1 आव्यूह (Matrices)

INSIDE THIS CHAPTER

- **Algebra of Matrices, Inverse:** Addition, Multiplication of matrices, Null matrix and a unit matrix, Square matrix, Symmetric, Skew symmetric, Hermitian, Skew hermition, Orthagonal, Unitary, diagonal and Triangular matrix, Determinant of a matrix.
  Definition and Computation of inverse of a matrix.
- **Elementary Row/Column Transformation:** Meaning and use in computing inverse and rank of a matrix.
- **Linear Dependence, Rank of a Matrix:** Linear dependence/independence of vectors, Definition and computation of rank of matrix. Computing rank through determinants, Elementary row transformation and through the concept of a set of independent vectors, Consistency of equations.
- **Eigen Pairs, Cayley-Hamilton Theorem:** Definition and evaluation of eign values and eign vectors of a matrix of order two and three, Cayley-Hamilton theorem (without Proof)and its verification, Use in finding inverse and powers of a matrix.

प्रश्न 1. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर बताओ।

उत्तर—आव्यूह तथा सारणिक में निम्न अन्तर है—

क्र० सं०	आव्यूह (Matrix)	सारणिक (Determinant)
1.	आव्यूह $m \times n$ तत्वों की एक आयताकार सारणी होती है।	1. सारणिक $n \times n$ तत्वों की एक लम्ब सारणी होती है।
2.	आव्यूह में M पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होते हैं।	2. सारणिक में n पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होते हैं।
3.	आव्यूह में पंक्तियों तथा स्तम्भों का बराबर होना आवश्यक नहीं है।	3. सारणिक में पंक्तियाँ तथा स्तम्भ हमेशा बराबर होते हैं।
4.	$m \times n$ तत्वों के आव्यूह का क्रम $m \times n$ होता है।	4. $n \times n$ तत्वों के सारणिक को n क्रम का सारणिक कहते हैं।
5.	आव्यूह को [ ], ( ) तथा ‖ ‖ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।	5. सारणिक के तत्वों को दो ऊर्ध्वाधर रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

प्रश्न 2. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो $A - B$ का मान ज्ञात करो।

उत्तर—
$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 0-(-3) \\ -3-0 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 3. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ तो—

(i) $2A + 3B$ तथा (ii) $5A - 3B$ का मान ज्ञात करो।

उत्तर—(i)
$$2A + 3B = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 27 \\ 18 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+24 & 6+27 \\ 8+18 & -10+21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28 & 33 \\ 26 & 11 \end{bmatrix}$$

(ii) $$5A - 3B = 5\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 20 & -25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 27 \\ 18 & 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10-24 & 15-27 \\ 20-18 & 25-21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -12 \\ 2 & -46 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4. यदि $x + y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $2x - y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो x का मान ज्ञात करो।

उत्तर—दिया है—

$$x + y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{...(1)}$$

$$2x - y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$3x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3x = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+2 \\ 1+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

या $$3x = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$\boxed{x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

प्रश्न 5. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो $A \times B \times C$ का मान ज्ञात करो।

उत्तर—A का क्रम (3×3) तथा B का क्रम भी (3×3) है। अत: $A \times B$ सम्भव है।

$$\therefore \; A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times2+2\times5+3\times1 & 1\times4+2\times3+3\times6 & 1\times6+2\times2+3\times4 \\ 2\times2+0\times5+4\times1 & 2\times4+0\times3+4\times6 & 2\times6+0\times2+4\times4 \\ 3\times2+5\times5+1\times1 & 3\times4+5\times3+1\times6 & 3\times6+5\times2+1\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 28 & 22 \\ 8 & 32 & 28 \\ 32 & 33 & 32 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

अब $$A \times B \times C = \begin{bmatrix} 15 & 28 & 22 \\ 8 & 32 & 28 \\ 32 & 33 & 32 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$= \begin{bmatrix} 15\times2+28\times3+22\times5 & 15\times1+28\times0+22\times4 \\ 8\times2+32\times3+28\times5 & 8\times1+32\times0+28\times4 \\ 32\times2+33\times3+32\times5 & 32\times1+33\times0+32\times4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A \times B \times C = \begin{bmatrix} 224 & 103 \\ 252 & 120 \\ 323 & 160 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

प्रश्न 6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ **हो तो सिद्ध करो कि** $AI_3^2 = I_3A_1$

उत्तर—यहाँ I_3 का अर्थ है कि यह एक 3×3 क्रम का इकाई आव्यूह है।

$$\therefore \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3^2 = I_3 \times I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+0\times0+0\times0 & 1\times0+0\times1+0\times0 & 1\times0+0\times0+0\times1 \\ 0\times1+1\times0+0\times0 & 0\times0+1\times1+0\times0 & 0\times0+1\times0+0\times1 \\ 0\times1+0\times0+1\times0 & 0\times0+0\times1+1\times0 & 0\times0+0\times0+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \text{बायाँ पक्ष} = \text{L.H.S.} = AI_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+2\times0+3\times0 & 1\times0+2\times1+3\times0 & 1\times0+2\times0+3\times1 \\ 3\times1+2\times0+1\times0 & 3\times0+2\times1+1\times0 & 3\times0+2\times0+1\times1 \\ 2\times1+3\times0+1\times0 & 2\times0+3\times1+1\times0 & 2\times0+3\times0+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$AI_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

अब दायाँ पक्ष = R.H.S. = $I_3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ...(2) गुणा करके स्वयं देखो।

$\therefore$ समीकरण (1) व (2) से

$$A \cdot I_3^2 = I_3 \cdot A$$

प्रश्न 7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध करो कि $A + B = B + A$ *[UPBTE 2006]*

उत्तर— $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+7 \\ 3+4 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$

अब $B + A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 7+2 \\ 4+3 & 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$

अत: $\boxed{A + B = B + A}$

यही सिद्ध करना था

प्रश्न 8. यदि $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ तो $2P - 3Q$ का मान ज्ञात करो।

उत्तर— $2P - 3Q = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 10 & 14 \\ 0 & 16 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 15 \\ 15 & 21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6 & 4-0 & 6-9 \\ 0-9 & 10-0 & 14-15 \\ 0-15 & 16-21 & 18-0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4 & 4 & -3 \\ -9 & 10 & -1 \\ -15 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

प्रश्न 9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ हो तो A का सहखण्डज आव्यूह ज्ञात करो। *[UPBTE 2005]*

उत्तर—दिया है— $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$|A|$ के तत्वों के संगत सहखण्ड,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 16 = -7$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 3) = 1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (8 - 9) = -1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 2) = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 4) = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 2) = -2$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1$$

$\therefore$ सहखण्डों का आव्यूह $A^c = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ A का सहखण्डज आव्यूह $= \text{Adj} \cdot A = (A^c)$ का परिवर्त आव्यूह

$$= (A^c)' = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करो। *[UPBTE 2006]*

उत्तर— A का सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 0) - 1(0 - 0) + 0(0 - 0) = 1 \neq 0$

$\because$ $|A| \neq 0$ तो A व्युत्क्रमणीय है।

$|A|$ के तत्वों के संगत सहखण्ड,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$\therefore$ सहखण्डों का आव्यूह, $A^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $$\text{Adj} \cdot A = (A^c)' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj} \cdot A}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 11. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix}$ **तथा** $A^{-1} = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & c \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **हो तो** a **तथा** c **का मान ज्ञात करो।**

उत्तर—सूत्र द्वारा, $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & c \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0-4+5 & 0+3-3 & 0+c+1 \\ -\frac{1}{2}-8+\frac{15}{2} & -\frac{1}{2}+6-\frac{9}{2} & \frac{1}{2}+2c+3 \\ -\frac{3}{2}-4a+\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}+3a-\frac{3}{2} & \frac{3}{2}+ac+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & c+1 \\ -1 & 1 & 2c+2 \\ 1-4a & -3+3a & 2+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

दोनों पक्षों के संगत तत्वों की तुलना करने पर

$$1-4a=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}} \text{ तथा } 2c+2=0 \Rightarrow c+1=0 \Rightarrow \boxed{c=-1}$$

प्रश्न 12. आव्यूह विधि द्वारा समीकरणों को हल करो—

$3x + 2y + 4z = 7$, $2x + y + z = 4$ तथा $x + 3y + 5z = 2$ *[UPBTE 2005]*

उत्तर—समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखने पर—

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \quad \text{...(1)}$$

अब $$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - 2C_2$ तथा $C_3 \to C_3 - C_2$ करने पर

$$|A| = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0$$

$\therefore A$ व्युत्क्रमणीय है।

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2,$$

$|A|$ के सहखण्ड,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

सहखण्डों का आव्यूह,

$$A^c = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 5 \\ 2 & 11 & -7 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$\text{Adj} \cdot A = (A^c) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1} = \frac{\text{Adj} \cdot A}{|A|} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ समीकरण (1) से

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/8 \\ -9/8 \\ 5/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ -9/8 \\ 5/8 \end{bmatrix}$$

संगत तत्वों की तुलना करने पर,

$$\boxed{x = \frac{9}{4}}, \quad \boxed{y = -\frac{9}{8}}$$

तथा

$$\boxed{z = \frac{5}{8}}$$

प्रश्न 13. सिद्ध करो कि आव्यूह $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ लम्बकोणीय आव्यूह है। *[UPBTE 2004, 08]*

उत्तर—किसी वर्ग आव्यूह को लम्बकोणीय आव्यूह कहते हैं यदि

$$AA' = A'A = I$$

माना

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

अब

$$AA' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

इस प्रकार, $A'A = I$ अत: A एक लम्बकोणीय या लाम्बिक आव्यूह है।

प्रश्न 14. यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ तो $A^2 - 2A$ का मान ज्ञात कीजिए। *[UPBTE 2022]*

उत्तर—

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times2+2\times2 & 1\times2+2\times1+2\times2 & 1\times2+2\times2+2\times1 \\ 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times2+1\times1+2\times2 & 2\times2+1\times2+2\times1 \\ 3\times1+2\times2+1\times2 & 2\times2+2\times1+1\times2 & 2\times2+2\times2+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

मान ज्ञात करें—

$$A^2-2A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&4&4\\4&2&4\\4&4&2\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A=\begin{bmatrix}9-2&8-4&8-4\\8-4&9-2&8-4\\8-4&8-4&9-2\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A=\begin{bmatrix}7&4&4\\4&7&4\\4&4&7\end{bmatrix}$$

प्रश्न 15. यदि $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$ और $B=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&0\\2&-1\end{pmatrix}$ तो गुणन $A\cdot B$ ज्ञात कीजिए। *[UPBTE 2022]*

उत्तर—ज्ञात कीजिए—

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}0\times1+1\times-1+2\times2, & 0\times-2+1\times0+2\times-1\\1\times1+2\times-1+3\times2 & 1\times-2+2\times0+3\times-1\\2\times1+3\times-1+4\times2 & 2\times-2+3\times0+4\times-1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-5\\7&-8\end{bmatrix}$$

प्रश्न 16. एक लाम्बिक आव्यूह को परिभाषित कीजिए। *[UPBTE 2022]*

उत्तर—यदि A ऐस वर्ग आव्यूह है कि $A\times A'=A'\times A=I$

तो आव्यूह 'A' को लाम्बिक आव्यूह कहते हैं।

प्रश्न 17. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&1\\5&2&2\end{bmatrix}$ का सह खण्डन आव्यूह ज्ञात कीजिये।

उत्तर—माना आव्यूह A के तत्वों के सहखण्ड $A_{11}, A_{12}, \ldots$ है।

$$\therefore \quad A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -[0 \times 2 - 5 \times 1] = +5$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = [0 \times 2 - 5 \times 2] = -10$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -[2 - 2] = 0$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = [4 - 5] = -1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -[4 - 5] = 1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +[1 - 2] = -1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -[2 - 0 \times 1] = -2$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = [4 - 0 \times 1] = 4$$

अत: A का सहखण्ड आव्यूह,

$$A^c = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -10 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 18. सिद्ध करो कि आव्यूह $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ लाम्बिक (Orthogonal) आव्यूह है।

उत्तर—दिया है—

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad AA' = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad AA' = I$$

इस प्रकार, $A'A = I$ अत: आव्यूह A एक लाम्बिक आव्यूह है।

प्रश्न 19. प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा दिये गये आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करो।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तर—विधि द्वारा $A = I \times A$ से,

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

$R_1 \to \frac{R_1}{3}$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4/3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4/3 \\ 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

अब, $R_2 \to -R_2$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

अब, $R_1 \to R_1 + R_2$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

अब $R_3 \to R_3 + R_2$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

अब $R_2 \to R_2 - 4R_3$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

अब $R_3 \to -3R$, करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \times A$$

$I = B \times A \quad \to \quad B = A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$ [$\because A \cdot A^{-1} = 1$]

प्रश्न 20. आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ की कोटि (जात) ज्ञात करो। *[UPBTE 2005, 06]*

उत्तर—दिया है—

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$C_1 \leftrightarrow C_3$ (Interchange) करने पर,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

अब $C_1 \to \frac{1}{3}C_1$ तथा $C_2 \to \frac{1}{2}C_2$ करने पर,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

अब $R_2 \to R_2 - 2R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - 3R_1$ करने पर,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अत: आव्यूह 'A' की कोटि $R(A) = 1$ [$\because$ अशून्य पंक्ति एक है]

प्रश्न 21. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ **की कोटि ज्ञात करो।** [UPBTE

उत्तर—दिया है—

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - 2R_1$ करने पर,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 22. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ **की कोटि ज्ञात करो।** [UPBTE 200

उत्तर—दिया है—

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - 2R_1$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अत: आव्यूह A की कोटि $R(A) = 2$ ($\because$ अशून्य पंक्तियाँ दो हैं)

प्रश्न 23. आव्यूह $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **को त्रिभुजीय रूप में परिवर्तित करके इसकी कोटि ज्ञात करो।**

उत्तर—दिया है—

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$ (Interchange) करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 5R_1$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 8R_2$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to -\frac{1}{12}R_3$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

अत: आव्यूह A की कोटि $= R(A) = 3$ ($\because$ अशून्य पंक्तियों की संख्या 3 है)

प्रश्न 24. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{bmatrix}$ **की कोटि ज्ञात करो।**

उत्तर—माना,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 4C_1$, $C_3 \to C_3 - 9C_1$ तथा $C_4 \to C_4 - 16C_1$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & -20 & -39 \\ 9 & -20 & -56 & -108 \\ 10 & -39 & -108 & -207 \end{bmatrix}$$

अब, $R_2 \to R_2 - 4R_1$, $R_3 \to R_3 - 9R$, तथा $R_4 \to R_4 - 16R_1$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -20 & -39 \\ 0 & -20 & -56 & -108 \\ 0 & -39 & -108 & -207 \end{bmatrix}$$

अब $C_4 \rightarrow C_4 - 2C_3$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -20 & 1 \\ 0 & -20 & -56 & 4 \\ 0 & -39 & -108 & 9 \end{bmatrix}$$

अब, $C_3 \rightarrow C_3 - 3C_2$ करने पर,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & -20 & 4 & 4 \\ 0 & -39 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

अब $C_4 \rightarrow C_4 - C_3$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 4 & 0 \\ 0 & -39 & 9 & 0 \end{bmatrix} - B \text{ (माना)}$$

$\because$ अतः क्रम $|B| = 0 \quad \therefore R(A) < 4$

प्रश्न 25. यदि $\vec{P_1} = [3, 1, -4]$ तथा $\vec{P_2} = [2, 2, -3]$ हो तो सिद्ध करो कि सदिश $\vec{P_1}$ तथा $\vec{P_2}$ परिमेय संख्या के लिए रेखीय स्वतन्त्र (Linear Dependent) है। *[UPBTE 20*

उत्तर—माना K_1 तथा K_2 दो अदिश राशियाँ हैं तो रेखीय स्वतन्त्रता के प्रतिबन्ध से,

$$K_1\vec{P_1} + K_2\vec{P_2} = 0$$

$$K_1[3, 1, -4] + K_2[2, 2, -3] = [0, 0, 0]$$

$\therefore$ $$[3K_1 + 2K_2] + [K_1 + 2K_2] + [-4K_1 - 3K_2] = [0, 0, 0]$$

अतः $$3K_1 + 2K_2 = 0 \quad \text{...(}$$

$$K_1 + 2K_2 = 0 \quad \text{...(}$$

$$-4K_1 - 3K_2 = 0 \quad \text{...(}$$

समीकरण (2) को (1) में से घटाने पर

$$2K_1 = 0 \rightarrow \boxed{K_1 = 0} \quad \therefore \quad \boxed{K_2 = 0}$$

अतः दिये गये सदिश $\vec{P_1}$ तथा $\vec{P_2}$ रेखीय स्वतन्त्र सदिश है।

प्रश्न 26. आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ को प्रसामान्य रूप में परिवर्तित करके कोटि ज्ञात करो।

उत्तर—माना,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ (Interchange) करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_1$ करने पर,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

अब, $R_3 \to R_3 + 5R_2$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

अब $C_2 \to C_2 - 2C_1$, $C_3 \to C_3 - 3C_1$ तथा $C_4 \to C_4 - 4C_1$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

अब, $C_3 \to C_3 - 2C_2$ तथा $C_4 \to C_4 - C_2$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

अब, $C_4 \to C_4 + 2C_3$ करने पर,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

अब $C_4 \to C_4 + 2C_3$ करने पर,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A - [I_3 \quad 0]$ यही आव्यूह का प्रसामान्य रूप है।

$\therefore$ आव्यूह A की कोटि, $\boxed{R(A) = 3}$

प्रश्न 27. दिये गये समीकरणों के निकाय को हल करो—

$$2x + 3y - z = 0,\ x - y - 2z = 0 \text{ तथा } 3x + y + 3z = 0$$ [UPBTE

उत्तर—दिये गये समीकरणों को $AX = B$ रूप में लिखने पर—

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ (Interchange) करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - 3R_1$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to \frac{1}{5}R_2$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 4R_2$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 33/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$x - y - 2z = 0 \quad \ldots(1)$$

$$y + \frac{3z}{5} = 0 \quad \ldots(2)$$

तथा $$\frac{33}{5}z = 0 \quad \to \quad \boxed{z = 0}$$

समीकरण (2) में $z = 0$ रखने पर,

$$\boxed{y = 0}$$

समीकरण (1) में $y = 0$ तथा $z = 0$ रखने पर,

$$\boxed{x = 0}$$

माना $x_3 = K_1, K_4 - K_2$ तथा $x_5 = K_3$

$\therefore$ समीकरण (2) से,

$$x_2 = \left(\frac{K_1 - 3K_2 - 4K_3}{2}\right)$$

अब समीकरण (1) से,

$$x_1 = 2\left(\frac{K_1 - 3K_2 - 4K_3}{2}\right) - K_1 + K_2 + 2K_3$$

$$\therefore \quad x_1 = -2K_2 - 2K_3 = -2(K_2 + K_3)$$

अत: दिये गये समीकरण का स्वतन्त्र हल

$x_1 = -2(K_2 + K_3)$, $x_2 = \frac{1}{2}(K_1 - 3K_2 - 4K_3)$, $x_3 = K_1$, $x_4 = K_2$ तथा $x_5 = K_3$ है।

प्रश्न 28. दिये गये समीकरणों को हल करो—

$$\mathbf{3x + 2y - z - 4w = 0,\ x - 2y + z - 3w = 0,\ 2x - y - 6w = 0}$$

तथा $\mathbf{2x + y - w = 0}$

उत्तर—दिये गये समीकरणों को $AX = B$ रूप में लिखने पर,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_1$ (Interchange) करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$, $R_3 \to R_3 - 2R_1$ तथा $R_4 \to R_4 - 2R_1$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - (R_3 + R_4)$ तथा $R_4 \to R_4 - \frac{5}{3}R_3$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_2$ तथा $R_3 \leftrightarrow R_4$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x - 2y + z - 3w = 0 \quad \ldots(1)$$
$$3y - 2z = 0 \quad \ldots(2)$$
$$\frac{4}{3}z + 5w = 0 \quad \ldots(3)$$

माना, $w = K$ $\therefore$ समीकरण (3) से,

$$\boxed{z = -\frac{15K}{4}}$$

समीकरण (2) से,

$$y = \frac{2z}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{-15K}{4} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5K}{2}}$$

समीकरण (1) से,

$$x + 5K - \frac{15K}{4} - 3K = 0 \Rightarrow x = \frac{15K}{4} - 2K = \frac{7K}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{7K}{4}}$$

प्रश्न 29. निम्नलिखित समीकरणों की संगतता का परीक्षण करके हल करो।

$5x + 3y + 7z = 4, 3x + 26y + 2z = 9$ तथा $7x + 2y + 10z = 5$

उत्तर—समीकरणों को आव्यूह रूप $AX = B$ में लिखने पर,

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

आगमेन्टिड आव्यूह,

$$C = [AB] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 26 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to \frac{1}{5}R_1$ करने पर,

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & 4/5 \\ 3 & 26 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - 7R_1$ करने पर,

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & 4/5 \\ 0 & 121/5 & -11/5 & 33/5 \\ 0 & -11/5 & 1/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \frac{1}{11}R_2$ करने पर,

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & 4/5 \\ 0 & 121/5 & -11/5 & 33/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$r(A) = r(c) = 2$$

$\therefore$ $$r(A) = r(c) = 2 < 3$$ अज्ञातों की संख्या

अतः दी गई समीकरण संगत है। परन्तु कोटि अज्ञातों से कम है अतः इसके अनन्त हल हैं।

$AX = B$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 121/5 & -11/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 33/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

अतः $$x + \frac{3y}{5} + \frac{7z}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5x + 3y + 7z = 4 \qquad ...(1)$$

$$\frac{121y}{5} - \frac{11z}{5} = \frac{33}{5} \Rightarrow 121y - 11z = 33 \qquad ...(2)$$

माना $\boxed{z = K}$ तो समीकरण (2) से,

$$y = \frac{33 + 11K}{121} = \frac{3 + K}{11}$$

$\therefore y = \frac{3 + K}{11}$ समीकरण (1) से,

$$5x + 3x\frac{(K+3)}{11} + 7K = 4$$

$$5x = 4 - 7K - \frac{3K}{11} - \frac{9}{11} = \frac{35}{11} - \frac{80K}{11}$$

$$\boxed{x = \frac{(7 - 16K)}{11}}$$

प्रश्न 30. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ के आइगेन (अभिलाक्षणिक) मानों (Eigen-values) को ज्ञात करो।

[*UPBTE 2007, 09*]

उत्तर—सर्वप्रथम

आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक आव्यूह $= A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

अब आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक बहुपद $= [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$

प्रसार करने पर,
$$= (3 - \lambda)(-\lambda) + 2 = -3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

अब आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक समीकरण $[A - \lambda I] = 0$

$\therefore$
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

या
$$(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) - 1(\lambda - 2) = 0$$

या
$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1, 2}$$

अत: आव्यूह 'A' के आइगेन मान या अभिलाक्षणिक मूल $\lambda = 1$ तथा $\lambda = 2$ हैं।

प्रश्न 31. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात कीजिए। *[UPBTE 2022]*

उत्तर—दिया है—
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$ (Interchange) करने पर,
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_1 - R_2;\ R_3 \to R_3 - 2R_1$
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + 3R_2$
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

अत: आव्यूह A की कोटि, $r(A) = 3$

[$\because$ अशून्य पंक्तियाँ दो हैं]

प्रश्न 32. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ का आइगेन मान ज्ञात कीजिये। *[UPBTE 2022]*

उत्तर— आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक आव्यूह $= A - \lambda I$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

अब आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक बहुपद $= |A - \lambda I|$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

प्रसार करने पर,

$$= (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 6$$
$$= 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 6$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

अब आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक समीकरण, $|A - \lambda I| = 0$

$\therefore$ $$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

या $$(\lambda^2 - 6\lambda - \lambda + 6) = 0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda(\lambda - 6) - 1(\lambda - 6) = 0$$

या $$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1, 6}$$

अत: आंव्यूह 'A' के आइगेन मान या अभिलाक्षणिक मूल $\lambda = 1$, तथा $\lambda = 6$ हैं।

प्रश्न 33. आव्यूह 'A' $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों को ज्ञात करो। ***[UPBTE 2019]***

उत्तर—सर्वप्रथम, आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक आव्यूह

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 0-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

अब, आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक बहुपद $= [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$

प्रसार करने पर, $$= -\lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda + 2) + 2(-1 + 2\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + \lambda + \lambda - 2 - 2 + 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda - 4$$

अत: आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक समीकरण, $|A - \lambda I| = 0$

$\therefore$ $$-\lambda^3 + 6\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda + 4 = 0$$

या $$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 - 1 \pm \sqrt{3}$$

अत: आव्यूह 'A' के आइगेन मान 2, $-1-\sqrt{3}$ तथा $-1+\sqrt{3}$ है।

प्रश्न 34. सिद्ध करो कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ **के आइगेन मान ± है। आव्यूह 'A' के आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिश ज्ञात करो।**

उत्तर—आइगेन मान—

आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक समीकरण, $(A - \lambda I) = 0$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

प्रसार करने पर, $(\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin\theta \cdot \sin\theta = 0$

$$-(\cos^2\theta - \lambda^2) - \sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \pm 1}$$

यही सिद्ध करना था

आइगेन सदिश—माना आइगेन मान $\lambda_1 = 1$ के लिये आइगेन सदिश $x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ है।

$\therefore$ आव्यूह 'A' का समीकरण, $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\quad (A - I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

या
$$\begin{bmatrix} -2\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to \left(\frac{1}{2\sin\theta/2}\right) R_1$ तथा $R_2 \to \left(\frac{1}{2\cos\theta/2}\right) R_2$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 & -\cos\theta/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_1 + R_2$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -x_1 \sin\frac{\theta}{2} + x_2 \cos\frac{\theta}{2} = 0$$

यह समीकरण $x_1 = \cos\frac{\theta}{2}$ तथा $x_2 = \sin\frac{\theta}{2}$ द्वारा सन्तुष्ट होता है।

$\therefore$ (आइगेन मान, $\lambda_1 = 1$ के लिये आइगेन सदिश $x_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{bmatrix}$ है।

उपरोक्त विधि अनुसार आइगेन मान $\lambda_2 = -1$ के लिये आइगेन सदिश $x_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta/2 \\ -\cos\theta/2 \end{bmatrix}$ होगा।

प्रश्न 35. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **हो तो** $A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ **का मान ज्ञात करो।**

उत्तर—आव्यूह 'A' का अभिलाक्षणिक समीकरण, $(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

प्रसार करने पर,

$$(2 - \lambda)\,[(1 - \lambda)(2 - \lambda)] - 0(0) + 1[0 - (1 - \lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \lambda)\,[(2 - \lambda)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \lambda)\,[4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1] = 0$$

$$\therefore \quad (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0 \qquad \text{...(1)}$$

यदि आव्यूह 'A' कैले हैमिल्टन प्रमेय को सन्तुष्ट करेगा तो वह $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3I = 0$ को भी सन्तुष्ट करेगा

अत:, $\quad A^3 - 5A^2 + 7A - 3I = 0 \qquad$ ...(2)

$$= A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$$

$$= A^5(A^5 - 5A^2 + 7A - 3I) + A(A^3 - 5A^2 + 7A - 3I) + A^2 + A + I$$

$$= A^5 \times 0 + A \times 0 + A^2 + A + I = A^2 + A + I = A \cdot A + A + I$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 36. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **तो**

(i) $AB = 0 = BA$ (ii) $AB \neq 0, BA = 0$ (iii) $AB = 0, BA \neq 0$ (iv) $AB \neq 0, BA \neq 0$

[UPBTE 2023]

उत्तर—

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times0+0\times0 & 1\times1+0\times0 \\ 0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{...(1)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\times1+1\times0 & 0\times0+0\times1 \\ 0\times1+0\times0 & 0\times0+0\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$AB \neq 0, BA = 0$$

अत: **उत्तर (ii)**

प्रश्न 37. यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, **grad** r **का मान ज्ञात कीजिये।** [UPBTE 2023]

उत्तर—

$$\text{grad } r = \nabla r$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

इसी प्रकार $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ तथा $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$$\text{grad } r = \nabla r = i\frac{\partial r}{\partial x} + j\frac{\partial r}{\partial y} + k\frac{\partial r}{\partial z} = i\frac{x}{r} + j\frac{y}{r} + k\frac{z}{r}$$

$$= \frac{1}{r}(x\cdot i + y\cdot j + z\cdot k) = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\textbf{grad } \boldsymbol{r} = \nabla \boldsymbol{r} = \hat{r}$$

प्रश्न 38. सिद्ध कीजिये $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **लाम्बिक है।** [UPBTE 2023]

उत्तर—लाम्बिक (Perpendicular) होने के लिये $AA' = I$

$$A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2-4 & -2+4-2 \\ 2+2-4 & 4+1+4 & -4+2+2 \\ -2+4-2 & -4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA' = I$$

इस प्रकार, $AA' = I$ अत: आव्यूह (Matrix) A एक लाम्बिक है।

प्रश्न 39. परिक्रमण शंकु $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ के बिन्दु $P(1, 0, 2)$ पर अभिलम्ब की दिशा में इकाई सदिश ज्ञात कीजिये। *[UPBTE 2023]*

उत्तर— $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

$$f = 4x^2 + 4y^2 - z^2$$

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} \cdot f = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(4x^2 + 4y^2 - z^2)$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x}(4x^2 + 4y^2 - z^2) + j\left(\frac{\partial}{\partial y}4x^2 + 4y^2 - z^2\right)\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(4x^2 + 4y^2 - z^2)$$

$$= \hat{i}(8x) + \hat{j}(8y) + \hat{k}(-2z)$$

$$\text{grad } f = \nabla f = 8x\hat{i} + 8y\hat{j} - 2z\hat{k}$$

$$\nabla f_{(1,\,0,\,2)} = 8 \times 1\hat{i} + 8 \times 0\hat{j} - 2 \times 2\hat{k} = 8\hat{i} - 4\hat{k}$$

अभिलम्ब की दिशा में इकाई सदिश (Unit Vector in the Perpendicular Direction)—

$$\hat{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{8\hat{i} - 4\hat{k}}{\sqrt{8^2 + (-4)^2}}$$

$$\hat{n} = \frac{8\hat{i} - 4\hat{k}}{\sqrt{64 + 16}} = \frac{8\hat{i} - 4\hat{k}}{\sqrt{80}} = \frac{8\hat{i} - 4k}{4\sqrt{5}}$$

इकाई सदिश (Unit Vector) $\hat{n} = \dfrac{2\hat{i} - k}{\sqrt{5}}$

प्रश्न 40. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. की अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिये। दर्शाइये कि आव्यूह A समीकरण को संतुष्ट करता है तथा A^{-1} ज्ञात कीजिये। *[UPBTE 2023]*

उत्तर—आव्यूह A का अभिलाक्षणिक (Characteristic) समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 7 \\ 4 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

प्रसार करने पर,

$(1 - \lambda)[(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 2 \times 3] - 3[4 \times (1 - \lambda) - 3 \times 1] + 7[4 \times 2 - 1 \times (2 - \lambda)] = 0$

$(1 - \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6) - 3(4 - 4\lambda - 3) + 7(8 - 2 + \lambda) = 0$

$(1 - \lambda)(-3\lambda + \lambda^2 - 4) - 3(1 - 4\lambda) + 7(6 + \lambda) = 0$

$-3\lambda + \lambda^2 - 4 + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda - 3 + 12\lambda + 42 + 7\lambda = 0$

$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 20\lambda + 35 = 0$ ...(1)

यदि आव्यूह A अभिलाक्षणिक समीकरण (1) को सन्तुष्ट करता है, तो

$$-A^3 + 4A^2 + 20A + 35I = 0$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times4+7\times1 & 1\times3+3\times2+7\times2 & 1\times7\times3\times3\times7\times1 \\ 4\times1+2\times4+3\times1 & 4\times3+2\times2+3\times2 & 4\times7+2\times3+3\times1 \\ 1\times1+2\times4+1\times1 & 1\times3+2\times2\times1\times2 & 1\times7+2\times3+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 23 \\ 15 & 22 & 37 \\ 10 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 23 \\ 15 & 22 & 37 \\ 10 & 9 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135 & 152 & 232 \\ 140 & 163 & 208 \\ 60 & 76 & 111 \end{bmatrix}$$

$$-A^3 + 4A^2 + 20A + 35I = -\begin{bmatrix} 135 & 152 & 232 \\ 140 & 163 & 208 \\ 60 & 76 & 111 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 20 & 23 & 23 \\ 15 & 22 & 37 \\ 10 & 9 & 14 \end{bmatrix} + 20\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 35\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अत: आव्यूह A अभिलक्षणिक समीकरण (1) को संतुष्ट करता है।

समीकरण (2) को A^{-1} से गुणा करने पर,

$$A^{-1}(-A^3 + 4A^2 + 20A + 35I) = 0$$

$$-A^2 + 4A + 20I + 35A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{35}[A^2 - 4A - 20I]$$

$$A^2 - 4A - 20I = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 23 \\ 15 & 22 & 37 \\ 10 & 9 & 14 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 20\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20-4 & 23-12 & 23-28 \\ 15-16 & 22-8 & 37-12 \\ 10-4 & 9-8 & 14-4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 11 & -5 \\ -1 & 14 & 25 \\ 6 & 1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 0 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 0 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/35 & 11/35 & -1/7 \\ -1/35 & -6/35 & 0 \\ 6/35 & 1/35 & -2/7 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 41. सिद्ध करो कि निम्न क्षेत्र आघूर्णी है $A = (x^2 + xy^2)i + (y^2 + x^2y)j$ इसका अदिश विभव भी ज्ञात कीजिये। **[*UPBTE 2023*]**

उत्तर— $A = (x^2 + xy^2)i + (y^2 + x^2y)j$

आघूर्णी के लिए $\nabla A = 0$

$$\therefore \qquad \nabla A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 + xy^2 & y^2 + xy^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + xy^2)\right] - j\left[\frac{1}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + xy^2)\right]$$

$$+k\left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 + xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2)\right]$$

$$= i(0) - j(0) + k(2xy - 2xy) = 0$$

अत: दिया गया क्षेत्र आघूर्णी (irrotational) है।

अदिश विभव (Scalar Potential)—

$$\overline{F} = \nabla \cdot A = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{(x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j} + k\right\}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + x^2 + y) + 0$$

$$= 2x + y^2 + 2y + x^2$$

$$\nabla \cdot A = x^2 + y^2 + 2x + 2y$$

प्रश्न 42. निम्न समीकरण निकाय के संगत होने की जाँच कीजिये। **[*UPBTE 2023*]**

$$\begin{aligned} 2x + 6y + \quad 11 &= 0 \\ 6x + 20y - 6z + 3 &= 0 \\ 6y - 16z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

उत्तर—दिये गये समीकरणों को $AY = B$ रूप में रखने पर,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & -16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 30 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 30 \\ -61 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to \frac{1}{2}R_1, R_2 = \frac{1}{2}R_2$ तथा $R_3 \to \frac{1}{2}R_3$ करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/2 \\ +15 \\ -61/2 \end{bmatrix}$$

$\because$ अगमेन्टिड आव्यूह, $C = [AB]$

$R_2 \to R_2 + 3R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/2 \\ -153/2 \\ -61/2 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - 3R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -464/2 \\ -153/2 \\ -61/2 \end{bmatrix}, \quad C = [AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -464/2 \\ 0 & 1 & 0 & -153/2 \\ 0 & 0 & 1 & -61/2 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 3$$
$$r(C) = 3$$

अतः निकाय संगत है।

□□□