अध्याय

10

उच्च क्रम के रैखिक अवकल समीकरण

(Higher Order Linear Differential Equations)

तथ्य (Important Formulae)

1. **n घात का रैखिक अवकल समीकरण :** nवें क्रम का रैखिक अवकल समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त करते है :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = R$$

या $(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)\, y = R$ $\left[\dfrac{d}{dx} \cong D \text{ लेने पर}\right]$

जहाँ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं तथा R शून्य अथवा x का फलन है।

2. (a) सम्पूर्ण हल (C.S.) = पूरक फलन (C.F.) + विशेष समाकलन (P.I.)
   (b) यदि $R = 0$ तो सम्पूर्ण हल पूरक फलन को y के बराबर करने से प्राप्त होता है।

3. **सहायक समीकरण (A.E.) :** रैखिक अवकल समीकरण में बायें पक्ष में D की जगह m रखकर शून्य के बरावर करने से सहायक समीकरण प्राप्त होता है।
   जैसे : $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{4x}$ *i.e.*, $(D^2 + 4D + 3)\, y = e^{yx}$ का सहायक समीकरण $m^2 + 4m + 3 = 0$ है।

4. **पूरक फलन ज्ञात करना :** सहायक समीकरण $m^n + a_1 m^{n-1} +, \ldots, + a_n = 0$ को हल कर $m = m_1, m_2 \ldots m_n$ मूल प्राप्त करें।
   (i) अब यदि मूल $m_1, m_2, \ldots, m_n$ वास्तविक एवं भिन्न हैं, तो पूरक फलन
   $$y_c = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n\, e^{m_n x}$$
   (ii) यदि मूल वास्तविक एवं समान हैं :
   माना $m = m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, m_3,$ तो पूरक फलन (C.F.)
   $$y_c = (C_1 + C_2 x)\, e^{m_1 x} + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\, e^{m_2 x} + C_6 e^{m_3 x}$$
   (iii) **यदि मूल काल्पनिक हों :** माना $m = \alpha + i\beta, m_1$ तो पूरक फलन
   $$y_c = e^{\alpha x}\, (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + C e^{m_1 x}$$
   या $C_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x + C_2) + C_2 e^{m_1 x}$ या $C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x + C_2) + C_3\, e^{m_1 x}$
   (iv) **यदि मूल अपरिमेय हैं :** माना मूल $\alpha \pm \sqrt{\beta}, m_1$ हों तो पूरक फलन
   $$y = e^{\alpha x}\, [C_1 \cosh \sqrt{\beta} x + c_2 \sinh \sqrt{\beta} x] + C_3 e^{m_1 x}$$

5. **विषमघातीय अवकल समीकरणों का हल :** यदि समीकरण $f(D)\, y = g(x)$ हो, तो
   (a) पूरक फलन : इसे ज्ञात करने की विधि वहीं है जो समघातीय रैखिक अवकल समीकरण की है। यह विधि धारा (4) में बतायी गयी है।
   (b) विशेष समाकल (Particular Integral) : $\dfrac{1}{f(D)}\, g(x)$, जहाँ $R = g(x)$

A. फलन $g(x)$ के विभिन्न रूपों का विशेष समाकल

फलन $[g(x)]$	विशेष समाकल
(i) e^{ax}	(i) (a) $\frac{e^{ax}}{f(a)}$ यदि $f(a) \neq 0$; (b) $x\frac{e^{ax}}{f'(a)}$ यदि $f'(a) \neq 0$
(ii) $\sin ax$ या $\cos ax$	(ii) (a) $\frac{\sin ax \text{ या } \cos ax}{f(-a^2)}$, यदि $f(-a^2) \neq 0$ (b) $x\frac{\sin ax \text{ या } \cos ax}{f'(-a^2)}$; यदि $f'(-a^2) = 0$
(iii) $\sinh ax$ या $\cosh ax$	(iii) $\frac{g(x)}{f(D^2)}$ में $D^2 = a^2$ रखें।
(iv) x^n या $(ax+b)^n$	(iv) $\frac{g(x)}{f(D)} = [1 \pm f(D)]^{-1} g(x)$
(v) $e^{ax}X$	(v) $e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}X$
(vi) xQ	(vi) $\frac{1}{f(D)}(xQ) = x\frac{1}{f(D)}Q + \left(\frac{d}{dD}\frac{1}{f(D)}\right)Q$

B. **विशेष समाकल की सामान्य विधि :** विशेष समाकल $= e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x} g(x)\,dx$ जहाँ $f(D) = D - \alpha$

10.1 अचर गुणांकों वाले समघाती रैखिक समीकरण में (Homogeneous Linear Differential Equation)

ऐसे समीकरण जो

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y_n = Q \quad \ldots(1$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं तथा Q, x का फलन अथवा अचर है, समघाती रैखिक समीकरण कहलाते हैं।

10.2 समघाती समीकरणों का हल (Solution of Homogeneous Linear Differential Equations)

ऐसे समीकरणों के हल के लिए सर्वप्रथम $x = e^2$ प्रतिस्थापित किया जाता है जिससे $z = \log_e x$ तथा $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

तथा (i) $x\frac{dy}{dx} = Dy$ (ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ (iii) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$

(iv) $x^n\frac{d^ny}{dx^n} = [D(D-1)(D-2)\ldots\{D-(n-1)\}]y$, जहाँ $D = \frac{d}{dz}$ रखा जाता है।

परीक्षा में पूछे गए एवं अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ का हल है

(a) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$
(b) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$
(c) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-3x}$
(d) कोई नहीं

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$ का हल है

(a) $xy = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ (b) $y = (c_1 + c_2) e^{3x}$

(c) $y = (c_1 + c_2 x) e^{-3x}$ (d) कोई नहीं

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$ के हल का P.I. है।

(a) e^{3x} (b) $\dfrac{e^{3x}}{36}$

(c) $\dfrac{e^{-3x}}{36}$ (d) कोई नहीं

$(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)\,y = 0$ का हल है

(a) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$ (b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

(c) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{3x}$ (d) कोई नहीं

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

हल करें : $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 2\log x$ **[2011, 22(S)]**

(i) (a) समीकरण $(D^3 + 1)\,y = (e^x + 1)^2$ को हल कीजिये। **[2019(S)]**

(b) अवकल समीकण $(D^3 + 1)\,y = (e^x + 1)^2$ का विशेष अवकलन (P.I.) ज्ञात कीजिए। **[2022(S)]**

(ii) हल करें : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = e^{4x}$ **[2013, 22(S)]**

(iii) समीकरण $(D^2 + 2D^2 - 5D - 6)\,y = e^{4x}$ को हल करो। **[2021(S)]**

(iv) समीकरण $(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)\,y = 0$ को हल करो। **[2019(S)]**

(v) हल करें $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ **[2017]**

(vi) $(D^2 + D - 2)\,y = e^{-2x}$ **[2017]**

(i) $(D^2 + 3D - 2)\,y = e^{2x}\sin x$ **[2016]**

(ii) $(x^3 D^2 + 2x^2 D - 2x)\,y = 1$ **[2016]**

(iii) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = \sin(\log x^2)$ **[2016]**

(iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = \sec ax$ **[2016(S)]**

$x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$ **[2014]**

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^x + \cos x$ **[2001, 13]**

6. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 6y = x$ **[2018(S), 12]**

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-3x}$ **[2011]**

हल एवं संकेत

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. (a) **2.** (b) **3.** (b) **4.** (a)

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. दिया गया समीकरण $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ ...(

(1) में $x = e^z$ या $\log x = z, \frac{d}{dz} \equiv D, x\frac{dy}{dx} = Dy$

तथा $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ रखने पर

$$[D(D-1) - D + 1]\, y = 2z$$

$\Rightarrow [D^2 - D - D + 1]\, y = 2z \quad \Rightarrow (D^2 - 2D + 1)\, y = 2z$

सहायक समीकरण (A.E.) $= m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow m = 1, 1$

$\therefore$ पूरक फलन $= (C_1 + C_2 z)\, e^z$

विशेष समाकल $= \frac{1}{f(D)}(2z) = \frac{1}{(D-1)^2}(2z) = \frac{1}{(1-D)^2}(2z)$

$= 2[1-D]^{-2}\, z = 2[1+2D]\, z$ [शेष पद शून्य हैं]

$= 2[z + 2Dz] = 2[z + 2]$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $y = (C_1 + C_2 z)\, e^z + 2(2+z)$

$= (C_1 + C_2 \log x)\, x + 2(2 + \log x)$ $[\because z = \log x]$

2. (i) (a) दिया गया समीकरण $(D^3 + 1)y = (e^x + 1)^2$

$\therefore$ सहायक समीकरण $m^3 + 1 = 0 \Rightarrow m + 1 = 0$ या $m^2 - m + 1 = 0$

$\Rightarrow m = -1$ या $m = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $C_1 e^{-x} + e^{x/2}\left[C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

P.I. $\frac{(e^x+1)^2}{f(D)} = \frac{1}{D^3+1}(1+e^x)^2 = \frac{1}{D^3+1}(1 + 2e^x + e^{2x})$

$= \frac{1}{D^3+1}(e^{0x} + 2e^x + e^{2x})$

$= \frac{1}{D^3+1}(e^{0x}) + 2\frac{1}{D^3+1}(e^x) + \frac{1}{D^3+1}(e^{2x})$

$= \frac{1}{0+1} \times 1 + 2 \times \frac{1}{1^3+1}e^x + \frac{1}{2^3+1}e^{2x}$

$= 1 + \frac{2}{2}e^x + \frac{1}{9}e^{2x} = 1 + e^x + \frac{1}{9}e^{2x}$

$\therefore$ संपूर्ण हल : C.F. + P.I. $= C_1 e^{-x} + e^{x/2}\left[C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + 1 + e^x + \frac{1}{9}e^{2x}$

(b) (i) (a) भाँति हल करें।

(ii) दिया गया समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{4x} \Rightarrow (D^2 - 5D + 6)\, y = e^{4x}$ ...(1)

सहायक समीकरण (A.E.) $= m^2 - 5m + 6 = 0$

$\therefore$ $(m-3)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 3, m = 2$

$\Rightarrow$ पूरक फलन (C.F.) $= C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$ ...(2)

$\therefore$ समी० (1) से

$$\text{P.I.} = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}e^{4x} = \frac{1}{4^2 - 5\times 4 + 6}e^{4x} \quad [D = 4 \text{ रखने पर}]$$

$$= \frac{1}{16 - 20 + 6}e^{4x} = \frac{1}{2}e^{4x}$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल (C.S.) $y = \text{C.F.} + \text{P.I.};\ y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x}$ उत्तर

(iii) दिया गया समीकरण $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)\, y = e^{4x}$

$\therefore$ सहायक समीकरण $m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = 0$

$\Rightarrow m^3 + m^2 + m^2 + m - 6m - 6 = 0 \Rightarrow m^2(m+1) + m(m+1) - 6(m+1) = 0$

$\Rightarrow (m+1)(m^2 + m - 6) = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2)(m+3) = 0$

$\therefore m + 1 \Rightarrow 0 \Rightarrow m = -1;\ m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2,\ m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$

अतः C. F. $= C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x}$

$$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{e^{4x}}{D^3 + 2D^2 - 5D - 6} = \frac{e^{4x}}{4^3 + 2\times 4^2 - 5\times 4 - 6} \quad [D = 4 \text{ रखने पर}]$$

$$= \frac{e^{4x}}{64 + 32 - 20 - 6} = \frac{e^{4x}}{96 - 26} = \frac{e^{4x}}{70}$$

सम्पूर्ण हल $y = \text{C. F.} + \text{P. I.}$

i.e., $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} + \frac{1}{70}e^{4x}$ **Ans.**

(iv) दिया गया समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

$\Rightarrow (D^3 + 6D^2 + 11D + 6)\, y = 0 \quad [\frac{dy}{dx} = Dy, \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$ तथा $\frac{d^3y}{dx^3} = D^3y$ रखने पर]

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^3 + 6m^2 + 11m + 6 = 0$

$\Rightarrow m^3 + m^2 + 5m^2 + 5m + 6m + 6 = 0 \Rightarrow m^2(m+1) + 5m(m+1) + 6(m+1) = 0$

$\Rightarrow (m+1)(m^2 + 5m + 6) = 0 \Rightarrow (m+1)\{m^2 + 2m + 3m + 6)\} = 0$

$\Rightarrow (m+1)\{m(m+2) + 3(m+2)\} = 0 \Rightarrow (m+1)(m+2)(m+3) = 0$

$\Rightarrow \therefore m = -1, -2, -3$

m के ये मान वास्तविक एवं भिन्न हैं

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$.

यह अभीष्ट व्यापक हल है।

(v) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ...(1)

(1) में $x = e^z$ *i.e.*, $\log x = z$ रखने से जिससे

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)\, y,\ x^2 = e^{2z},\ \frac{1}{x^2} = e^{-2z}$$

$\{D(D-1) - 2\}\, y = e^{2z} + e^{-2z}$ *i.e.*, $(D^2 - D - 2)\, y = e^{2z} + e^{-2z}$ ...(2)

$\therefore$ A.E. : $m^2 - m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-2)(m+1) = 0$

$\therefore$ $m = 2;\ m = -1$

अतः C.F. $= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

पुनः समी० (2) से

$$\text{P.I.} : \frac{e^{2z}}{D^2 - D - 2} + \frac{e^{-2z}}{D^2 - D - 2} = \frac{e^{2z}}{(D+1)(D-2)} + \frac{e^{-2z}}{(D+1)(D-2)}$$

$$= \frac{e^{2z}}{(2+1)(D+2-2)} \times 1 + \frac{e^{-2z}}{(-2+1)(-2-2)}$$

[पहले भाग में $D = 2$ रखने से $f(D)$

$$= \frac{1}{3} e^{2z} \frac{1}{D} \times 1 + \frac{1}{4} e^{2z} = \frac{1}{3} e^{2z} \int dz + \frac{1}{4} e^{-2z}$$

$$= \frac{1}{3} z e^{2z} + \frac{1}{4} e^{-2z}$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \log x + \frac{1}{4} x^{-2}$$

अतः (3) तथा (4) से

$$\text{C.S.} : y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} x^2 \log x + \frac{1}{4x^2}$$

(vi) दिया गया समीकरण $(D^2 + D - 2)\, y = e^{-2x}$

$\therefore$ A.E. : $m^2 + m - 2 = 0$

$= (m+2)(m-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m + 1 = 0$ या $m - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $m = -2, 1$

$\therefore$ C.F. : $C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

$\therefore$ पुनः विशेष समाकल (P.I.) : $\dfrac{e^{-2x}}{D^2 + D - 2} = \dfrac{e^{-2x}}{(D+2)(D-1)} = \dfrac{e^{-2x}}{(D-2+2)(-2-1)}$ [$\because f(-2)$

i.e., विशेष समाकल $= \dfrac{e^{-2x}}{-3} \displaystyle\int dx = -\dfrac{x}{3} e^{-2x}$

$\therefore$ C.S. y = C.F. + P.I. *i.e.*, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \dfrac{x}{3} e^{-2x}$

3. **(i)** दिया गया समीकरण $(D^2 + 3D + 2)y = e^{2x} \sin x$ ...(

$\therefore$ सहायक समीकरण $m^2 + 3m + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m+2)(m+1) = 0$

$\Rightarrow$ $m = -2$ या $m = -1 \quad \therefore$ C.F. $= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ ...(

$$\text{P.I.} : \frac{e^{2x} \sin x}{D^2 + 3D + 2} = e^{2x} \frac{\sin x}{(D+2)^2 + 3(D+2) + 2} \qquad [D = D + 2 \text{ रखने पर}]$$

$$= e^{2x} \frac{\sin x}{D^2 + 4D + 4 + 3D + 6 + 2} = e^{2x} \frac{\sin x}{D^2 + 7D + 12}$$

$D^2 = -1$ रखने पर P.I. $= e^{2x} \dfrac{\sin x}{-1 + 7D + 12} = \dfrac{e^{2x}}{7D + 11} \times \dfrac{(7D - 11)\sin x}{(7D - 11)} = e^{2x} \dfrac{(7D - 11)\sin x}{49D^2 - 121}$

पुनः $D^2 = -1$ रखने पर P.I. $= e^{2x} \dfrac{(7D - 11)\sin x}{49 \times (-1^2) - 121} = -\dfrac{e^{2x}}{170} (7D - 11) \sin x$

$$\text{P.I.} = -\frac{e^{2x}}{170} \{7 \cos x - 11 \sin x\} \qquad [\because D(\sin x) = \cos x]$$

$\therefore$ C.S. $y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$ *i.e.*, $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \dfrac{e^{2x}}{170}\{7\cos x - 11\sin x\}$

(ii) दिया गया समीकरण $(x^3D^2 + 2x^2D - 2x)\, y = 1$

i.e., $x\,(x^2D^2 + 2xD - 2)\, y = 1$ *i.e.*, $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 2y = \dfrac{1}{x}$ ...(1)

समी० (1) में $x = e^z$ रखने पर जिससे $z = \log x$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D\,(D-1)\,y,\ x\frac{dy}{dx} = Dy \text{ तथा } \frac{1}{x} = e^{-z},\ D = \frac{d}{dz}$$

$$\{D(D-1) + 2D - 2\}\ y = e^{-z}$$

i.e., $\{D^2 - D + 2D - 2\}\ y = e^{-z}$ *i.e.*, $\{D^2 + D - 2\}\ y = e^{-z}$

$\therefore$ A.E. : $m^2 + m - 2 = 0$ $\Rightarrow$ $(m+2)\,(m-1) = 0$

$\Rightarrow$ $m = 1, m = -2$ $\therefore$ C.F. $= C_1 e^z + C_2 e^{-2z} = C_1 x + C_2 x^{-2}$ ...(3) $[\because x = e^z]$

तथा P.I. $= \dfrac{e^{-z}}{D^2 + D - 2} = \dfrac{e^{-z}}{(-1)^2 + (-1) - 2}$ [$D = -1$ पर रखने पर]

$$= \frac{e^{-z}}{-2} = -\frac{1}{2}x^{-1} \qquad [\because\ e^z = x]$$

$\therefore$ C.S. $y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$ *i.e.*, $y = C_1 x + C\ \ x^{-2} - \dfrac{1}{2}x^{-1} = C_1 x + \dfrac{C_2}{x^2} - \dfrac{1}{2x}$

यह अभीष्ट हल है।

(iii) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = \sin\,(\log x^2) = \sin(2\log x)$ ...(1)

(1) में $x = e^z$ रखने से जिससे *i.e.*, $z = \log x,\ D = \dfrac{d}{dz}$

$$\{D\,(D-1) + D + 1\}\ y = \sin 2z$$

$\Rightarrow$ $\{D^2 - D + D + 1\} = \sin 2z$ $\Rightarrow$ $(D^2 + 1)\ y = \sin 2z$ ...(2)

$\therefore$ A.E. $m^2 + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $m^2 = -1 = i^2$ $\Rightarrow$ $m = \pm i$

$\therefore$ C.F. $C_1 \cos z + C_2 \sin z = C_1 \cos\,(\log x) + C_2 \sin\,(\log x)$

P.I. $\dfrac{\sin 2z}{D^2 + 1} = \dfrac{1}{-2^2 + 1}\sin 2z$ [$D^2 = -2$ रखने पर]

$$= \frac{1}{-4+1}\sin 2z = \frac{-1}{3}\sin 2z = -\frac{1}{3}\sin\,(\log x^2)$$

$\therefore$ C.S. $y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = C_1 \cos\,(\log x) + C_2 \sin\,(\log x) - \dfrac{1}{3}\sin\,(\log x^2)$

(iv) प्रतीक रूप में समीकरण $(D^2 + a^2)\ y = \sec ax$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 + a^2 = 0$ $\Rightarrow$ $\pm ai$

$\therefore$ **पूरक फलन** (C.F.) $= e^{0x}\ (C_1\ \cos ax + C_2\ \sin ax)$

$$= C_1\ \cos ax + C_2\ \sin ax$$

विशेष समाकल (P.I.) $= \dfrac{1}{D^2 + a^2}\sec ax = \dfrac{1}{(D+ai)\,(D-ai)}\sec ax$ $[\because\ D^2 + a^2 = D^2 - a^2 i^2]$

$$= \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{D - ai} - \frac{1}{D + ai}\right]\sec ax \qquad \text{[आंशिक भिन्नीकरण से]}$$

अब $\frac{1}{D-ai}\sec ax = e^{iax}\int e^{-iax}\sec ax\, dx$

$$= e^{iax}\int \frac{\cos ax - i\sin ax}{\cos ax}dx$$

$$= e^{iax}\left[\int dx - i\int \frac{\sin ax}{\cos ax}dx\right]$$

$$= e^{iax}\left[x + \frac{i}{a}\log\cos ax\right]$$

इसी तरह $\frac{1}{D+ai}\sec ax = e^{-iax}\left[x - \frac{i}{a}\log\cos ax\right]$

$\therefore$ समी० (1) से विशेष समाकल

$$\frac{1}{D^2+a^2}\sec ax = \frac{1}{2ai}\left[e^{iax}\left(x+\frac{i}{a}\log\cos ax\right) - e^{-iax}\left(x - \frac{i}{a}\log\cos a\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[(e^{iax}-e^{-iax})x + \frac{i}{a}\log\cos ax\,(e^{iax}+e^{-iax})\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}x + \frac{1}{a}\log\cos ax\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\right]$$

$$= \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}(\log\cos ax)\cos ax$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $y = C_1\cos ax + C_2\sin ax + \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax\log\cos ax$

4. प्रश्न से $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x\log x$ ...(1)

(1) में $x = e^z$ या $z = \log x$, $\frac{d}{dz} = D$, $x\frac{dy}{dx} = Dy$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

$$\{D(D-1) - D + 2\}y = e^Z z$$

$\Rightarrow$ $\{D^2 - D - D + 2\}y = ze^z$ $\Rightarrow$ $(D^2 - 2D + 2)y = ze^z$ ...(2)

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 - 2m + 2 = 0$

$\Rightarrow$ $m = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2 - 4\times 2\times 1}}{2\times 1}$ [श्रीधराचार्य विधि से]

$$= \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{2}{2}(1\pm\sqrt{-1}) = 1\pm i$$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $y = e^z(C_1\cos z + C_2\sin z)$

विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{1}{f(D)}ze^z = \frac{1}{D^2-2D+2}ze^z$ [समी० (2) से]

$$= e^z\left[\frac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 2}\right]z$$ [$D = D+1$ रखने पर]

$$= e^z\left[\frac{1}{1+D^2}\right]z = e^z[1+D^2]^{-1}z = e^z[1-D^2]z$$ [शेष पद शून्य है]

$$= e^z\,[z - D^2 z] = e^z \times (z - 0) = z\,e^z$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $y = e^z\,(C_1 \cos z + C_2 \sin z) + z\,e^z$

$$= x\,[C_1 \cos(\log x) + C_2 \sin(\log x)] + x \log x$$ [z तथा x का मान रखने पर]

5. दिया गया समीकरण $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$ ...(1)

समी० (1) में $x = e^z$ से जिससे $x\dfrac{dy}{dx} = Dy,\ x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)\,y$

$$\{D(D-1) - 3D + 4\}\,y = 2e^{2z}$$

$\Rightarrow$ $\{D^2 - D - 3D + 4\}\,y = 2e^{2z}$ $\qquad \Rightarrow \quad (D^2 - 4D + 4) = 2e^{2z}$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 - 4m + 4 = 0$

$\Rightarrow$ $(m-2)^2 = 0 \ \Rightarrow\ m = 2, 2$ $\qquad \therefore$ C.F. $= (C_1 + C_2 z)\,e^{2z}$ ...(2)

P.I. $= \dfrac{X}{f(D)} = \dfrac{2e^{2z}}{D^2 - 4D + 4} = \dfrac{2e^{2z}}{(D-2)^2}$ $\qquad$ किन्तु $D = 2$ पर $f(D) = 0$

$\therefore$ P.I. $= \dfrac{2e^{2z}}{(D+2-2)^2} = 2e^{2z}\,\dfrac{1}{D^2} \times 1 = 2e^{2z} \times \dfrac{1}{D}\int dz$

$$= 2e^{2z} \times \int z\,dz = 2e^{2z} \times \frac{z^2}{2} = z^2 e^{2z} \qquad ...(3)$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $y =$ C.F. + P.F. [(2) + (3)]

i.e., $\quad y = (C_1 + C_2 z)\,e^{2x} + z^2 e^{2z} = (C_1 + C_2 \log x)\,x^2 + (\log x)^2\,x^2$

$\therefore \quad y = [C_1 + C_2 \log x + (\log x)^2]\,x^2$ अभीष्ट हल है।

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^x + \cos x$

i.e., $\quad (D^2 - 2D + 2)\,y = e^x + \cos x$ $\qquad \therefore$ A.E. $m^2 - 2m + 2 = 0$

$\therefore \quad m = -\dfrac{(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 + 2i}{2} = 1 \pm i$

$\therefore$ C.F. $= e^x\,[C_1 \cos x + C_2 \sin x]$

P.I. $= \dfrac{e^x + \cos x}{D^2 - 2D + 2} = \dfrac{e^x}{D^2 - 2D + 2} + \dfrac{\cos x}{D^2 - 2D + 2}$

[प्रथम भाग में $D = 1$, दूसरे भाग में $D^2 = -1$ रखने पर]

$$= \frac{e^x}{1^2 - 2 \times 1 + 2} + \frac{\cos x}{-1^2 - 2D + 2} = e^x + \frac{\cos x}{1 - 2D}$$

$$= e^x + \frac{1 + 2D}{(1 + 2D)(1 - 2D)}\cos x = e^x + \frac{1 + 2D}{1 - 4D^2}\cos x$$

$$= e^x + \frac{\cos x - 2\sin x}{1 + 4}$$ [$\because D^2 = -1$ रखने पर]

$$= e^x + \frac{1}{5}(\cos x - 2\sin x)$$

$\therefore$ C.S. = C.F. + P.I. $= (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\,e^x + e^x + \dfrac{1}{5}(\cos x - 2\sin x)$

7. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 6y = x$ ...(1)

(1) में $x = e^z$ जिससे $\log z = x, \frac{d}{dz} \equiv D$ रखने पर

$\Rightarrow$ $\{D(D-1) - 4D + 6\} y = e^z$

$\{D^2 - D - 4D + 6\} = e^z$ $\Rightarrow$ $(D^2 - 5D + 6)y = e^z$

$\therefore$ A.E. : $m^2 - 5m + 6 = 0$ $\Rightarrow$ $(m-3)(m-2) = 0$

$\Rightarrow$ $m = 2, m = 3$

$\therefore$ C.F. $= C_1 e^{2z} + C_2 e^{3z} = C_1 x^2 + C_2 x^3$ $[\because x = e^z]$

$$\text{P.I.} = \frac{e^z}{D^2 - 5D + 6} = \frac{e^z}{1^2 - 5 \times 1 + 6} = \frac{e^z}{2} = \frac{1}{2} x$$

$\therefore$ C.S. $y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$ *i.e.*, $y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2} x$ [समी० (2) तथा (3) से]

8. दिया गया समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-3x}$

$\therefore$ A.E. : $m^2 + 4m + 3 = 0$ $\Rightarrow$ $(m+1)(m+3) = 0$

$\therefore$ $m = -1, -3$ $\therefore$ $C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$

समी० (1) से विशेष समाकल

$$\frac{e^{-3x}}{D^3 + 4D + 3} = \frac{e^{-3x}}{(D+1)(D+3)} = \frac{e^{-3x}}{(-3+1)(D-3+3)} \times 1 \qquad [\because f(-3) =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-3x} \frac{1}{D} \times 1 = -\frac{1}{2} e^{-3x} \int dx = -\frac{1}{2} e^{-3x} \times x$$

समी० (2) तथा (3) से

$\therefore$ C.S. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2} x e^{-3x}$