अध्याय 16

प्रायिकता (Probability)

16.1 परिभाषा (Definitions)

1. प्रायिकता : किसी घटना E के होने की प्रायिकता E के पक्ष में परिणामों की संख्या तथा कुल संभावित परिणामों की संख्या का अनुपात है।

अत: $$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

2. यदि कोई घटना E, m प्रकार से घटित हो सकती है तथा n प्रकार से नहीं घटित हो सकती है, तो **घटना के घटने की प्रायिकता** $\boldsymbol{P(E) = \frac{m}{m+n} = p}$

घटना के न होने (असफलता) की प्रायिकता $\boldsymbol{P(\bar{E}) = \frac{n}{m+n} = q}$

3. घटना के अनुकूल तथा प्रतिकूल संयोगानुपात (Odds in Favour and Against of an Event) : यदि किसी घटना के घटित होने की स्थितियाँ x तथा नहीं घटित होने की स्थितियाँ y हों तो $x:y$ को अनुकूल संयोगानुपात तथा $y:x$ को प्रतिकूल संयोगानुपात कहते हैं।

4. स्वतंत्र घटनायें (Independent Events) : दो या दो से अधिक घटनायें परस्पर स्वतंत्र कही जाती हैं, यदि एक घटना के घटित होने से दूसरे के घटने या नहीं घटने पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। जैसे : दो पासों को एक बार फेंकने पर एक पर 2 आना, तथा दूसरे पर 6 आना परस्पर स्वतंत्र घटनायें हैं।

5. परतंत्र घटना (Dependent Event) : यदि एक घटना के घटना या न घटना दूसरी घटना को प्रभावित करता है तो यह परतंत्र घटना कहलाती है।

6. परस्पर अपवर्जी घटना (Mutually Exclusive Event) : यदि एक घटना के घटित होने से दूसरी घटना घटित न हो, तो ये घटनायें परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं।

जैसे : किसी सिक्के को उछालने पर शीर्ष आता है तो पूँछ नहीं आता। इन दोनों में से कोई एक ही घटना एक बार में घटित हो सकती है। अत: ये घटनायें परस्प अपवर्जी हैं।

7. योग नियम (Addition Law) :

(i) यदि A तथा B **परस्पर अपवर्जी घटनायें** हैं तो किसी एक के घटने की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A) \text{ या } P(B) = P(A) + P(B)$$

(ii) यदि दो घटनायें A तथा B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं, तो A अथवा B अथवा दोनों के घटित होने की प्रायिकता

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

8. गुणन नियम (Law of Multiplication) : यदि A तथा B परस्पर स्वतंत्र घटनाये है तब $P(A \cap B) = P(A \text{ तथा } B) = P(A).P(B)$

9. प्रायिकता के गुण : प्रायिकता के निम्नलिखित गुण है—

(i) $0 \le P(E) \le 1$ अर्थात् किसी घटना की प्रायिकता शून्य तथा 1 के मध्य होती है।

(ii) $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

(iii) $P(\phi) = 0$ अर्थात् असम्भव घटना की प्रायिकता शून्य होती है।

(iv) $P(S) = 1$ अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि की प्रायिकता 1 होती है।

परीक्षा में पूछे गए एवं अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

असंभव घटना की प्रायिकता होती है।

(a) 0 (b) 1 (c) $0 \le p \le 1$ (d) कोई नहीं

किसी थैले से जिसमें 4 लाल तथा 3 काली गेंदे हैं, एवं गेंद यादृच्छिक रूप से निकाले जाने पर उसके काली होने की प्रायिकता

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{3}{7}$ (d) कोई नहीं

किसी लीप इयर में 53 रविवार होने की प्रायिकता

(a) $\frac{2}{7}$ (b) $\frac{2}{53}$ (c) $\frac{3}{53}$ (d) कोई नहीं

. तास के 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाले जाने पर उसके लाल होने की प्रायिकता

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{26}$ (d) कोई नहीं

. तास के 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से खींचे जाने पर उसके काला बादशाह होने की प्रायिकता

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{26}$ (d) कोई नहीं

. एक पासे को फैकने पर ऊपर विषम संख्या आने की प्रायिकता है

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) कोई नहीं

. एक पासे को फैकने पर ऊपर सम संख्या आने की प्रायिकता

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) कोई नहीं

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. (a) लाटरी के 1000 टिकट बेचे गये उन टिकटों में 5 इनाम है यदि एक आदमी ने एक टिकट खरीदा तो प्रायिकता ज्ञात करो कि वह आदमी इनाम जीते। **[2018(S)]**

   (b) एक थैले में 3 लाल तथा 5 हरी गेंदे हैं। एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **[2016]**

2. (i) यदि किसी लीप वर्ष (Leap year) को यादृच्छया चुन लिया जाता है तो उस वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[2004, 07, 09, 13]**

   (ii) एक सामान्य वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

3. एक पासे की फेंक में 6 मिलने की प्रायिकता क्या है? **[2012]**

4. (i) एक पासे की फेंक में 5 आने की प्रायिकता क्या है। **[2011]**

   (ii) एक पासे की फेंक में 3 से बड़ा अंक प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

5. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद और 7 काली गेदें हैं। 2 गेंद निकालने पर प्रायिकता क्या होगी कि गेंद सफेद और काली हो? **[2010]**

6. एक थैले में 6 लाल तथा 3 काली गेंदे हैं। एक काली गेंद के यादृच्छया निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[2004, 07]**

7. यदि 52 ताश की गड्डी में से एक ताश खींचा जाए तो उसके इक्का या हुक्म का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[2002]**

8. दो पासे के फेंकने में दोनों पासों पर आये अंकों का योग 9 आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

✍ लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. एक थैले में तीन लाल, सात सफेद और चार काली गेंदे हैं। यदि तीन गेंदें निकाली जाएं तो उनके एक ही रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[2001, 18(SB)]**

2. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद और 7 काली गैंदें हैं। 2 गेंद निकालने पर प्रायिकता क्या होगी कि गेंद सफेद और काली हो? **[2010]**

3. क्रमिक रूप में दो बार ताश की गड्डी से पत्ता खींचने पर, बादशाह प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जबकि खींचे गए पत्ते पुन: गड्डी में नहीं रखे जाते। **[2006]**

4. एक घुड़दौड़ में भाग लेने वाले तीन घोड़ों के अनुकूल संयोगानुपात 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 हैं। इन तीन घोड़ों में किसी एक के विजयी होने की प्रायिकता बतायें। **[2003]**

5. एक साथ तीन पासे फेंके गए हैं। इन तीनों के अंकों का योग 15 से अधिक आए, इसकी प्रायकिता ज्ञात कीजिए। **[1997]**

6. (i) एक थैले में 4 सफेद तथा 6 काली गेंदें हैं। इनमें से उत्तरोत्तर 2 सफेद गेंदों के निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें जबकि पहली बार निकाली हुई गेंद फिर थैले में नहीं रखी जाती।

(ii) ताश के 52 पत्तों में से 2 पत्ते निकाले गए हैं। एक के राजा तथा दूसरे के रानी होने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[1994]**

7. यदि पाँच व्यक्तियों A, B, C, D, E में से किसी कमेटी में तीन चुने जाते हैं तो

(i) A तथा B दोनों के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(ii) A के न चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

8. एक सुडौल सिक्का तीन बार उछाला जाता है, प्रायिकता ज्ञात करें।

(i) तीनों बार Head (H) प्राप्त हो (ii) दो बार Head (H) तथा एक बार Tail (T) प्राप्त हो

(iii) एक बार Head (H) तथा दो बार Tail (T) प्राप्त हो

हल एवं संकेत

✍ वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. (a) **2.** (c) **3.** (a) **4.** (b) **5.** (c) **6.** (c) **7.** (c)

✍ अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. (a) माना टिकट बेचे जाने की घटना S

$\therefore \quad n(S) = 1000$

इनाम जीतने की घटना E

तो $\quad n(E) = 5$

$\therefore \quad P(E) =$ इनाम जीतने की प्रायिकता $= \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{5}{1000} = \dfrac{1}{200}$

(b) कुल गेंद $= 3 + 5 = 8$

निकाली गई गेंद किसी भी रंग की हो सकती है $\therefore \quad n(S) = 8$

लाल गेंद की संख्या $n(E) = 3 \quad \therefore \quad p(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{3}{8}$

2. **(i)** लीप वर्ष में दिनों की संख्या $= 366$

तथा लीप वर्ष में सप्ताह की संख्या $= \dfrac{366}{7} = 52$ सप्ताह 2 दिन।

अत: 52 सप्ताह में 52 रविवार होंगे।

शेष दो दिनों को निम्न रूप में सजाया जा सकता है—

(i) रविवार व सोमवार, (ii) सोमवार एवं मंगलवार, (iii) मंगलवार व बुधवार, (iv) बुधवार व बृहस्पतिवार, (v) बृहस्पतिवार एवं शुक्रवार, (vi) शुक्रवार एवं शनिवार, (vii) **शनिवार एवं रविवार**

अत: संभव परिणामों की संख्या $= 7 = n(S)$
घटना में अनुकूल परिणामों की संख्या $= 2 = n(E)$
अत: 53 रविवार होने की प्रायिकता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{7}$ उत्तर

(ii) एक समान्य वर्ष में 365 दिन होते हैं।

$\therefore$ वर्ष में सप्ताह एक दिन की संख्या $= \frac{365}{7} = 52$ सप्ताह 1 दिन

अत: 52 रविवार निश्चित रूप से होंगे।
शेष 1 दिन
(i) रविवार (ii) सोमवार (iii) मंगलवार (iv) बुधवार (v) बृहस्पतिवार (vi) शुक्रवार (vii) शनिवार
अत: रविवार होने की घटना के लिए $m(E) = 1$
तथा प्रतिदर्श समष्टि S के लिए $n(S) = 7$ $\therefore$ 53 के रविवार होने की प्रायिकता $= \frac{1}{7}$

3. अनुकूल घटना $= 1$
कुल घटनायें $= 6$ $\therefore$ 6 आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

4. (i) कुल घटनायें : 6
अनुकूल घटनायें : 1 $\therefore$ 5 आने की प्रायिकता $= \frac{\text{अनुकूलता}}{\text{कुल घVना}} = \frac{1}{6}$

(ii) S = प्रतिदर्श समुच्य $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
तथा अनुकूल घटनाओं का समुच्चय $E = \{4, 5, 6\}$
$\therefore$ $p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $n = (E) = 3$

5. कुल गेंदों की संख्या $= 3 + 6 + 7 = 16$
16 गेंदों में से 2 गेंद चुनने का ढंग $= {}^{16}C_2$
2 चुने हुए गेंदों में से एक सफेद तथा दूसरी काली होगी।
अत: 6 सफेद गेंदों में 1 चुनने का ढंग $= {}^{6}C_1$
7 काली गेंदों में 1 चुनने का ढंग $= {}^{7}C_1$
अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^{6}C_1 \times {}^{7}C_1}{{}^{16}C_2} = \frac{6 \times 7}{\frac{16 \times 15}{2 \times 1}} = \frac{7}{20}$ उत्तर

6. कुल गेंदों की संख्या $= 6 + 3 = 9$
9 गेदों में से 1 गेंद निकालने की कुल विधि $n(S) = {}^{9}C_1 = 9$
3 काली गेंदों में से 1 काली गेंद निकालने की कुल विधि $n(E) = {}^{3}C_1 = 3$
$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

7. $n(S) = 52$ तास के पतों से 1 पत्ता निकालने की कुल विधि $= {}^{52}C_1 = 52$
अनुकूल परिस्थितियाँ $= 13$ हुकुम के पत्ते इक्का के साथ $+3$ अन्य इक्के में $= 16$
अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

8. दो पासें के फेंकने पर गिरने का कुल ढंग $= 6 \times 6 = 36$
पासों पर योग 9 प्राप्त करने के ढंग $= \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$
$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. गेंदों की कुल संख्या $= 3+7+4 = 14$
माना गेंद निकालने की घटना E, लाल गेंद निकालने की घटना R, सफेद की W तथा काली की B से दी जाए तो ये घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं क्योंकि एक के घटित होने से दूसरा घटित नहीं होगा।
अत: $P(E) = P(R) + P(W) + P(B)$
अब, $n(S) = {}^{14}C_3 = \dfrac{14\times13\times12}{3\times2\times1} = 364$ [$\because$ n वस्तुओं में r को चुनने का ढंग $= {}^nC_r$]

$$P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{{}^3C_3}{364} = \frac{1}{364}$$

$$P(W) = \frac{n(W)}{n(S)} = \frac{{}^7C_3}{364} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1\times364} = \frac{35}{364}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{364} \quad \therefore \quad P(E) = \frac{1}{364} + \frac{35}{364} + \frac{4}{364} = \frac{40}{364} = \frac{10}{91}$$ उत्तर

2. कुल गेंदों की संख्या $= 3+6+7 = 16$
16 गेंदों में से 2 गेंद चुनने का ढंग $= {}^{16}C_2$
2 चुने हुए गेंदों में से एक सफेद तथा दूसरी काली होगी।
अत: 6 सफेद गेंदों में 1 चुनने का ढंग $= {}^6C_1$
7 काली गेंदों में 1 चुनने का ढंग $= {}^7C_1$
अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^6C_1 \times {}^7C_1}{{}^{16}C_2} = \dfrac{6\times7}{\frac{16\times15}{2\times1}} = \dfrac{7}{20}$ उत्तर

3. यदि प्रथम बार बादशाह प्राप्त करने की घटना E_1 तथा दूसरी बार बादशाह प्राप्त करने की घटना E_2 हो तो
52 पत्तों में से एक पत्ता निकालने का ढंग $= {}^{52}C_1 = 52$
तथा 4 बादशाहों में से एक बादशाह निकालने का ढंग $= {}^4C_1 = 4$ $\therefore$ $P(E_1) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
चूँकि निकाला गया कार्ड पुन: गड्डी में नहीं रखा जाता।
अत: गड्डी में 51 पत्ते हैं, जिनमें 3 बादशाह हैं। $\therefore$ $P(E_2) = \dfrac{{}^3C_1}{{}^{51}C_1} = \dfrac{3}{51} = \dfrac{1}{17}$
E_1 तथा E_2 दोनों स्वतंत्र घटनायें हैं, अत: अभीष्ट प्रायिकता $P(E) = P(E_1).P(E_2) = \dfrac{1}{13}\times\dfrac{1}{17} = \dfrac{1}{221}$

4. पहले घोड़े का अनुकूल संयोगानुपात $= 1:2$
$\therefore$ अत: उसके जीतने की प्रायिकता $p_1 = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$
दूसरे घोड़ के अनुकूल संयोगानुपात $= 1:3$
$\therefore$ उसके जीतने की प्रायिकता $p_2 = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$
तीसरे घोड़े के अनुकूल संयोगानुपात $= 1:4$
$\therefore$ उसके जीतने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{1+4} = \dfrac{1}{5}$
किंतु कोई एक घोड़ा ही जीत सकता है, अत: ये परस्पर अपवर्जी घटनायें हैं।
$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= p_1 + p_2 + p_3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{47}{60}$ उत्तर

5. तीन पासों की फेंकने पर गिरने का कुल ढंग $= 6\times6\times6 = 216 = n(S)$
तीन पासों पर योग 15 से अधिक 16, 17 या 18 आ सकता है।

अब (i) अंकों का योग 16 निम्न रूप में सम्भव है—
{6, 6, 4), (6, 5, 5) (6, 4, 6), (5, 6, 5), (5, 5, 6), (4, 6, 6)}
कुल 6 ढंग $= n(E)$ $\quad\therefore\quad P(16) = \dfrac{n(E_1)}{n(S)} = \dfrac{6}{216}$

(ii) अंकों का योग 17 निम्न रूप में संभव है—
(6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6) कुल ढंग $= 3 = n(E)$ $\quad\therefore\quad P(17) = \dfrac{n(E_2)}{n(S)} = \dfrac{3}{216}$

(iii) 18 आने का ढंग
(6, 6, 6), कुल ढंग $= 1$ $\quad\therefore\quad P(18) = 1/216$
ये तीनों घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं।
$\therefore$ योग 15 से अधिक आने की प्रायिकता $P(E) = P(16) + P(17) + P(18)$

$$= \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

उत्तर

6. **(i)** कुल गेंदों की संख्या $= 4 + 6 = 10$

पहली बार सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \dfrac{{}^4C_1}{{}^{10}C_1} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ उत्तर

अब दूसरी बार में सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता, जब निकाली गई गेंद थैले में वापस नहीं रखी जाती।
बची हुई सफेद गेंद $= 3$, कुल गेंद $= 9$
$\therefore$ दूसरी सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \dfrac{{}^3C_1}{{}^9C_1} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

ये दोनों स्वतंत्र घटनायें हैं।
$\therefore$ दी गई स्थितियों में दो सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{15}$ उत्तर

(ii) 52 पत्ते से 2 पत्ते निकालने की कुल विधि $n(S) = {}^{52}C_2$
पत्तों के 4 राजाओं में से 1 चुनने की कुल विधि $= {}^4C_1 = 4$
4 रानियों में से 1 चुनने की कुल विधि $= {}^4C_1 = 4$
$\therefore$ $n(E) = 1$ राजा तथा 1 रानी के चुनाव की कुल विधि $= 4 \times 4 = 16$
$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{16}{{}^{52}C_2} = \dfrac{16 \times 2}{52 \times 51} = \dfrac{8}{663}$

7. पाँच व्यक्तियों में से तीन व्यक्तियों को चुनने का ढंग $= {}^5C_3 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 = n(S)$

(i) यदि A तथा B को अवश्य चुनना है तो शेष तीन व्यक्तियों में एक को चुनने का ढंग $n(E_1) = {}^3C_1 = 3$
अत: 5 में से 3 व्यक्तियों को चुनने की प्रायिकता जिसमें A तथा B अवश्य हों

$$P(E) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

उत्तर

(ii) यदि A को नही चुनना है, तो शेष चार व्यक्तियों में से तीन को चुनने का ढंग $= {}^4C_3 = 4$
अत: A के न चुने जाने की प्रायिकता $= 4/10$ उत्तर

8. एक सिक्के को तीन बार या तीन सिक्कों को एक बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि
$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ $\quad\therefore\quad n(S) = 8$
(i) तीन र्ष एक प्रकार से प्राप्त होते हैं। अत: तीनों बार शीर्ष की प्रायिकता $= 1/8$
(ii) दो बार Head तथा एक बार Tail तीन ढंग से प्राप्त होता है।
अत: दो Head आने की प्रायिकता $= 3/8$
(iii) एक बार Head तथा 2 बार Tail तीन प्रकार से प्राप्त होता है।
अत: दो Head आने की प्रायिकता $= 3/8$

❑❑❑