(1+x) = (1+x)(1+y)$$

या $$\frac{dy}{(1+y)} = dx(1+x)$$

समाकलन करने पर,

$$\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + \log c$$ (माना $\log c$ समाकलन नियतांक है।)

$$\log\left[\frac{1+y}{c}\right] = x + \frac{x^2}{2}$$

$$(1+y) = c \cdot e^{\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$\boxed{y = c \cdot e^{\left(x+\frac{x^2}{2}\right)} - 1}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7. अवकल समीकरण $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$ को हल कीजिए। [UPBTE 2022]

उत्तर—दिया है,

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$$

या

$$(y - ay^2) = (a+x)\frac{dy}{dx}$$

या

$$\frac{dy}{y(1-ay)} = \frac{dx}{(a+x)}$$

$$\left[\frac{1}{y} + \frac{a}{(1-ay)}\right]dx = \frac{dx}{(a+x)}$$

समाकलन करने पर,

$$\log y + \frac{a}{(-a)}\log(1-ay) = \log(a+x) + \log C$$

या

$$\log\left(\frac{y}{1-ay}\right) = \log[C \cdot (a+x)]$$

Antilog लेने पर,

$$\frac{y}{(1-ay)} = C \cdot (a+x)$$

या

$$\boxed{y = C(a+x)(1-ay)}$$

प्रश्न 8. किसी गोले का व्यापक समीकरण, इसके केन्द्र एवं त्रिज्या को लिखिए। [UPBTE 2022]

उत्तर—गोले की सामान्य समीकरण है—

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

जहाँ (a, b, c) गोले के केन्द्र को दर्शाता है।

r त्रिज्या को दर्शाता है। और x, y और z गोले की सतह पर बिंदुओं के निर्देशांक है।

प्रश्न 9. समीकरण $(x + y)(dx - dy) = dx + dy$ को हल करो।

उत्तर—दिया है, $(x + y)(dx - dy) = (dx + dy)$

या

$$d(x-y) = \frac{dx+dy}{x+y} = \frac{d(x+y)}{(x+y)}$$

अब माना $x - y = u$ तथा $x + y = v$

$$\therefore \quad du = \frac{dv}{v}$$

समाकलन करने पर,

$$u = \log v - \log C$$

(यहाँ $\log C$ = समाकलन नियतांक)

$$u = \log\frac{v}{C}$$

या

$$v = C \cdot e^u$$

$$\boxed{x + y = C \cdot e^{x-y}}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 10. समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\log\frac{y}{x}+1\right]$ को हल करो।

उत्तर—माना $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ दिये समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\log\frac{y}{x}+1\right]$ से

$$v + x\frac{dy}{dx} = v(\log v + 1) = v\log v + v$$

$\therefore$ $$\frac{dv}{v\log v} = \frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर $$\int\frac{dv}{v\log v} = \int\frac{dx}{x}$$

$\therefore$ $$\log(\log v) = \log x + \log C$$

$\therefore$ $$\log(\log v) = \log(x\cdot C)$$

$\therefore$ $$\log v = x^c$$

$$\boxed{v = e^{x\cdot c}}$$

(log v = 1 मा

प्रश्न 11. समीकरण $x(y-x)dy = y(y+x)dx$ को हल करो।

उत्तर—दिया है, $$x(y-x)dy = y(y+x)dx$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y+x)}{x(y-x)}$$

माना $y = vx \Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$\therefore$ $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx(vx+x)}{x(vx-x)} = \frac{v(v+1)}{(v-1)}$$

या $$x\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v}{v-1} - v = \frac{v^2+v-v^2+v}{v-1} = \frac{2v}{v-1}$$

या $$\left[\frac{v-1}{2y}\right]dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2v}\right] = \frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर, $$\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2y}\right)dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\log v = \log x + C$$

या $$\frac{y}{2x} - \frac{1}{2}\cdot\log\frac{y}{x} = \log x + C$$

या $$\frac{y}{x} - \log y + \log x = 2\log x + 2C$$

या $$\boxed{\frac{y}{x} = \log xy + c_1}$$ यहाँ $c_1 = 2c$

यही अभीष्ट हल

$\left[v=\right.$

प्रश्न 12. समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$ को हल करो। [UPBTE 2009]

उत्तर—दिया गया समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$ समघातीय नहीं है। अतः $x = X + h$ तथा $y = Y + k$ रखने पर,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = \frac{(x+h)+2(y+k)-3}{2(x+h)+(y+k)-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+(h+2k-3)}{2x+y+(2h+k-3)} \quad \text{...(1)}$$

यदि $h + 2k - 3 = 0$ तथा $2h + k - 3 = 0$

$\therefore \quad (h = 3 - 2k)$ द्वारा $2(3 - 2k) + k - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad 6 - 4k + k - 3 = 0 \quad \boxed{k = 1}$

$\therefore \quad h = 3 - 2 \times 1 \boxed{h = 1}$

समीकरण (1) से

$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2Y}{2X+Y}$, X तथा Y से समघातीय समीकरण है।

माना $\quad Y = VX \Rightarrow \frac{dV}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}$

$$\therefore \quad V + X\frac{dV}{dX} = \frac{X+2VX}{2X+VX} = \frac{1+2V}{2+V}$$

या $$X\cdot\frac{dV}{dX} = \frac{1+2V}{2+V} - V = \frac{1+2V-V^2-2V}{2+V} = \frac{1-V^2}{2+V}$$

या $$\left[\frac{2+V}{(1-V)(1+V)}\right]dV = \frac{dX}{X}$$

आंशिक भिन्नों में परिवर्तित करके समाकलन करने पर,

$$\int\left[\frac{1}{2(1+V)}+\frac{3}{2(1-V)}\right]dV = \int\frac{dX}{X}$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+V) - \frac{3}{2}\log(1-V) = \log X + \log C$$

$$\log\left[\frac{1+V}{(1-V)^3}\right] = \log X^2 \cdot C^2$$

$$\frac{(X+Y)\cdot X^2}{(X-Y)^3} = X^2 \cdot c^2 \Rightarrow (X + Y) = (X - Y)^3 \cdot c^2 \quad [Y = V \cdot X \text{ से}]$$

या $(x - 1 + y - 1) = (x - 1 - y + 1)^3 \cdot c^2$ [$X = x - 1$ तथा $Y = y - 1$ रखने पर]

या $\boxed{(x + y - z) = (x - y)^3 \cdot c^2}$ यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 13. समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+3}{2x+3y+4}$ को हल करो।

उत्तर—दिया गया समीकरण समघातीय नहीं है। अत:

$x = X + h$ तथा $y = Y + k$ रखने पर $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = \frac{(X+h)+2(Y+k)+3}{2(X+h)+3(Y+k)+4} = \frac{X+2Y+(h+2k+3)}{2X+3Y+(2h+3k+4)}$$

समघातीय समीकरण बनाने के लिये

$$h + 2k + 3 = 0 \quad \text{तथा} \quad 2h + 3k + 4 = 0$$

$$h = -3 - 2k \text{ द्वारा } 2(-3 - 2k) + 3k + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -6 - 4k + 3k + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2} \text{ तथा } \boxed{h = 1}$$

समीकरण (1) से

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2Y}{2X+Y} \text{ जो समघातीय है।}$$

$$\therefore \quad Y = VX \Rightarrow \frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}$$

$$\therefore \quad V = X\frac{dV}{dX} = \frac{X+2VX}{2X+3VX} = \frac{1+2V}{2+3V}$$

या
$$X\frac{dV}{dX} = \frac{1+2V}{2+3V} - V = \frac{1+2V-2V-3V^2}{2+3V} = \frac{1-3V^2}{2+3V}$$

या
$$\left[\frac{2+3V}{1-3V^2}\right]dV = \frac{dX}{X} \Rightarrow \left[\frac{2}{(3V^2-1)} + \frac{3V}{(3V^2+1)}\right]dV = -\frac{dX}{X}$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{2dV}{3\left[V^2 - \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2\right]} + \frac{1}{2}\int \frac{6V}{(3V^2-1)}dV = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}\log\left[\frac{V-\frac{1}{\sqrt{3}}}{V+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right] + \frac{1}{2}\log(3V^2-1) = -\log X + \log C$$

या
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\log\cdot\left[\frac{\sqrt{3}V-1}{\sqrt{3}V+1}\right] + \frac{1}{2}\log(3V^2-1) = \log\left[\frac{C}{X}\right]$$

$$Y = VX$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left[\frac{\sqrt{3}Y - X}{\sqrt{3}Y + X}\right] + \frac{1}{2}\log\left[\frac{3Y^2 - X^2}{X^2}\right] = \log\left[\frac{C}{X}\right]$$

$\Rightarrow$ अब $X = x - h = x - 1$ तथा $Y = y - k = y + 2$ रखने पर,

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(\frac{\sqrt{3}(y+2)-(x-1)}{\sqrt{3}(y+2)+(x-1)}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{3(y+2)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}\right) = \log\left(\frac{C}{x-1}\right)$$

या
$$\log\left[\left(\frac{\sqrt{3}y+2\sqrt{3}-x+1}{\sqrt{3}y+2\sqrt{3}+x-1}\right)^{1/3} \times \left(\frac{3y^2+12+12y-x^2-1+2x}{(x-1)^2}\right)^{1/2}\right] = \log\frac{C}{x-1}$$

$$\therefore \quad (\sqrt{3}y - x + 2\sqrt{3}+1)^{1/3}\cdot(3y^2 - x^2 + 12y + 2x + 11)^{1/2} = C\cdot(\sqrt{3}y + x + 2\sqrt{3} - 1)$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 14. समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sin x - 2y \tan x$ को हल करो। **[*UPBTE 2010*]**

उत्तर—दिया है,
$$\frac{dy}{dx} + 2y\cdot\tan x = \sin x$$

जहाँ $P = 2\tan x$ तथा $Q = \sin x$

$$\therefore \quad \text{समाकल गुणनखण्ड (I.F)} = e^{\int P\cdot dx} = e^{2\tan x dx} = e^{2\log\cdot\sec x}$$
$$= e^{\log e \sec^2 x} = \sec^2 x$$

$\therefore$ अभीष्ट हल,

$$y\cdot \text{I·F} = \int Q\cdot\text{I}\cdot\text{F}\cdot dx + C$$
$$y\cdot\sec^2 x = \int \sin x\cdot\sec^2 x\cdot dx + C$$
$$y\cdot\sec^2 x = \int \sec x\cdot\tan x\cdot dx + C$$
$$y\cdot\sec^2 x = \sec x + C$$

या
$$y = \cos x + C\cos^2 x$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 15. समीकरण $(x + 2\sin y + 3)dx + (2x - 4\sin y - 3)\cos y dy = 0$ को हल करो।

उत्तर—दिया है,
$$(x + 2\sin y + 3)dx + (2x - 4\sin y - 3)\cos y dy = 0 \quad \text{...(1)}$$
$$M\cdot dx + N dy = 0 \quad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) व (2) की तुलना करने पर,

$$\therefore \quad M = x + 2\sin y + 3 \quad \text{तथा} \quad N = (2x - 4\sin y - 3)\cos y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 + 2\cos y + 0 = 2\cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = (2-0-0)\cos y = 2\cos y$$

$\because$ $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ अत: समीकरण, यथार्थ समीकरण

$\therefore$ अभीष्ट हल, $M \cdot dx + \int (N$ में केवल वे पद जिनके x नहीं) $dy = C$

$$\int (x + 2\sin y + 3)dx + \int (-4\sin y - 3)\cos y\, dy = C$$

या $$\int \left(\frac{x^2}{2} + 2x\sin y + 3x\right) + \cos 2y - 3\sin y = C$$

या $$\boxed{x^2 + 6x + (4x-6)\sin y + 2\cos 2y = 2C}$$ यही अभीष्ट हल है

प्रश्न 16. अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0$ को हल करो। *[UPBTE 200*

उत्तर—दिये गये समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$(D^3 - 2D^2 - 4D + 8)y = 0$$

इसकी सहायक समीकरण (Auxilliary Equation) है।

$$m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = 0$$

$$m^2(m+2) - 4m(m+2) + 4(m+2) = 0$$

$\therefore$ $$(m+2)(m^2 - 4m + 4) = 0$$

या $$(m+2)(m-2)^2 = 0$$

$\therefore$ $$m = 2, 2, -2$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I. [$\because Q$ = P.I. = 0

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3 \cdot e^{-2x}$$

प्रश्न 17. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ को हल करो।

उत्तर—समीकरण को इस प्रकार लिखने पर,

$$(D^2 + 4D + 4) - y = 0$$

इसकी सहायक समीकरण

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$(m+2)^2 = 0$$

$\therefore$ $$m = 2, -2$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल, $$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$$ [$\because Q = 0$, P.I. = 0]

प्रश्न 18. अवकल समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4} + a^4y = 0.$

उत्तर—दिये गये समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$(D^4 + a^4)y = 0$$

इसकी सहायक समीकरण, $$m^4 + a^4 = 0$$

या $(m^2)^2 + (a^2)^2 + 2m^2a^2 - 2m^2a^2 = 0$

या $(m^2 + a^2)^2 - (\sqrt{2}ma)^2 = 0$

या $(m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma)(m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma) = 0$ $[a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

$\therefore$ $m^2 + a^2 + \sqrt{2}ma = 0$ तथा $m^2 + a^2 - \sqrt{2}ma = 0$

$$m = -\frac{\sqrt{2}a \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2\times 1} \text{ तथा } m = \frac{\sqrt{2}a \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2\times 1}$$

$\therefore$ $m = -\frac{a}{\sqrt{2}} \pm i\frac{a}{\sqrt{2}}$ तथा $m = \frac{a}{\sqrt{2}} \pm i\frac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $y = e^{-ax/\sqrt{2}}\left[C_1 \cos\frac{a}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\right] + e^{ax/\sqrt{2}}\left[e^3 \cos\frac{ax}{\sqrt{2}} + C_4 \sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\right]$

श्न 19. अवकल समीकरण $(D^3 + 1)y = (e^x + 1)^2$ का विशेष अवकल (P.I.) ज्ञात कीजिए। *[UPBTE 2022]*

उत्तर—दिये गये समीकरण को इस प्रकार लिखने पर,

$$(D^3 - 1)y = e^{2x} + 2e^x + 1$$

A.E. is $m^3 - 1 = 0$

i.e., $(m - 1)(m^2 + m + 1) = 0$

अत: $m = 1,$

$$D = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $= C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

विशेष समाकलन (P.I.) $= \frac{1}{(D^3 - 1)}(e^{2x} + 2e^x + 1)$

$$= \frac{1}{(D^3 - 1)}e^{2x} + \frac{1}{(D^3 - 1)}2e^x + \frac{1}{(D^1 - 1)}e^0$$

$$= \text{P.I.}_1 + \text{P.I.}_2 + \text{P.I.}_3$$

$$\text{P.I.}_1 = \frac{e^{2x}}{D^3 - 1} (D \to 2)$$

$$\text{P.I.}_1 = \frac{e^{2x}}{2^3 - 1} = \frac{e^{2x}}{7}$$

$$\text{P.I.}_2 = \frac{1}{(D^3 - 1)} \cdot 2e^x \quad (D \to 1)$$

$$= \frac{1}{1^3 - 1}2e^x \quad (D_r = 0)$$

Differentiate the D_r and multiply x

$$= \frac{2}{3}\frac{xe^x}{D^2} \quad (D \to 1)$$

$$\text{P.I.}_2 = x \cdot \frac{2e^x}{3}$$

$$\text{P.I.}_3 = \frac{1}{D^3-1}e^0 \qquad (D \to 1)$$

$$\text{P.I.}_3 = -1$$

$$\text{P.I.} = \frac{e^{2x}}{7} + \frac{2xe^x}{3} - 1$$

∴ सम्पूर्ण हल $y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$

$$y = C_1 \cdot e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + \frac{e^{2x}}{7} + \frac{2}{3}xe^x - 1$$

प्रश्न 20. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x}$ का हल ज्ञात करो। *[UPBTE 201*

उत्तर—दिये गये समीकरण को इस प्रकार लिखने पर,

$$(D^2 - 3D + 2)y = e^{5x}$$

सहायक समीकरण $m^2 - 3m + 2 = 0$

या $(m-1)(m-2) = 0$ या $m = 1, 2$

∴ पूरक फलन $(\text{C.F.}) = C_1e^x + C_2e^2x$

विशेष समाकल $(\text{P.I.}) = \frac{Q}{f(D)} = \frac{1}{(D^2-3D+2)}e^{5x}$ $\left[\text{P.I.} = \frac{Q}{f(0)} \text{ से}\right]$

विधि द्वारा $D = a = 5$ रखने पर,

$$f(5) \neq 0$$

∴ $$\text{P.I.} = \frac{e^{5x}}{(5)^2 - 3\times5+2} = \frac{e^{5x}}{25-15+12} = \frac{e^{5x}}{12}$$

अतः सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I.

∴ $$\boxed{y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{e^{5x}}{12}}$$

प्रश्न 21. अवकल समीकरण $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = e^{-x}$ को हल करो।

उत्तर—दिये गये समीकरण की सहायक समीकरण $m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$.

∴ $(m+1)^3 = 0$ $[(a+b)^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3]$

$$m = -1, -1, 1$$

∴ पूरक फलन $(\text{C.F.}) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x}$

∴ विशेष समाकल $(\text{P.I.}) = \frac{Q}{f(D)} = \frac{1}{(D+1)^3}e^{-x}$

विधि द्वारा $D = a = -1$ रखने पर $f(-1) = 0$ $\therefore$ $D = (D-1)$ रखने पर,

$\therefore$
$$\text{P.I.} = \frac{1}{(D-1+1)^3}e^{-x} = e^{-x} \times \frac{1}{D^3}1$$

$$= e^{-x} \times \iiint 1 \cdot dx = e^{-x} \cdot \frac{x^3}{\lfloor 3}$$

$\therefore$ अतः सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I.

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-x} + \frac{e^{-x}x^3}{\lfloor 3}}$$

22. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \cos^2 y$ को हल करो।

—दिये गये समीकरण को इस प्रकार लिखने पर $(D^2 - 4)y = \cos^2 x$

सहायक समीकरण $m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$

पूरक फलन (C.F.) $= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

तथा विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{1}{(D^2-4)}\cos^2 x = \frac{1}{(D^2-4)} \times \left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]$

[$\because \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$]

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(D^2-4)}e^{0x} + \frac{1}{2(D^2-4)}\cos 2x$$

$\therefore$ $$\text{P.I.} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(0^2-4)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(-2^2-4)}\cos 2x \quad \left[\begin{array}{l}\text{प्रथम फलन से } D = a = 0 \\ \text{तथा द्वितीय } D^2 = -a^2 = -2^2\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[-\frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{-8}\right]\cos 2x = -\left(\frac{2+\cos 2x}{16}\right)$$

23. अवकल समीकरण $(D^3 + D^2 - D - 1)y = \sin(2x + 5)$ को हल करो।

—दिये गये समीकरण की सहायक समीकरण $m^3 + m^2 - m - 1 = 0$

$(m + 1)(m^2 - 1) = 0$

$\therefore$ $m = -1, +1, -1$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $= (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^x$

तथा विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{Q}{f(D)} = \frac{\sin(2x+5)}{(D^3 + D^2 - D - 1)}$ [$D^2 = -2^2$ रखने पर]

$$= \frac{\sin(2x+5)}{D \times (-2)^2 + (-2)^2 - D - 1}$$

$$= \frac{\sin(2x+5)}{-5D-5} = -\frac{1}{5} \times \frac{\sin(2x+5)}{(D+1)} \times \frac{(D-1)}{(D-1)}$$

$$= \frac{-(D-1)\sin(2x+5)}{5(D^2-1)} = \frac{-(D-1)\sin(2x+5)}{5(-2^2-1)} \quad [\because D^2 = -2^2]$$

$$= \frac{1}{25}\left[\frac{d}{dx}(\sin(2x+5)) - \sin(2x+5)\right]$$

$$= \frac{1}{25}[2\cos(2x+5) - \sin(2x+5))]$$

$$= \frac{2\cos(2x+5)}{25} - \frac{\sin(2x+5)}{25}$$

सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I.

$\therefore$
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^x + \frac{2\cos(2x+5)}{25} - \frac{\sin(2x+5)}{25}$$

प्रश्न 24. अवकल समीकरण $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin 3x \cos 5x$ को हल करो।

उत्तर—दिये गये समीकरण को इस प्रकार लिखने पर $(D^2+9) = \sin 3x \cos 5x$

सहायक समीकरण $m^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 3i$

$$m = 0 \pm 3i$$

पूरक फलन (C.F.) $= (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

विशेष समाकल (P.I.) $= \dfrac{Q}{f(D)} = \dfrac{\sin 3x \cdot \cos 5x}{(D^2+9)}$

$$= \frac{2\sin 3x \cdot \cos 5x}{2(D^2+9)}$$

$$= \frac{(\sin 8x - \sin 2x)}{2(D^2+9)} \qquad [2\sin A \cos B = \sin(A+B) - \sin(B$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(D^2+9)}\sin 8x - \frac{1}{2}\frac{1}{(D^2+9)}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{x}{2D} \times \sin 8x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2D} \cdot \sin 2x \qquad \left[\because \frac{1}{f(D^2)}\sin 9x \frac{x}{f'(D)}\text{si}\right.$$

$$= \frac{x}{4}\int \sin 8x\, dx - \frac{x}{4}\int \sin 2x\, dx = \frac{x}{4} \times \left(-\frac{\cos 8x}{8}\right) - \frac{x}{4} \times \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)$$

$$= -\frac{x\cos 8x}{32} + \frac{x\cos 2x}{8}$$

सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I.

$\therefore$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x\cos 8x}{32} + \frac{x\cos 2x}{8}$$

$\therefore$

न 25. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=2x+x^2$ को हल करो।

र—दिये गये समीकरण को इस प्रकार लिखने पर,

$$(D^2+2D+1)y=2x+x^2$$

सहायक समीकरण $m^2+2m+1=0 \Rightarrow (m+1)^2=0$

$$m=-1,-1$$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $=(C_1+C_2x)e^{-x}$

तथा विशेष समाकल (P.I.) $=\frac{1}{(D+1)^2}\times(2x+x^2)=(1+D)^{-2}(2x+x^2)$

$$=\left[1+(-2)D+\frac{(-2)(-2-1)}{\lfloor 2}D^2+\ldots\right](2x+x^2)$$

$$=2x+x^2-2\times(2+2x)+3\times(0+2)$$

$=x^2-2x+2$ [D^2 से बड़ी घातों को छोड़ने पर]

$$=x^2-2x+2$$

सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I.

$\therefore$ $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+x^2-2x+2$

न 26. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^{4x}$ का पूरक फलन ज्ञात कीजिए। [UPBTE 2022]

तर—दिया है $\frac{d}{dx}=D,\ \frac{dy}{dx}=D\cdot y,\ \frac{d^2y}{dx^2}=D^2\cdot y$

$$D^2\cdot y-5D\cdot y+6y=e^{4x}$$

$$(D^2-5D+6)y=e^{4x}$$

सहायक समीकरण (Auxiliary Equation)—

$$m^2-5m+6=0$$

$$m^2-2m-3m+6=0$$

$$m(m-2)-3(m-2)=0$$

$$(m-2)(m-3)=0$$

$$m=2,3$$

$$\text{C.F.}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

$$\text{P.I.}=\frac{1}{(D^2-5D+6)}e^{4x}$$

$\left[\because \frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{f(a)}e^{ax} \quad \because f(a)\neq 0\right]$

$$\text{P.I.}=\frac{1}{(4^2-5\times4+6)}e^{4x}$$

$$\text{P.I.}=\frac{1}{2}e^{4x}$$

General solution

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{4x}}$$

प्रश्न 27. अवकल समीकरण $(D^3 + 2D^2 + D)y = e^{2x} + x^2 + x$

उत्तर—दिये गये समीकरण की सहायक समीकरण $m^3 + 2m^2 + m = 0$

या $$m(m^2 + 2m + 1) = 0 \Rightarrow m(m+1)^2 = 0$$

$$m = 0, -1, -1$$

$\therefore$ $$\text{पूरक फलन (C.F.)} = C_1 e^{0x} + (C_2 + C_3 x)e^{-x}$$

$$= C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{-x}$$

$$\text{विशेष समाकल (P.I.)} = \frac{1}{D(D+1)^2} \times (e^{2x} + x^2 + x)$$

$$= \frac{1}{D(D+1)^2} e^{2x} + \frac{1}{D(D+1)^2}(x^2 + x)$$

$$= \frac{1}{2(2+1)^2} \times e^2 x + \frac{1}{D}(1+D)^{-2}(x + x^2)$$

$$= \frac{e^{2x}}{18} + \frac{1}{D}(1 - 2D + 3D^2 ...](x + x^2)$$

$$= \frac{e^{2x}}{18} + \frac{1}{D}(x + x^2) - 2(1 + 2x) + 3(0 + 2) ...]$$

$$= \frac{e^{2x}}{18} + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 4x\right]$$

$\therefore$ $$\text{P.I.} = \frac{e^{2x}}{18} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x$$

$\therefore$ $$\text{सम्पूर्ण हल} = \text{C.F.} + \text{P.I.}$$

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{-x} + \frac{e^{2x}}{18} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x$$

प्रश्न 28. अवकल समीकरण $(D^2 + 1)y = \cos x + e^x \sin x + x\, e^2 x$

उत्तर—दिये गये समीकरण की सहायक समीकरण $m^2 + 1 = 0$

$$m = 0 \pm i$$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $= (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

तथा विशेष समाकल,

$$\text{(P.I.)} = \frac{1}{(D^2 + 1)} [\cos x + e^x \sin x + x \cdot e^{2x}]$$

$$\text{P.I.} = \text{वास्तविक भाग } \frac{1}{(D+i)(D-i)}(e^{ix}) + \frac{1}{(D^2+1)}(e^x \sin x) + \frac{1}{(D^2+1)}(x \cdot e^{2x})$$

$$= \text{वास्तविक भाग } \frac{1}{(D-i)(i+1)}e^{ix} + e^x \frac{1}{(D+1)^2+1}\sin x + e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+1} \cdot x$$

$$= \text{वास्तविक भाग} \frac{e^{ix}}{2i} \times \frac{1}{(D+i-i)} \cdot (1+e^x) \cdot \frac{1}{(D^2+2D+2)}\sin x + e^{2x} \cdot \frac{1}{(D^2+4D+5)} \cdot x$$

$$= \text{वास्तविक भाग } \frac{e^{ix}}{2i} \times \frac{1}{D}(1) + e^x \cdot \left(\frac{1}{-1^2+2D+2}\right)\sin x + \frac{e^{2x}}{5}\left[\left(1+\frac{D^2+4D}{5}\right)^{-1}\right]x$$

$$\therefore \quad \text{P.I.} = \text{वास्तविक भाग} = \frac{e^{ix}}{2i} \times x + \frac{e^x}{2} \times \frac{(2D-1)}{(2D+1)} \times \frac{\sin x}{2\theta - 1} + \frac{e^{2x}}{5}\left[1 - \frac{D^2+4D}{5} + \ldots\right]x$$

$$= \frac{x}{2} \text{ वास्तविक भाग } \left[\frac{\cos x}{i} + \sin x\right] + \frac{e^x}{2}\frac{(2\cos x - \sin x)}{(4 \times -1^2 - 1)} + \frac{e^{2x}}{5}\left[1 - \frac{4D}{5} \ldots\right]x$$

$$= \frac{x}{2} \times \sin x + \frac{e^x}{2} \times \frac{(2\cos x - \sin x)}{(-5)} + \frac{e^{2x}}{5}\left[x - \frac{4}{5}\right]$$

$$= \frac{x \sin x}{2} - \frac{e^x}{10}(2\cos x - \sin) + \frac{e^{2x}}{25}(5x-4)$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I.

$$\therefore \quad y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \sin x + \frac{x \sin x}{2} - \frac{e^x}{10}(2\cos x - \sin x) + \frac{e^{2x}}{25}(5x-4)$$

प्रश्न 29. अवकल समीकरण $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^2$ को हल करो।

उत्तर—दी गई समीकरण $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 4y = x^2$ (1)

समीकरण (1) में $x = e^z \cdot x\dfrac{dy}{dx} = Dy,\ x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ रखने पर यहाँ $\dfrac{d}{dx} = D$

$\therefore$ समीकरण (1) से $D(D-1)y + Dy - 4y = e^{2z}$

या $(D^2 - 4)y = e^{2z}$

सहायक समीकरण $m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $= C_1 e^{2z} + C_2 e^{-2z}$

तथा विशेष समाकल (P.I.) $= \dfrac{1}{(D^2-4)}e^{2z}$

$$= \frac{1}{(D+2)(D-2)}e^{2z} = e^{2z}\cdot\frac{1}{(2+2)(D+2-2)}\cdot 1$$

$$= \frac{e^{2z}}{4}\cdot\frac{1}{D}\cdot 1 = z\cdot\frac{e^{2z}}{4}$$

सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I.

$$y = C_1e^{2z} + C_2e^{-2z} + z\cdot\frac{e^{2z}}{4}$$

$$y = C_1x^2 + C_2x^{-2} + \log x\cdot\frac{x^2}{4}$$

$$y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{x^2\cdot\log x}{4}$$

प्रश्न 30. यदि 10 वोल्ट की बैटरी से 1 μF का एक संधारित्र आवेशित होता है तथा एक नगण्य प्रतिरोध त 4 μH के प्रेरकत्व वाली कुण्डली से जोड़ दिया जाता है तो परिणामी दोलती धारा का आवर्तकाल, आवृत्ति त आयाम ज्ञात करो।

उत्तर—∴ R, नगण्य है। अत: L-C परिपथ के लिये

$$q = q_0 \cos \omega t$$

∴ विधुत धारा $i = \dfrac{dq}{dt} = -q_0 \sin \omega t \times \omega$

धारा i का अधिकतम मान जब $\sin \omega t = 1$

∴ $$i_{max} = q_0\omega = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} \qquad \left[\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right]$$

दिया है, $C = 1\ \mu F = 1 \times 10^{-6}$ F, $L = 4\ \mu H = 4 \times 10^{-6}$ H, $V = 10$ वोल्ट

∴ सूत्र द्वारा $q_0 = CV = 1 \times 10^{-6} \times 10 = 10^{-5}$ कूलॉम

तथा $$i_{max} = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} = \frac{10^{-5}}{\sqrt{1\times10^{-6}\times4\times10^{-6}}} = \frac{10^{-5}}{2\times10^{-6}} = 5 \text{ ऐम्पियर}$$

आवर्तकाल $$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{4\times10^{-6}\times1\times10^{-6}}$$
$$= 2 \times 3.14 \times 2 \times 10^{-6} = 1.256 \times 10^{-5} \text{ सेकेंड}$$

आवृत्ति, $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{1.256\times10^{-5}} = 7.96 \times 10^4$ चक्कर/सेकेण्ड

न 31. 400 वोल्ट की बैटरी के साथ 200 Ω का प्रतिरोध तथा 100 का प्रेरकत्व श्रेणीक्रम में जुड़े हैं। 5 सेकेण्ड पर परिपथ से धारा का मान ज्ञात करो ($e = 2.718$)

र—RL परिपथ के लिये, $i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$

दिया है, $E = 400$ वोल्ट, $R = 200\ \Omega$, $L = 100$ H तथा $t = 0.5$ सेकेण्ड

समीकरण (1) से,

$$\therefore \quad i = \frac{400}{200}\left[1 - e^{\frac{-200\times0.5}{100}}\right] = 2(1 - e^{-1})$$

$$\therefore \quad i = 2\left[1 - \frac{1}{2.718}\right] = \frac{2\times1.718}{2.718} = 1.26 \text{ ऐम्पियर}$$

न 32. एक पिण्ड जिसका प्रारम्भिक तापमान 80°C है, 20 मिनट में यह तापमान 60°C रह जाता है जबकि यु (माध्यम) का तापमान 40°C है। प्रारम्भिक स्थिति से 40 मिनट बाद पिण्ड का तापमान ज्ञात करो।

र—दिया है, $T = 40°C$

हम जानते हैं,

$$\frac{d\theta}{(\theta - 40)} = -kdt$$

दोनों ओर का समाकलन करने पर,

$$\log(\theta - 40) - kt + \log$$

या
$$\log\left(\frac{\theta - 40}{C}\right) = -kt$$

$$(\theta - 40) = C \cdot e^{-kt} \qquad \ldots(1)$$

यदि $t = 0$ पर $\theta = 80°C$ तथा $t = 20$ मिनट पर $\theta = 60°$

∴ समीकरण (1) से

$$(80 - 40) = C \cdot e^{-k\times0} \quad \boxed{C = 40}$$

तथा
$$(60 - 40) = 40 \times e^{-k\times20} \Rightarrow \frac{20}{40} = e^{-k\times20}$$

या
$$\log\frac{1}{2} = -20\,k \qquad [\log_e \cdot e^{-k.20} = -k.20]$$

$$\boxed{k = \frac{1}{20}\log 2}$$

C तथा k का मान समी० (1) में रखने पर,

$$\theta - 40 = 40 \cdot e^{-\frac{1}{20}\log 2 \times t}$$

$t = 40$ मिनट पर

$$\theta - 40 = 40e^{\left(-\frac{1}{20} \times \log 2 \times 40\right)}$$

या

$$\theta = 40 + 40 + 2^{-2}$$

$$\theta = 40 + 40 \times \frac{1}{4} = 40 + 10 = 50°C \qquad [e^{\log_e a}$$

$\therefore$ 40 मिनट बाद पिण्ड का तापमान 50°C होगा।

प्रश्न 33. एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है। तीन उत्तरोत्तर सेकण्डों के अन्त में अन्त में कण की स्थिति से दूरियाँ x_1, x_2, x_3 हो तो सिद्ध करो कि सम्पूर्ण दोलन का समय $\dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{x_1+x_3}{2x_2}\right)}$ है।

उत्तर—माना प्रारम्भ से 't' समय बाद विस्थापन 'x' है तो

$$x = a \cos \omega t \qquad ...($$

माना समय $t, t+1$ तथा $t+2$ के बाद मध्य स्थिति से दूरियाँ x_1, x_2 तथा x_3 है।

$\therefore$

$$x_1 = a \cos \omega t$$

$$x_2 = a \cos (t+1)$$

तथा

$$x_3 = a \cos w(t+2)$$

$$x_1 + x_3 = a[\cos \omega t + \cos \omega(t+2)]$$

$$= a\left[2\cos\left(\frac{\omega t + \omega t + 2\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t + 2\omega - \omega t}{2}\right)\right]$$

$$= 2a \cos \omega(t+1) \cdot \cos \omega$$

$$= 2x_2 \cos \omega$$

या

$$\cos \omega = \frac{x_1 + x_3}{2x_2}, \ \omega = \cos^{-1}\left(\frac{x_1+x_3}{2x_2}\right)$$

परन्तु

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{(1)}$$

$\therefore$

$$\text{सम्पूर्ण दोलन का समय} = \text{आवर्तकाल} = T = \frac{2\pi}{\cos^{-1}\left[\frac{x_1+x_3}{2x_2}\right]}$$

प्रश्न 34. यदि कोई पिण्ड जिसका द्रव्यमान m है, पृथ्वी के आकर्षण में 'h' ऊँचाई से पृथ्वी की ओर गिरता है तो इस कथन को अवकल समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए।

उत्तर—माना किसी क्षण 't' पर पिण्ड की पृथ्वी के केन्द्र से दूरा 'x' हो तो

गुरुत्वाकर्षण के नियम द्वारा,

$$F \propto \frac{1}{x^2} \Rightarrow F = \frac{K}{x^2}$$

परन्तु, $F = ma$ से,

$$F = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad -m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{K}{x^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{x^2} = 0}$$ **यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।**

प्रश्न 35. अवकलन समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2} = 0$ की घात तथा कोटि है—

(i) $\frac{3}{2}, 2$ **(ii)** $2, \frac{3}{2}$ **(iii)** $2, 2$ **(iv) इनमें से कोई नहीं**

[*UPBTE 2023*]

उत्तर—

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

महत्तम अवकलज $= \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow$ कोटि $= 2$

महत्तम अवकलज की घात $\Rightarrow$ घात $= 2$

उत्तर (iii)

प्रश्न 36. यदि $u = \log(y \sin x + x \sin y)$, तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ का मान ज्ञात कीजिये। [UPBTE 20

उत्तर—

$$u = \log(y \sin x + x \sin y)$$

y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\log(y \sin x + x \sin y))$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin x + x \cos y}{(y \sin x + x \sin y)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin x + x \cos y}{y \sin x + x \sin y}\right)$$

$$= \frac{(y \sin x + x \sin y)\cdot(\cos x + \cos y) - (\sin x + x \cos y)\cdot(y \cos x + \sin y)}{(y \sin x + x \sin y)^2}$$

$$= \frac{\begin{array}{c} y \sin x \cos x + x \sin y \cos x + y \sin x \cos y + x \sin y \cos y - y \sin x \cos x \\ - \sin x \sin y - xy \cos x \cos y - x \sin y \cos y \end{array}}{(y \sin x + x \sin y)}$$

$$= \frac{x \sin y \cos x + y \sin x \cos y - \sin x \sin y - xy \cos x \cos y}{(y \sin x + n \sin y)}$$

प्रश्न 37. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), & x > \frac{\pi}{3} \\ 0, & x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$ का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिये। [UPBTE 2023

उत्तर—Let $x = t$, $F_1(t) = \cos t$

$$L\{F_1(t)\} = f(s)$$

$$\left[a = \frac{\pi}{3}\right]$$

$$L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1} = f(s) \text{ (माना)}$$

$$L\{F(t)\} = L\left\{\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right\} = e^{-\frac{\pi}{3}s} \cdot f(s)$$

$$L\{F(t)\} = e^{-\left(\frac{\pi}{3}s\right)} \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

प्रश्न 38. हल कीजिये $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$ *[UPBTE 2023]*

उत्तर—समीकरण को इस प्रकार लिखने पर,

$$(D^3 - 3D^2 + 4)y = 0$$

इसकी सहायक समीकरण

$$m^3 - 3m^2 + 4 = 0$$

$$m^3 + m^2 - 4m^2 - 4m + 4m + 4 = 0$$

$$m^2(m+1) - 4m(m+1) + 4(m+1) = 0$$

$$(m+1)(m^2 - 4m + 4) = 0$$

$$(m+1)(m-2)^2 = 0$$

$$m = -1, 2, 2$$

यहाँ पर $Q = 0$

$\therefore$ $$\text{P.I.} = 0$$

$$\text{सम्पूर्ण हल} = \text{C.F.} + \text{P.I.} = \text{C.F.}$$

$\therefore$ $$\text{सम्पूर्ण हल } y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^{2x}$$

प्रश्न 39. हल कीजिये $(D^2 - 2D + 1)y = x\sin x.$ *[UPBTE 2023]*

उत्तर—दिये गये समीकरण की सहायक समीकरण,

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)^2 = 0$$

$$m = -1, -1$$

$\therefore$ पूरक फलन (Complementary function) (C.F.) $= (C_1 + C_2x)e^{-x}$

$$\text{विशेष समाकलन (P.I.)} = \frac{Q}{f(D)} = \frac{x\sin x}{D^2 - 2D + 1}$$

$$= \frac{x\sin x}{-2^2 - 2D + 1} \qquad D^2 = -2^2 \text{ रखने पर}$$

$$= -\frac{x\sin x}{2D+5} \times \frac{2D-5}{2D-5} = -\frac{(2D-5)\,x\sin x}{4D^2 - 25} = \frac{-(2D-5)\,(x\sin x)}{4\times(-2^2) - 25}$$

$$= \frac{-(2D-5)\,x\sin x}{-16-25} = \frac{1}{41}\left[2\frac{d}{dx}(x\sin x) - 5x\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{41}[2\sin x + 2x\cos x - 5x\sin x]$$

$$\text{P.I.} = \frac{2x\cos x - 3x\sin x}{41}$$

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{2x\cos x - 3x\sin x}{41}$$

प्रश्न 40. यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$ तो सिद्ध कीजिये $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$ [UPBTE 202

उत्तर—$a = y - z,\ b = z - x,\ c = x - y$

$$u = f(a, b, c)$$

x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a}(0) + \frac{\partial u}{\partial b}(-1) + \frac{\partial u}{\partial c}(1)$$

y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial a}(1) + \frac{\partial u}{\partial b}(0) + \frac{\partial u}{\partial c}(-1) = \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial c}$$

z के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial a}(-1) + \frac{\partial u}{\partial b}(1) + \frac{\partial u}{\partial c}(0) = -\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$