अध्याय

9

प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण

(Differential Equations of First Order and First Degree)

9.1 परिभाषायें (Definitions)

1. **अवकल समीकरण (Differential Equation) :** ऐसे समीकरण जो स्वतंत्र चर, स्वतंत्र चर तथा स्वतंत्र चर के सापेक्ष परतंत्र चर के अवकल गुणांकों से सम्बद्ध होते हैं, अवकल समीकरण कहलाते हैं।

   जैसे : $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

2. **अवकल समीकरण की कोटि (Order of a Differential Equations) :** किसी अवकल समीकरण की कोटि (या क्रम) उस समीकरण में उपस्थित महत्तम अवकल गुणांक की कोटि होती है। **[2022(S)]**

3. **अवकल समीकरण की घात (Degree of Differential Equation) :** किसी अवकल समीकरण की घात उसमें उपस्थित उच्चतम कोटि के अवकल गुणांक की घात (Power of the highest derivative) के बराबर होती है, जबकि वह करणी (Radical sign) चिह्न तथा भिन्नात्मक घातों से मुक्त हो। **[2022(S)]**

परीक्षा में पूछे गये एवं अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3} = k\frac{d^2y}{dx^2}$ की घात और कोटि है—

(i) 1, 1 (ii) 2, 1 (iii) 2, 3 (iv) कोई नहीं

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$ का हल है

(a) $xy = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ (b) $y = (c_1 + c_2x)e^{3x}$

(c) $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$ (d) कोई नहीं

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$ के हल का P.I. है।

(a) e^{3x} (b) $\frac{e^{3x}}{36}$ (c) $\frac{e^{-3x}}{36}$ (d) कोई नहीं

4. $(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)y = 0$ का हल है

(a) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}$ (b) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$

(c) $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{3x}$ (d) कोई नही

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. (i) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ को हल करें।

[2004, 05, 21(S), 22(S)]

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ को हल करें। [2022(S)]

(a) अवकल समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3}=K\frac{d^2y}{dx^2}$ की कोटि तथा घात बतायें। [2017, 21(S)]

(b) $\frac{d^2y}{dx^2}-k^2y=0$ की कोटि तथा घात बतायें। [2012]

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ की कोटि तथा घात बतायें। [2011]

यदि $y=e^x\sin x$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान बतायें। [2016, 21(S)]

(i) $(D^3+6D^2+11D+6)\,y=0$ को हल करो। [2019(S)]

(ii) $(1+x)(1-y)\frac{dy}{dx}+xy=0$ को हल करें। [2009]

(a) समीकरण $x=A\cos(nt+\alpha)$ से सरल आवर्त गति का समीकरण ज्ञात करें। [2015]

(b) $ax+by+c=0$ से अवकल समीकरण बनायें।

(c) अवकल समीकरण ज्ञात करो यदि $y=Ae^{2x}+Be^x+C$ जहाँ A, B तथा C अचर हैं। [2018]

(d) $y=A\cos(x)^2+B\sin(x)^2$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात करें। [2014]

(i) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$ को हल करें। [2013]

(ii) $\log\frac{dy}{dx}=ax+by$ को हल करें।

(iii) $x\,dx+y\,dy=\frac{a^2(x\,dy-y\,dx)}{x^2+y^2}$ हल करें। [2014]

(iv) $\frac{dy}{dx}=1+x+y+xy$ [1993, 2008]

(v) $e^y\frac{dy}{dx}=e^x+x^2$ को हल करें। [2007]

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. (a) अवकल समीकरण $y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$ को हल कीजिए। [2022(S)]

(b) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\tan x=y^2\sec x$ को हल कीजिए। [2021(S)]

(c) $\left(\frac{dy}{dx}\right)-y\tan x=e^x$ को हल करो। [2019(S)]

(d) $\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$ को हल करो। [2018(S)]

(e) $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$ को हल करो। [2018(S), 07]

2. (i) हल करे $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy+4x^2=0$ [2016(S

(ii) हल करे $ye^y\ x-(y^3+2xe^y)\ y=0$ [2016(S

(iii) यदि $y=e^{ax}\sin bx$ तो सिद्ध करें $\frac{d^2y}{dx}-2a\frac{dy}{dx}(a^2+b^2)\ y=0$ [201

(iv) हल करे $(a^2-2xy-y^2)\ dx-(x+y)^2\ dy=0$ [201

3. (i) हल करे $x\ dy-y\ dx=\sqrt{x^2+y^2}\ dx$ [201

(ii) हल करे $(1+y^2)\ dx=(\tan^{-1}y-x)\ dy$ [201

4. हल करें : $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x$ [2012, 1

5. (i) हल करे $\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)y=1$ [201

(ii) हल करे $\cos^{-1}\frac{y}{b}=n\log\frac{x}{n}$ तो सिद्ध करें $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+x^2y=0$ [2008, 1

6. (i) हल करे $(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2$ [200

(ii) हल करे $(x-y)^2\frac{dy}{da}=a^2$

7. $(e^y+1)\cos x\ dx+e^y\sin x\ dy=0$ को हल करें। [200

हल एवं संकेत

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. (a) 2. (a) 3. (b) 4. (b)

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. (i) प्रश्न से, $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=1+y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$ [चरों को पृथक् करने पर

दोनों तरफ समाकलन करने पर

$$\int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}y=\tan^{-1}x+c$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}y-\tan^{-1}x=c \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{y-x}{1+xy}=c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-x}{1+xy}=\tan c=\alpha,$$ जहाँ α समाकलन नियतांक है।

$\therefore \quad y-x=\alpha\ (1+xy)$ अभीष्ट हल है।

(ii) $\because \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$

2. (a) दिया गया समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3}=K\frac{d^2y}{dx^2}$

$\Rightarrow \left[\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{2/3}\right]^3 = \left(K\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 \qquad \Rightarrow \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2 = K^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$

उच्चतम कोटि का अवकल गुणांक $\frac{d^2y}{dx^2}$ अतः कोटि $= 2$ घात $= 3$

(b) दिए गए अवकल समीकरण से $\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = 0$

उच्चतम कोटि का अवकल गुणांक $= \frac{d^2y}{dx^2}$ तथा इसकी घात $= 1$ अतः यह द्वितीय कोटि तथा प्रथम घात का समीकरण है।

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ यहाँ कोटि $= 2$, घात $= 1$

. $y = e^x \sin x \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \cos x + e^x \sin x \Rightarrow e^x (\sin x + \cos x)$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\sin x + \cos x)$$

$$= e^x (\cos x - \sin x + \sin x + \cos x)$$

$$= 2e^x \cos x$$

4. (i) दिया गया समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

$\Rightarrow (D^3 + 6D^2 + 11D + 6)\, y = 0 \qquad [\frac{dy}{dx} = Dy, \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$ तथा $\frac{d^3y}{dx^3} = D^3y$ रखने पर]

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.)

$$m^3 + 6m^2 + 11m + 6 = 0$$

$\Rightarrow m^3 + m^2 + 5m^2 + 5m + 6m + 6 = 0 \qquad \Rightarrow m^2 (m+1) + 5m (m+1) + 6 (m+1) = 0$

$\Rightarrow (m+1) \{m^2 + 2m + 3m + 6)\} = 0$

$\Rightarrow (m+1) (m^2 + 5m + 6) = 0$

$\Rightarrow (m+1) (m+2) (m+3) = 0$

$\Rightarrow (m+1) \{m (m+2) + 3 (m+2)\} = 0$

$\Rightarrow \therefore \quad m = -1, -2, -3$

m के ये मान वास्तविक एवं भिन्न हैं

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$

यह अभीष्ट व्यापक हल है।

(ii) प्रश्न से, $(1+x)(1-y)\frac{dy}{dx} = -xy \qquad \Rightarrow \frac{(1-y)}{y} dy = -\frac{x}{1+x} dx$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y}\right) dy = -\left[\frac{1+x-1}{1+x}\right] dx \qquad \Rightarrow \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = -\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy - \int dy = -\left[\int dx - \int \frac{1}{1+x} dx\right]$ [समाकलन करने पर]

$\Rightarrow \log y - y = -[x - \log (1+x)] + c \qquad \Rightarrow \log y - y + x - \log (1+x) = c$

$\Rightarrow \quad x - y + \log \dfrac{y}{1+x} = c$ यह अभीष्ट हल है।

5. (a) $x = A\cos(nt+\alpha) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = -A\sin(nt+\alpha) \times n$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = -An^2\cos(nt+\alpha) \quad i.e., \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = -n^2 A(nt+\alpha) = -n^2 y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} + n^2 y = 0$

(b) $ax + by + C = 0$ के अवकलन से

$$a + b\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

(c) यहाँ

$$y = Ae^{2x} + Be^{x} + C \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) का x का सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + Be^{x} = e^{x}(2Ae^{x} + B)$$

$\therefore$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} = 2Ae^{x} + B \qquad ...(2)$$

पुनः (2) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$-e^{-x}\frac{dy}{dx} + e^{-x}\frac{d^2y}{dx^2} = 2Ae^{x}$$

$i.e., \quad e^{-x}\left(\dfrac{d^y y}{dx^2} - \dfrac{dy'}{dx}\right) = 2Ae^{x} \quad i.e., \quad e^{-2x}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx}\right) - 2A \qquad ...(3)$

समीकरण (3) को x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर,

$$-2e^{2x}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right) + e^{-2x}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$i.e.,$

$$e^{-2x}\left[\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

$i.e.,$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

उत्तर

(d) $y = A\cos(x)^2 + B\sin(x)^2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = -2xA\sin(x)^2 + 2xB\cos(x)^2 \quad ...(1) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 2x[B\cos(x)^2 - A\sin(x)^2] \qquad ...(2)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2[B\cos(x)^2 - A\sin(x)^2] + 2x[-2Bx\sin(x)^2 - 2Ax\cos(x)^2]$

$$= 2[B\cos(x)^2 - A\sin(x)^2] - 4x^2[B\sin(x)^2 + A\cos(x)^2]$$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - 4x^2y$ [(1) तथा (2) से]

$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^2y = 0$

6. (i) प्रश्न से, $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = e^xe^{-y} + x^2e^{-y}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y}(e^x + x^2)$ $\Rightarrow$ $e^y\,dy = (e^x + x^2)\,dx$

$\Rightarrow \int e^y\,dy = \int e^x\,dx + \int x^2\,dx$ $\Rightarrow$ $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$

(ii) $\log\frac{dy}{dx} = ax + by$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = e^{ax+by} = e^{ax}\,.\,e^{by}$

$\Rightarrow e^{ax}dx - e^{-by}dy = 0 \Rightarrow \int e^{ax}\,dx - \int e^{-by}\,dy = 0$

$\Rightarrow \frac{e^{ax}}{a} + \frac{e^{-by}}{b} = K$ $\Rightarrow$ $be^{ax} + ae^{-by} = abK = C$, जहाँ $c = 2K$ समाकलन नियतांक

(iii) $x\,dx + y\,dy = a^2\frac{(x\,dy - y\,dx)}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \int x\,dx + \int y\,dy = a^2\int\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = a^2\tan^{-1}\frac{y}{x} + K$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2a^2\tan^{-1}\frac{y}{x} = 2K = C$, जहाँ $c = 2K$ समाकलन नियतांक

(iv). $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = (1+x) + y\,(1+x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{1+y} = (1+x)\,dx$ [चरों को पृथक् करने पर]

$\Rightarrow \int\frac{dy}{1+y} = \int(1+x)\,dx$

या $\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$, जहाँ c समाकलन नियतांक है। यह अभीष्ट हल है।

(v). प्रश्न से, $e^y\frac{dy}{dx} = e^x + x^2$ $\Rightarrow$ $e^y\,dy = (e^x + x^2)\,dx$

दोनों तरफ समाकलित करने पर.

$\int e^y\,dy = \int(e^x + x^2)\,dx$ या $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$, जहाँ C समाकलन नियतांक है।

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. (a) $y - x\frac{dx}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$ $\Rightarrow$ $y - ay^2 = x\frac{dy}{dx} + a\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow (x+a)\frac{dy}{dx} = y\,(y - ay)$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{y(1-ay)} = \frac{dx}{x+a}$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{y}-\frac{a}{(1-ay)}\right]dy=\frac{1}{x+a}\,dx \qquad \Rightarrow \int\left[\frac{1}{y}-\frac{a}{1-ay}\right]dy-\int\frac{1}{x+a}\,dx=0$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{y}\,dy+\int\frac{(-a)}{1-ay}\,dy-\int\frac{1}{x+a}\,dx=0$$

$$\Rightarrow \log y+\log(1-ay)-\log(x+a)=\log c \text{ (const)}$$

$$\Rightarrow \log\frac{y(1-ay)}{x+a}=\log c \quad \Rightarrow \frac{y(1-ay)}{x+a}=c \quad \Rightarrow y(1-ay)=c\,(x+a)$$

(b) $\frac{dy}{dx}+y\tan x=y^2\sec x$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{y^2}\tan x=\frac{y^2}{y^2}\sec x \qquad \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\times\tan x=\sec x \quad ...(1)$$

माना $\frac{1}{y}=z$ i.e., $y^{-2}\frac{dy}{dx}=-\frac{dz}{dx}$

समी० (1) $-\frac{dz}{dx}+z\tan x=\sec x \quad \Rightarrow \frac{dz}{dx}-z\tan x=-\sec x \quad ...(2)$

(2) एक रेखीय समीकरण है

$$\text{I. F.}=e^{-\int\tan x\,dx}=e^{-\log\sec x}=e^{\log\cos x}=\cos x$$

समी० (1) को दोनो तरफ $\cos x$ से गुणा कर समाकलन करने पर

$$z\times\cos x=-\int\sec x\times\cos x\,dx$$

$$\Rightarrow z\cos x=-\int\frac{1}{\cos x}\times\cos x\,dx \qquad \Rightarrow \frac{1}{y}\cos x=-x+c \qquad \Rightarrow \cos x=-xy+cy$$

(c) $\frac{dy}{dx}-y\tan x=e^x \quad ..(1)$

यहाँ $P=-\tan x, Q=e^x \qquad \therefore$ I. F. $e^{\int P\,dx}=-e^{-\int\tan x\,dx}=e^{\log\cos x}=\cos x$

(1) में $\cos x$ से गुणा कर समाकलन करने पर $y\cos x=\int e^x\cos x dx$

$$I=\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)\,dx \quad ...(2)$$

$$=e^x\cos x+[e^x\sin x-\int e^x\cos x]$$

$$\Rightarrow I=e^x\cos x+e^x\sin x-I+c \qquad \Rightarrow 2I=e^x(\cos x+\sin x)+c$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+c$$

अत: (1) से अभीष्ट हल $y\cos x=\frac{e^x}{2}[\cos x+\sin x] \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{2}e^x[1+\tan x]+c$

(e) दिया गया है, $\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{y}{\cos^2 x}=\frac{\tan x}{\cos^2 x} \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx}+y\sec^2 x=\tan x\sec^2 x \quad ...(1)$$

रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ से तुलना करने पर

$$P=\sec^2 x,\ Q=\tan x\,.\,\sec^2 x$$

$\therefore$ समाकल गुणांक (Integrating factor) $=e^{\int\sec^2 x\,dx}=e^{\tan x}$

समीकरण (1) में $e^{\tan x}$ से गुणा कर समाकलित करने पर

$$y \times e^{\tan x} = \int e^{\tan x} . \tan x \sec^2 x\, dx = \int e^t . t\, dt$$

जहाँ $t = \tan x$ तथा $\sec^2 x\, dx = dt$

$$= e^t (t-1) + c = e^{\tan x} (\tan x - 1) + c \qquad [\because t = \tan x]$$

i.e., $\quad ye^{\tan x} = e^{\tan x} (\tan c - 1) + c$

अतः $\quad y = (\tan x - 1) + ce$ **उत्तर**

या

(f) दिया गया $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin (x+y)$ ...(1)

$x + y = z$, so that $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

इन मानों को (1) में रखने पर

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \sin z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \sin z \Rightarrow \int \frac{1}{1+\sin z} dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1 - \sin z}{(1+\sin z)(1-\sin z)} dz = \int dx \Rightarrow \int \frac{1-\sin z}{1 - \sin^2 z} dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{\cos^2 z} - \frac{\sin z}{\cos^2 z}\right) dz = \int dx \Rightarrow \int \sec^2 z\, dz - \int \sec z . \tan z\, dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \tan z - \sec z = x + c \Rightarrow \tan (x+y) - \sec (x+y) = x + c \quad [\because z = x + y]$$

यह अभीष्ट हल है।

2. **(i)** $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy + 4x^2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2} y = -\frac{4x^2}{1+x^2} \qquad ...(1)$$

या एक रैखिक समीकरण है।

$$\therefore \text{ I.F. } e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{\log (1+x^2)} = 1 + x^2 \qquad [\because e^{\log f(x)} = f(x)]$$

(1) में I.F. से गुणा कर x के सापेक्ष समाकलन से

$$y \times (1+x^2) = -\int \frac{4x^2}{1+x^2} \times (1+x^2)\, dx = -4\int x^2\, dx = -\frac{4}{3}x^3 + C$$

$\therefore$ अतः हल $y = (1+x^2) + \frac{4}{3}x^3 = C$

(ii) दिया गया समीकरण $y\, e^y\, dx = (y^3 + 2x\, e^y)\, dy$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xe^y}{ye^y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = y^2 e^{-y} + \frac{2}{y} x \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} x = y^2 e^{-y} \qquad ...(1)$$

यह $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है।

$$\therefore \text{ I.F. } e^{\int P\, dy} = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2\log y} = e^{\log \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}$$

(1) में दोनों तरफ I.F. से गुणा कर समाकलन करने पर

$$x \times \frac{1}{y^2} = \int y^2 e^{-y} \times \frac{1}{y^2}\, dy = \int e^{-y} dy = -e^{-y} + C$$

$\therefore \quad x = y^2 (e^{-y} + C)$ अभीष्ट हल है।

(iii) समीकरण को x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y = e^{ax} \sin bx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{ax} \frac{d}{dx}(\sin bx) + \sin bx \cdot \frac{d}{dx}(e^{ax})$$

$$= be^{ax} \cos bx + ae^{ax} \sin bx$$

$$= be^{ax} \cos bx + ay \quad \text{...(1)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} - ay = be^{ax} \cos bx \quad \text{...(2)}$$

x के सापेक्ष समी० (1) का पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = b\left[e^{ax} \cdot \frac{d}{dx}(\cos bx) + \cos bx \cdot \frac{d}{dx}(e^{ax})\right] + a\frac{dy}{dx}$$

$$= b[-be^{ax} \sin bx + ae^{ax} \cos bx] + a\frac{dy}{dx}$$

$$= -b^2 e^{ax} \sin bx + a(be^{ax} \cos bx) + a\frac{dy}{dx}$$

$$= -b^2 y + a\left(\frac{dy}{dx} - ay\right) + a\frac{dy}{dx}$$ [$\because$ $y = e^{ax} \sin bx$ तथा समी० (2) से]

$$= 2a\frac{dy}{dx} - (a^2 + b^2) y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2) y = 0$$ सिद्ध हुआ

(iv) $(a^2 - 2xy - y^2)\, dx - (x+y)^2\, dy = 0$

$$(a^2 - 2xy - y^2) - (x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2 - 2xy - y^2$$

$\Rightarrow$ (1) में $x + y = V$ रखने से $\frac{dy}{dx} = \frac{dV}{dx} - 1$ तथा $y = V - x$

$$a^2 - 2x(V-x) - (V-x)^2 = V^2\left(\frac{dV}{dx} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 2Vx + 2x^2 - (V^2 - 2Vx + x^2 - V^2) = V^2 \frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + x^2 = V^2 \frac{dV}{dx} \qquad \Rightarrow \quad (a^2 + x^2)\, dx = V^2\, dV$$

$$\Rightarrow \quad \int (a^2 + x^2)\, dx = \int V^2\, dV \qquad \Rightarrow \quad a^2 x + \frac{x^3}{3} = \frac{V^3}{3} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad 3a^2 x + x^3 = V^3 + 3C_1 \qquad \Rightarrow \quad 3a^2 x + x^3 = (x+y)^3 + C$$

$\Rightarrow \quad 3a^2 x + x^3 - (x+y)^3 = C$ अभीष्ट हल है।

3. (i) दिया गया समीकरण $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

$$\Rightarrow \quad x\, dy = [y + \sqrt{x^2 + y^2}]\, dx \qquad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad \text{...(1)}$$

यह एक समघाती समीकरण है।

अतः $y = Vx$ रखने पर जिससे $\dfrac{dy}{dx} = V + x\dfrac{dV}{dx}$

$\therefore$ (1) से $V + x\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{Vx + \sqrt{x^2 + V^2\, x^2}}{x}$

$\Rightarrow \quad V + x\dfrac{dV}{dx} = V + \sqrt{1+V^2} \qquad \Rightarrow \quad x\dfrac{dV}{dx} = \sqrt{1+V^2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dV}{\sqrt{1+V^2}} = \dfrac{dx}{x} = \int \dfrac{dV}{\sqrt{1+V^2}} = \int \dfrac{dV}{x} \qquad \Rightarrow \quad \log[V + \sqrt{1+V^2}] = \log x + \log C = \log(xc)$

$\Rightarrow \quad V + \sqrt{1+V^2} = xc \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = xc \qquad \left[\because\ y = Vx \Rightarrow V = \dfrac{y}{x}\right]$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = xc \qquad \Rightarrow \quad y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2$ यह अभीष्ट हल है।

(ii) दिया गया समीकरण $(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\tan^{-1} y - x}{1+y^2} \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dy} + \dfrac{x}{1+y^2} = \dfrac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$

यह एक रैखिक समीकरण है, जहाँ

$$P' = \frac{1}{1+y^2}, \quad Q' = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad \left[\frac{dx}{dy} + P'x = Q' \text{ से तुलना करने पर}\right]$$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

समी० (1) में $e^{\tan^{-1} y}$ से गुणा कर समाकलित करने पर

$$xe^{\tan^{-1} y} = \int e^{\tan^{-1} y} \times \tan^{-1} y \times \frac{1}{1+y^2}\,dy = I \quad \text{(माना)} \qquad \ldots(1)$$

जहाँ $I = \int e^{\tan^{-1} y} \tan^{-1} y \times \dfrac{1}{1+y^2}\,dy$

माना $\tan^{-1} y = t$ जिससे $\dfrac{1}{1+y^2}\,dy = dt$

$$\therefore \quad I = \int te^t\,dt = [e^t t - e^t] + C$$

$$= e^t(t-1) + C = e^{\tan^{-1} y}(\tan^{-1} y - 1) + C]$$

अतः समी० (1) से, $\quad xe^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y}(\tan^{-1} y - 1) + C$

$\Rightarrow \quad e^{\tan^{-1} y}(x - \tan^{-1} y + 1) = C$

यह अभीष्ट हल है।

4. प्रश्न से, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x - y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)}{x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ ...(1)

यह समघाती समीकरण है।

अतः समी० (1) में $y = vx$, अर्थात् $v = \dfrac{y}{x}$ तथा $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ रखने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{1 - v\sin v}{\sin v}$$

$\Rightarrow \quad x\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{1 - v\sin v}{\sin v} - v$

$\Rightarrow \quad x\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{1}{\sin v} \quad \Rightarrow \quad \sin v\, dv = -\dfrac{dx}{x}$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \sin v\, dv = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\cos v = -\log x + c$

$\Rightarrow \quad \log x = c + \cos v = \log k + \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$, जहाँ $c = \log k$

$\Rightarrow \quad \log x - \log x = \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \log\dfrac{x}{k} = \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow \quad x = k\,e^{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$ जहाँ अभीष्ट हल है।

5. (i) दिया गया समीकरण $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$ ...(1)

$\dfrac{dy}{dx} + Py = Q \qquad$ जहाँ $P = \dfrac{1-2x}{x^2}, Q = 1$

$\therefore \quad$ I.F. $e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{1-2x}{x^2}dx} = e^{\left[\int \frac{1}{x^2}dx - 2\int \frac{1}{x}dx\right]}$

$$= e^{\int x^{-2}dx} \cdot e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^{-2\log x} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^{\log\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2}$$

(1) में I.F. से गुणा कर समाकलित करने पर

$$\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \times y = \int e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}dx = \int e^{-z}dz, \text{ जहाँ } -\frac{1}{x} = z \text{ जिससे } -\frac{1}{x^2}dx = dz$$

$$= -\frac{e^{-z}}{-1} + K = e^{-z} + K = e^{-\frac{1}{x}} + K$$

i.e., $\quad ye^{-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} + K \Rightarrow y = \dfrac{x^2(e^{-1/x} + K)}{e^{-1/x}} = x^2\left(\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}} + K\,e^{-\frac{1}{x}}\right)$

$\Rightarrow \quad y = x^2(1 + Ke^{1/x})$ जो अभीष्ट हल है।

(ii) यहाँ $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n = n\,[\log x - \log n]$ $\left[\because \log\left(\frac{m}{n}\right)^p = p\,(\log m - \log n)\right]$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन से

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \times \frac{1}{b} y_1 = \frac{n}{x} \Rightarrow -\frac{b}{\sqrt{b^2-y^2}} \times \frac{1}{b} y_1 = \frac{n}{x} \Rightarrow -\frac{y_1}{\sqrt{b^2-y^2}} = \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow -xy_1 = n\sqrt{b^2-y^2} \Rightarrow x^2 y_1^2 = n^2 (b^2-y^2)$$ [वर्ग करने पर]

एक बार पुनः अवकलित करने पर ...(1)

$$x^2\, 2y_1 y_2 + 2xy_1^2 = -2n^2 y\, y_1 \Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 + n^2 y = 0$$

या $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$ सिद्ध हुआ।

6. (i) माना $x + y = z$, तो $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

$$\therefore (x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2 \Rightarrow z^2\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2$$ [दिए गए समीकरण में इन मानों को रखने पर]

$$\Rightarrow z^2 \frac{dz}{dx} = a^2 + z^2 \Rightarrow \frac{z^2}{a^2+z^2} dz = dx$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+z^2-a^2}{a^2+z^2} dz = dx \Rightarrow \left[1 - \frac{a^2}{a^2+z^2}\right] dz = dx$$

$$\Rightarrow \int 1\,dz - a^2 \int \frac{1}{a^2+z^2} dz = \int dx$$ [समाकलन करने पर]

$$\Rightarrow z - a^2 \times \frac{1}{a} \tan^{-1}\frac{z}{a} = x + c \Rightarrow (x+y) - a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right) = x + c$$ $[\because z = x + y]$

यह अभीष्ट हल है।

(ii) $x - y = z$ रखने पर जिससे $1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ *i.e.*, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$

$$z^2\left(1 - \frac{dz}{dx}\right) = a^2 \Rightarrow z^2 - z^2\frac{dz}{dx} = a^2$$

$$\Rightarrow z^2 - a^2 = z^2 \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{z^2}{z^2-a^2} dz = dx \Rightarrow \int \frac{z^2-a^2+a^2}{z^2-a^2} dz = \int dz$$

$$\Rightarrow \int dz + a^2 \int \frac{1}{z^2-a^2} dz = \int dx \Rightarrow z + a^2 \times \frac{1}{2a}\log\frac{z-a}{z+a} = x + C$$

$$\Rightarrow x + y + a\log\frac{x+y-a}{x+y+a} = x + C_1 \Rightarrow y = a\log\frac{x+y-a}{x+y+a} + C$$

7. प्रश्न से, $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$ ...(1)

$x + y = z$, जिससे $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

इन मानों को (1) में रखने पर

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \sin z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \sin z \qquad \Rightarrow \int \frac{1}{1+\sin z}\, dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-\sin z}{(1+\sin z)(1-\sin z)}\, dz = \int dx \qquad \Rightarrow \int \frac{1-\sin z}{1-\sin^2 z}\, dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{\cos^2 z} - \frac{\sin z}{\cos^2 z}\right) dz = \int dx \qquad \Rightarrow \int \sec^2 z\, dz - \int \sec z \,.\, \tan z\, dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \tan z - \sec z = x + c \qquad \Rightarrow \tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c \quad [\because z =$$

यह अभीष्ट हल है।

8. यहाँ $M = (e^y + 1)\cos x$ तथा $N = e^y \sin x$

$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x$ तथा $\frac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x$ अत: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

अत: यह एक यथार्थ समीकरण है।

$\therefore$ अभीष्ट हल $\int\limits_{y \text{ अचर}} M\, dx + \int\limits_{(x \text{ से मुक्त पद})} N\, dy = C$

$$\int (e^y + 1)\cos x\, dx + \int 0 \cdot dy = C \qquad \Rightarrow (e^y + 1)\sin x = C$$

यह अभीष्ट हल है।