अध्याय

15

बीटा तथा गामा फलन (Beeta and Gamma Functions)

15.1 बीटा फलन या आयलर का प्रथम समाकल (Beta Function or Euler's First Integral)

निश्चित समाकल $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$, जहाँ $m > 0, n > 0$ को बीटा फलन कहते हैं तथा इसे $B(m, n)$ या $\beta(m, n)$ (बीटा m, n) से निरूपित किया जाता है।

अत $\boldsymbol{B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx}$, जहाँ $\boldsymbol{m > 0, n > 0}$

15.2 गामा फलन या आयलर का द्वितीय समाकल (Gamma Functions or Euler's Second Integral)

निश्चित समाकल $\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx; n > 0$ को गामा फलन कहते हैं। इसे Γn (गामा n) से सूचित किया जाता है। अत: $\boldsymbol{\Gamma n = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx}$ **[2019(S)]**

15. 3 परिभाषा पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Important Properties Based on Definitions)

1. **(i)** $\boldsymbol{\Gamma 1 = 1}$ **(ii)** **(a)** $\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n\,\Gamma n, n > 0}$ **(b)** $\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!}$ **धनात्मक पूर्णांक है।**

2. **(i)** $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta, \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma m \Gamma n}{2\Gamma(m+n)}$$

(ii) $$\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\frac{p+q+2}{2}}$$

[2006]

3. यदि n धन पूर्णांक है, तो

(i) $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ $(0 < n < 1)$ (ii) $\Gamma(1-n)\Gamma(1+n) = \dfrac{n\pi}{\sin n\pi}$ $(0 < n < 1)$

4. **द्विगुणन सूत्र : (i)** $$\Gamma m\, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m)$$

(ii) $$\Gamma\frac{1}{n}.\Gamma\frac{2}{n}.\Gamma\frac{3}{n}\Gamma\frac{4}{n}\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1/2}}$$

5. (i) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ky} y^{n-1} dy = \frac{\Gamma n}{k^n}$ (ii) $\displaystyle\Gamma n = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$

6. (i) $$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

(ii) $\beta(m, n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$

परीक्षा में पूछे गए एवं अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान है—

(a) 2π (b) $\sqrt{\pi}$ (c) $-2\sqrt{\pi}$ (d) कोई नहीं

2. यदि $m > 0, n > 0$ तो $\beta(m, n) =$

(a) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ (b) $\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n+1}dx$

(c) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx$ (d) कोई नहीं

3. यदि $m > 0, n > 0$ तो $B(m, n) =$

(a) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$ (b) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m-n}}dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$ (d) कोई नहीं

4. $\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta . \cos^q \theta \, d\theta =$

(a) $\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$ (b) $\frac{\Gamma p}{2\Gamma(p+q)}$

(c) $\frac{\Gamma(p-1)\,\Gamma(q-1)}{2\Gamma(p+q-1)}$ (d) कोई नहीं

5. यदि $n > 0$ तो $\Gamma n =$

(a) $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ (b) $\int_0^\infty e^{x}x^{n-1}dx$ (c) $\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx$ (d) कोई नहीं

6. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो $\Gamma(n+1) =$

(a) $\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma 1}$ (b) $n!$ (c) $n\Gamma(n+1)$ (d) कोई नहीं

7. $\Gamma 1 =$

(a) 0 (b) 1 (c) $\pi / 2$ (d) कोई नहीं

8. यदि $0 < n < 1$ तो $\Gamma n \, \Gamma(1-n)$

(a) $\frac{\pi}{\sin n\pi}$ (b) $\frac{1}{\sin n\pi}$

(c) π (d) कोई नहीं

9. $\beta(m, n) =$

(a) $\frac{\Gamma m \, \Gamma n}{\Gamma(m+n)}$ (b) $\frac{\Gamma mn}{\Gamma(m+n)}$ (c) $\frac{n \, \Gamma m}{m+n}$ (d) कोई नहीं

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. सिद्ध करें—

(i) $\Gamma n \, \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ (ii) $\Gamma(1-n)\,\Gamma(1+n) = \frac{n\pi}{\sin n\pi}$ (iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ **[2022(S)]**

2. दिखायें $\beta(m, n) = \beta(n, m)$ या β फलन सममित होते है। **[2022(S)]**

3. (i) Γn को परिभाषित करें। [2011]
(ii) β फलन को परिभाषित करें।

4. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ [2014, 18, 21(S)]

5. $\Gamma\left(\frac{-5}{2}\right)$ [2015]

6. सिद्ध करें $\frac{\beta(m, n+1)}{n} = \frac{\beta(m, n)}{m+n}$

7. $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$ का मान ज्ञात करें।

8. सिद्ध करें $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ [2006]

9. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ का मान ज्ञात करें। [2004]

✍ लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. (i) $\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{1/2} (\cos\theta)^{-1/2} d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए। [2018(SB)]

(ii) सिद्ध कीजिये कि $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cot\theta)}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2. $\int_0^1 x^6 (1-x)^7$ का मान ज्ञात कीजिए। [2017]

3. सिद्ध कीजिए $\beta(m,n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$, $m, n > 0$ [2016]

4. मान बतायें $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$ [2015]

5. मान बतायें $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6} dx$ [2014, 15]

6. मान बतायें $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$ [2013]

हल एवं संकेत

✍ वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. (c) 2. (a) 3. (a) 4. (a) 5. (a) 6. (b) 7. (b) 8. (a)
9. (a)

✍ अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. **(i)** हम जानते हैं कि $\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$

या $$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \quad \ldots(1)$$

अब समी॰ (1) में $m+n=1$ या $m=1-n$ रखने पर

$\dfrac{\Gamma(1-n)\,\Gamma n}{\Gamma 1} = \int_0^\infty \dfrac{x^{n-1}}{(1+x)^1}$, जहाँ $0 < n < 1$ $[\because m > 0 \Rightarrow 1-n > 0 \Rightarrow n < 1$ तथा $\Gamma 1 = 1]$

या $\Gamma n\,\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ $\left[\because \int_0^\infty \dfrac{x^{n-1}}{1+x}dx = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}\right]$ ...(2) सिद्ध हुआ।

(ii) $\Gamma(1-n)\,\Gamma n = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ ...(1)

समी० (1) में दोनों तरफ n से गुणा करने पर $\Gamma(1-n)\,n\,\Gamma n = \dfrac{n\pi}{\sin n\pi}$ $[\because n\Gamma n = \Gamma(n+1)]$

या $\Gamma(1-n)\,\Gamma(1+n) = \dfrac{n\pi}{\sin n\pi}$, $0 < n < 1$ सिद्ध हुआ।

(iii) $\therefore$ $\Gamma(1-n)\,\Gamma n = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$

$n = \dfrac{1}{2}$ रखने पर $\Gamma\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/2)}$ $i.e.,$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \pi$ $\therefore$ $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2. परिभाषा से $B(m\,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$= \int_0^1 (1-x)^{m-1}[1-(1-x)]^{n-1}\,dx$ $[\because \int_0^a f(x)\,dx = {}_0^a f(a-x)\,dx]$

$= \int_0^1 (1-x)^{m-1}x^{n-1}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx = B(n, m)$ [परिभाषा से]

$\therefore$ $B(m, n) = B(n, m)$ सिद्ध हुआ।

3. (i) निश्चित समाकल $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ जहाँ $x > 0$ को n के गामा फलन कहते हैं।

अतः $\Gamma n = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$

(ii) देखें परिभाषा 15.1।

4. सूत्र से $\Gamma(n) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{n}$

अतः $n = -\dfrac{1}{2}$ रखने पर

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$ उत्तर

5. $\because$ $\Gamma n\,\Gamma 1-n = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ $\therefore$ $\Gamma\dfrac{-5}{2}\Gamma\left(1-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin\left(-\dfrac{5}{2}\pi\right)}$

$\Rightarrow$ $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right)\Gamma\dfrac{7}{2} = \dfrac{\pi}{-\sin\dfrac{5}{2}\pi}$ $\Rightarrow$ $\Gamma\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)} \times \dfrac{1}{\Gamma\dfrac{7}{2}}$

$$= -\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}} = \frac{-8\sqrt{\pi}}{15}$$

6. $\dfrac{B(m, n+1)}{n} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\times n}{(m+n)\,\Gamma(m+n)}$

$$= \frac{1}{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{B\,(m,\,n)}{m+n} \qquad \ldots(1)$$

तथा $$\frac{B\,(m+1,\,n)}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} = \frac{1}{m}\,\frac{m\Gamma m\;\Gamma n}{(m+n)\,\Gamma(m+n)}$$

$$= \frac{1}{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{B\,(m,n)}{m+n} \qquad \ldots(2)$$

अतः (1) तथा (2) से, $\dfrac{B\,(m,\,n+1)}{n} = \dfrac{B(m+1,\,n)}{m} = \dfrac{B(m,\,n)}{m+n}$ उत्तर

$\int_0^\infty x^5\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{6-1}\, dx = \Gamma 6 = 5! = 120$

हम जानते हैं कि $\beta\,(m,\,n) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$

या $$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx \qquad \ldots(1)$$

अब समी० (1) में $m+n=1$ या $m = 1-n$ रखने पर

$$\frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma n}{\Gamma 1} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^1},\ \text{जहाँ } 0<n<1 \qquad [\because m>0 \Rightarrow 1-n>0 \Rightarrow n<1 \text{ तथा } \Gamma 1 = 1]$$

या $$\Gamma n\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \qquad \left[\because \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right] \qquad \ldots(2) \text{ सिद्ध हुआ।}$$

$$\therefore \quad \Gamma n\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$$\therefore \quad \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left[1-\left(-\frac{5}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right)} = \frac{-\pi}{\sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right)} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$$

$$\left[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta;\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1\right]$$

या $$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{\pi}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$ उत्तर

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. (i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta\cos^{-1/2}\theta\, d\theta$

$$= \frac{\Gamma\left[\frac{(1/2)+1}{2}\right]\Gamma\left[\frac{(-1/2)+1}{2}\right]}{2\Gamma\left[\frac{(1/2)+(-1/2)+2}{2}\right]} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \left\{\because \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right\}$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cot\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left[\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\tan\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta \cos^{-1/2}\theta\, d\theta$

अब (i) की तरह हल करें।

2. दिया गया समाकलन $\int_0^1 x^6 (1-x)^7$

सूत्र से $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$

$m - 1 = 6 \Rightarrow m = 7$ तथा $n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$

$\left[\beta(m, n) = \frac{\Gamma m\, \Gamma n}{\Gamma m+n}\right]$

$\therefore \quad \beta(7, 8) = \int_0^1 x^6 (1-x)^7\, dx$

$= \frac{\Gamma 7\, \Gamma 8}{\Gamma(7+8)} = \frac{\Gamma 7\, \Gamma 8}{\Gamma 15} = \frac{6! \times 7!}{14!}$

$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \Gamma 7}{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \Gamma 7} = \frac{1}{24024}$

3. हम जानते हैं कि $B(m+1, n) = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+1+n)}$ ...(1)

तथा $B(m, n+1) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}$ ...(2)

समी० (1) और (2) को जोड़ने पर,

$B(m+1, n) + B(m, n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n) + \Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}$

$= \frac{m\Gamma(m)\Gamma(n) + \Gamma(m).\,n\Gamma(n)}{(m+n)\,\Gamma(m+n)}$ $[\because \Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma\alpha]$

$= \frac{(m+n)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{(m+n)\,\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \beta(m, n)$ सिद्ध हुआ।

4. दिया गया समाकलन $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\, dx$ हो ...(1)

(1) में $x = 2\sin^2\theta$ रखने पर जिससे $dx = 4\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

तथा $x = 0 \Rightarrow 2\sin^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$x = 2 \Rightarrow 2\sin^2\theta = 2 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad I = \int_0^{\pi} \frac{(2\sin^2\theta)^2 .4\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin^2\theta}}$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^4\theta\,.\,4\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} = \frac{16}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\cos\theta\, d\theta$

$= 8\sqrt{2} \times \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5+1-2}{2}\right)} = 8\sqrt{2}\,\frac{\Gamma 3\,\Gamma 1}{\Gamma 2} = 8\sqrt{2} \times 2 = 16\sqrt{2}$

माना $$I = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx \qquad \ldots(1)$$

(1) में $x^6 = y$ i.e., $x = y^{1/6}$ रखने पर $dx = \frac{1}{6}y^{-5/6}\,dy$ तथा $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$$x = \infty \quad \Rightarrow \quad y = \infty$$

$$I = \int_0^\infty \frac{y^{1/6}}{1+y} \times \frac{1}{6}y^{-5/6}\,dy = \int_0^\infty \frac{y^{-2/3}}{1+y}\,dy = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{3}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}\,dy$$

$$= \frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}\frac{\Gamma\frac{1}{3}\Gamma\frac{2}{3}}{\Gamma\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}\frac{\Gamma\frac{1}{3}\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma 1} = \frac{1}{6}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} \qquad \left[\because \Gamma n\,\Gamma 1-n = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\pi$$

. दिये हुये समाकल में $x^n = t$, $x = t^{1/n}$ और $dx = \left(\frac{1}{n}\right)t^{(1-n)/n}dt$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \int_0^1 \frac{(1/n)\,t^{(1-n)/n}}{(1-t)^{1/2}}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{(1/n)-1}(1-t)^{(-1/2)}\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,dt = \frac{1}{n}.\Gamma\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \qquad \left[\because \beta(p, q) = \frac{\Gamma p\Gamma q}{\Gamma(p+q)}\right]$$

$$= \frac{1}{n}.\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \qquad \left[\because \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$$

□□□