अध्याय

14

फोरियर श्रेणी
(Fourier Series)

14.1 आवर्ती फलन (Periodic Function)

यदि कोई फलन $y = f(x)$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए इस प्रकार परिभाषित हो कि

$$f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \ldots\ldots = f(x)$$

जहाँ T, अशून्य वास्तविक संख्या है तो $f(x)$ को **आवर्ती फलन** तथा T को उसका आवर्त (period) कहते हैं।

जैसे : $\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \sin(x+6\pi) = \ldots\ldots$

अत: $\sin x$ एक आवर्ती का फलन है तथा इसका आवर्त 2π है।

14.1.1 फोरियर श्रेणी (Fourier Series)

यदि $f(x)$ कोई फलन हो तथा उसे किसी कोण तथा उसके गुणजों के ज्या (sines) तथा कोज्या (cosines) से बनी श्रेणी के रूप में निम्नतम व्यक्त किया जाए

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ or } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

जहाँ a_0, a_n तथा b_n फोरियर गुणांक हैं, तो यह श्रेणी फोरियर श्रेणी कहलाती है।

14.1.2 फलन $f(x)$ के लिए फोरियर गुणांक का मान

(i) यदि फलन अंतराल $0 \le x \le 2\pi$ में परिभाषित हो, तो

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx]\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

(ii) यदि फलन अंतराल $-\pi \le x \le \pi$ अर्थात् $[-\pi, \pi]$ में परिभाषित हो, तो

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

14.2 फोरियर श्रेणी के लिए डिरिचलेट प्रतिबन्ध (Dirichlet's Conditions for a Fourier Series)

किसी फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ के निम्न प्रतिबंधों, जिन्हें **डिरिचलेट प्रतिबन्ध** के नाम से जाना जाता है, को संतुष्ट करना आवश्यक है :

फलन $f(x)$ अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में

(i) आवर्ती फलन है।

(ii) इसके समाकल एकमानी (single valued) तथा परिमित (finite) है।

(iii) परिबद्ध (bounded) है।

(iv) परिमित संख्या में असंतत बिन्दु (discontinuous points) रखता है।

(v) परिमित संख्या में उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ (Maximum and Minimum Values) रखता है।

4.3 (a) सम फलन (Even Function)

यदि फलन $f(x)$ के लिए $f(-x) = f(x)$ हो तो $f(x)$ को सम फलन कहते हैं।

सम फलन का लेखाचित्र y-अक्ष के परितः सममित होता है। y-अक्ष वक्र के प्रतिबिंब के लिए दर्पण की तरह कार्य रता है।

जैसे : $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$ आदि सम फलन हैं।

) विषम फलन (Odd Function)

यदि फलन $f(x)$ के लिए $f(-x) = -f(x)$ तो $f(x)$ को विषम फलन कहते हैं।

इन फलनों का लेखाचित्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।

जैसे : $x, x^3, \sin x$ इत्यादि विषम फलन हैं।

. **सम फलन की फोरियर श्रेणी :** यदि $f(x)$, 2π आवर्त का सम फलन है, तो

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad [\because f(x) \cdot \sin nx \text{ विषम फलन है}]$$

$\therefore$ फोरियर श्रेणी : $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

जहाँ $\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx;} \qquad \boldsymbol{a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx}$

2. **विषम फलन की फोरियर श्रेणी :** यदि $f(x)$, 2π आवर्त का विषम फलन है, तो

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx} \qquad \text{जहाँ} \quad \boldsymbol{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx}$$

स्पष्ट है विषम फलन की फोरियर श्रेणी में केवल ज्या (sine) पद हैं।

14.3.1 अर्द्धपरास श्रेणी

(a) अर्द्धपरास कोज्या श्रेणी (Cosine Series) :

यदि फलन $f(x)$ अंतराल $(0, \pi)$ में परिभाषित हो, तो अर्द्धपरास कोज्या श्रेणी

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

जहाँ $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$

(b) अर्द्धपरास ज्या श्रेणी (Sine series) :

यदि फलन $f(x)$ अंतराल $(0, \pi)$ में परिभाषित हो, तो अर्द्धपरास ज्या श्रेणी,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, dx \qquad \text{जहाँ} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

परीक्षा में पूछे गए एवं अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. अंतराल $0 < x < 2\pi$ के लिए किसी फलन $f(x)$ के लिए फोरियर अचर a_0 का मान

(a) $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$ (b) $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$

(c) $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx$ (d) कोई नहीं

2. अंतराल $0 < x < 2\pi$ के लिए किसी फलन $f(x)$ के लिए फोरियर अचर a_n का मान
(a) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ (b) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$
(c) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx$ (d) कोई नहीं

3. अंतराल $0 < x < 2\pi$ के लिए किसी फलन $f(x)$ के लिए फोरियर अचर b_n का मान
(a) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ (b) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$
(c) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx$ (d) कोई नहीं

4. यदि $f(x)$, 2π आवर्त्त का समफलन हो तो फोरियर श्रेणी $f(x) =$
(a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ (d) कोई नहीं

5. यदि $f(x)$ 2π आवर्त्त का विषमफलन है तो फोरियर श्रेणी $f(x) =$
(a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ (d) कोई नहीं

6. $f(x) = x^3$, $-\pi < x < \pi$ के लिए फोरियर अचर a_0 तथा a_n का मान
(a) 0, 0 (b) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (d) कोई नहीं

7. निम्न कथनों में असत्य कथन को चिह्नित करें
(a) $\int_0^{2\pi} \sin nx = 0$ (b) $\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = 0$ (c) $\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi$ (d) कोई नहीं

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. आवर्ती फलन की परिभाषा दें।
2. फोरियर श्रेणी की परिभाषा दें।
3. सम फलन की परिभाषा दें।
4. विषम फलन की परिभाषा दें।
5. सम फलन के लिए फोरियर श्रेणी लिखें।
6. विषम फलन के लिए फोरियर श्रेणी लिखें।
7. अर्द्धपरास कोज्या श्रेणी की परिभाषा दें।
8. अर्द्धपरास ज्या श्रेणी की परिभाषा दें।

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. फलन $f(x) = x$ का $0 < x < 2\pi$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करें। **[2022(S)]**
2. फलन $f(x)$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करें, जहाँ
(i) $f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$ तथा $f(x + 2\pi) = f(x)$
[2021(S), 12]
3. फलन $f(x) = x^3$ की $[-\pi, \pi]$ अंतराल में फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए। **[2017(S)]**

4. फलन $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi \\ -\cos x, & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$ का फोरियर श्रेणी ज्ञात करो। **[2018(S)]**

5. (i) फलन $f(x) = e^{-x}$ की $(0, 2\pi)$ अंतराल में फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए। **[2016]**

(ii) फलन $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए। **[2008, 10, 16(S)]**

6. (i) उस फलन की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए जो अंतराल $-\pi < x < \pi$ में $f(x) = x^2$ से परिभाषित है जबकि $f(x + 2\pi) = f(x)$ **[2013]**

तथा (ii) निगमन कीजिए—

(a) $\dfrac{\pi^2}{12} = \dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \ldots$ (b) $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ **[2009]**

7. फलन $f(x)$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करें, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{तथा } f(x + 2\pi) = f(x)$$ **[2012]**

हल एवं संकेत

✍ वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. (a) **2.** (b) **3.** (c) **4.** (a) **5.** (c) **6.** (a) **7.** (d)

✍ अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. आवर्ती फलन की परिभाषा 14.1 देखें।
2. फोरियर श्रेणी की परिभाषा 14.1.1 देखें।
3. सम फलन की परिभाषा 14.3(a) देखें।
4. विषम फलन की परिभाषा 14.3(b) देखें।
5. सम फलन के लिए फोरियर श्रेणी 14.3(b) (1) देखें।
6. विषम फलन के लिए फोरियर श्रेणी 14.3(b) (2) देखें।
8. अर्द्धपरास कोज्या श्रेणी की परिभाषा 14.3.1(a) देखें।
7. अर्द्धपरास ज्या श्रेणी की परिभाषा 14.3.1(b) देखें।

✍ लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. प्रश्न से $f(x) = x$

माना $x = f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \, dx + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, dx$

अब,
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(4\pi^2 - 0) = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n} - 1\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi} \quad [\because (uv)_n = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 + \ldots]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - 0 + \frac{\cos 2n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2\pi}[1-1] = 0 \quad \left[\because \begin{array}{r}\sin 2n\pi = 0\\ \cos 2n\pi = 1\\ \cos 0 = 1\end{array}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - 1\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi \cos 2n\pi}{n} + 0 - 0\right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \times \pi = -\frac{2}{n} \quad [\because \cos 2n\pi = 1]$$

$\therefore$ अभीष्ट फोरियर श्रेणी $x = \frac{2\pi}{2} + 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\sin nx\right)$

$$= \pi - 2\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots\right]$$

2. माना फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ...(

अब $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx + \int_0^{\pi} f(x)\, dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\int_{-\pi}^{0} dx + k\int_0^{\pi} dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\{-k(x)_{-\pi}^{0} + k(x)_0^{\pi}\} = \frac{1}{\pi}\{-k[0-(-\pi)+k(\pi-0)]\}$$

$$= \frac{1}{\pi}[-k\pi + k\pi] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-k\int_{-\pi}^{0} \cos nx + dx\, k\int_0^{\pi} \cos nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\left(\frac{\sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{0} + k\left(\frac{\sin nx}{n}\right)_0^{\pi}\right] = 0 \quad [\because \sin n\pi = 0 = \sin 0]$$

तथा $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx + k\int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{0} + k\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{k}{n}(1-\cos n\pi) - \frac{k}{n}(\cos n\pi - 1)\right] = \frac{2k}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

$$= \frac{2k}{n\pi}[1-(-1)^n] \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

अत: $b_1 = \frac{4k}{n}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4k}{\pi}\cdot\frac{1}{3}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4k}{\pi}\cdot\frac{1}{5}, \ldots$

समी० (1) में इन मानों को रखने पर

$$\therefore \quad f(x) = \frac{4k}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right\} \qquad \ldots(2)$$

उत्तर

3. $\because \quad f(x) = x^3$ अत: यह एक विषम फलन है।

$\therefore \quad a_0 = 0, a_n = 0$

अब $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 2\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\, dx$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x^3\frac{(-\cos nx)}{n} - \frac{3x^2(-\sin nx)}{n^2} + \frac{6x\cos nx}{n^3} - \frac{6\sin n\pi}{n^4}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi^3\cos n\pi}{n} - 0 + \frac{6\pi\cos nx}{n^3} - 0\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\times \pi\cos n\pi\left(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)$$

$$= 2(-1)^n\left[\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right] \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

$\therefore$ अभीष्ट फोरियर श्रेणी

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\sin nx\right]$$

$$= 2\left[-\left(\frac{6}{1^3} - \frac{\pi^2}{1}\right)\sin x + \left(\frac{6}{2^3} - \frac{\pi^2}{2}\right)\sin 2x - \left(\frac{6}{3^3} - \frac{\pi^2}{3}\right)\sin 3x + \ldots\right]$$

4. परिभाषा से, $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi \\ -\cos x, & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_0\cos nx + bn\sin nx) \qquad \ldots(1)$$

अब $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\,dx + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}[(-\sin x)_{-\pi}^{0} + (\sin x)_0^{\pi}]$

$[\because \sin \pi = 0]$

$$= \frac{1}{\pi}[-(\sin 0 + \sin \pi + \sin \pi - 0)] = \frac{1}{\pi} \times 0$$

$$= 0$$

$$a_0 = 0 \quad ...(2)$$

पुनः $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-\cos x) \cos nx\, dx + \int_0^{\pi} \cos x \cos nx\, dx\right]$$

प्रथम समाकल से $x = -t$ रखने पर

$dx = -dt$ तथा $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = -\pi \Rightarrow y = \pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0} \cos t \,.\, \cos nt\, (-dt) + \int_0^{\pi} \cos x \,.\, \cos nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} \cos t \,.\, \cos nt\, dt + \int_0^{\pi} (-\cos x \,.\, \cos nx\, dx\right] \quad \left[\because \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} \cos x \cos nx\, dt + \int_0^{\pi} (\cos x \cos nx\, dx\right] \quad \left[\because \int_a^b f(t)\, dt, a = \int_b^a f(x)\, dx\right]$$

पुनः $\quad = \frac{1}{\pi} \times 0 = 0 \qquad i.e., \; a_n = 0 \quad ...(3)$

तथा $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-\cos x) \sin nx\, dx + \int_0^{\pi} \cos x \sin nx\, dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} \cos x \sin nx\, d + \int_0^{\pi} \cos x \sin nx\, dx\right] \quad ...(4)$$

[प्रथम समाकल में $x = -dt$ तो $dx = -dt$ तथा $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$]

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 2\cos x \sin x\, dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin (n+1)\, x + \sin (n-1)\, x]\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos (n+1)\, x}{(n+1)} - \frac{\cos (n-1)\, x}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \left[-\frac{\cos (n+1)\, \pi}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{\cos (n-1)\, x}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n+1} + \frac{\cos n\pi}{n-1} + \frac{2n}{n^2-1}\right] \quad [\because \cos (\pi + n\pi) = -\cos n\pi]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2n \cos n\pi}{n^2-1} + \frac{2n}{n^2-1}\right] = \frac{2n}{(n^2-1)\,\pi}[1 + \cos n\pi] \qquad n^2 \neq 1$$

$i.e., \quad b_n = \frac{2n\,[1 + (-1)^n]}{(n^2-1)\,\pi}$ यदि $n > 1$ ...(5)

$n = 1$ के लिए समीकरण (4) से

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos x \sin dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = 0 \quad ...(5)$$

पुनः समीकरण (5) से यदि n विषम है, तो $\quad b_3 = b_5 = \ldots = 0$

अतः $\quad b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$

अतः जब n सम होगा तभी b_n का मान होगा। $[\because (-1)^n = 1$, जब n सम है]

तथा $b_n = \dfrac{4n}{(n^2-1)\pi} = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{n}{(n-1)(n+1)}$ $\Rightarrow b_n = \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{2}{1.3}, b_4 = \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{4}{3.5}, \ldots$

अतः a_0, a_n तथा b_n का मान रखने पर,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{1.3}\sin 2x + \frac{4}{3.5}\sin 4x + \ldots\right] \qquad [\because a_0 = a_n = 0]$$

5. (i) माना $f(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ...(1)

अब $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}[-e^{-x}]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(-e^{-2\pi} + e^0) = \frac{1}{\pi}(-e^{-2\pi} + 1) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-x}(-\cos nx + n\sin nx)]_0^{2\pi}$$

$$\left[\because \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx). \text{ Here, } a = -1, b = n\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-2\pi}(-\cos 2n\pi + n\sin n\pi) - e^0(-\cos n0 + n\sin n0)]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-2x}(-1+0) - e^0(-1+0)]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}(-e^{-2\pi} + 1) = \left(\frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi}\right)\frac{1}{n^2+1}$$

तथा $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}|e^{-x}(-\sin nx - n\cos nx)|_0^{2\pi}$$

$$\left[\because \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos x). \text{ Here, } a = -1, b = n\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-2\pi}(0 - n.1) - e^0(0 - n)] \quad [\because \sin 2n\pi = 0, \cos 2n\pi = 1; \cos 0 = 1]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}(n - ne^{-2\pi}) = \left(\frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi}\right)\cdot\frac{n}{n^2+1}$$

a_0, a_n तथा b_n का मान (1) में रखने पर

$$e^{-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right) + \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right) \Sigma \frac{\cos nx}{n^2+1} + \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right) \Sigma \frac{n}{n^2+1} \sin nx$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \Sigma \frac{\cos nx}{n^2+1} + \Sigma \frac{n}{n^2+1} \sin nx\right]$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n^2+1}\cos nx + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{5}\sin 2x + \ldots + \frac{n}{n^2+1}\sin nx + \ldots\right)\right]$$

(ii) माना फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ...(1)

अब $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = -\frac{1}{\pi} \times \pi\,[x]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-\pi)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left\{-\pi\frac{\sin nx}{n}\right\}_{-\pi}^{0} + \left\{x\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (1)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right\}_0^{\pi}\right]$$ [खंडशः समाकलन से]

[$\because \int uv\,dx = uv_1 - u'v_2 + \ldots$]

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$ [$\because \cos n\pi = (-1)^n$]

अतः $a_1 = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{1^2},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{3^2},\ a_4 = 0,\ a_5 = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{5^2}, \ldots$

तथा $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-\pi) \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left\{\frac{\pi \cos nx}{n}\right\}_{-\pi}^{0} + \left\{x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (1)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\right\}_{0}^{\pi}\right]$$

$[\because \int uv \, dx = uv_1 - u' v_2 + \ldots]$

$\left[\begin{array}{l}\because \sin n\pi = 0 \\ \cos(-\theta) = \cos\theta\end{array}\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n} - \frac{\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\pi \cos n\pi}{n}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\pi n}(1 - \cos n\pi - \cos n\pi) = \frac{1 - 2\cos n\pi}{n} = \frac{1 - 2(-1)^n}{n} \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

अत: $b_1 = \frac{3}{1}, b_2 = -\frac{1}{2}, b_3 = \frac{3}{3}, b_4 = -\frac{1}{4}, \ldots$

इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट फोरियर श्रेणी

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right]$$
$$+ \left[\frac{3}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{3}\sin 3x - \ldots\right]$$

6. **(i)** प्रश्न से, $f(x) = x^2, \quad -\pi \le x \le \pi$

यह सम फलन है अत: $b_n = 0$

अब फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ...(1)

यहाँ $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \qquad \text{...(2)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x^2 \sin nx}{n}\right) - 2x\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{\pi}$$ [खण्डश: समाकलन से]

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(0 + 2\pi\frac{\cos n\pi}{n^2} + 2 \times 0\right) - (0 - 2 \times 0 + 2 \times 0)\right] \qquad [\because \sin n\pi = 0]$$

$$= \frac{2}{\pi} \times 2\pi \frac{(-1)^n}{n^2} = (-1)^n \frac{4}{n^2} \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n] \qquad \text{...(3)}$$

समी० (1) में (2) तथा (3) से a_0, a_n तथा b_n का मान रखने पर

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$$

i.e., $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots\right] \quad \ldots(4)$$ उत्तर

(ii) (a) समीकरण (4) में $x = 0$ रखने पर

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots\right]$$

या $$\frac{\pi^2}{3} = -4\left[-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots\right]$$

$\therefore$ $$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$

सिद्ध हुआ

पुनः समीकरण (4) में $x = \pi$ रखने पर

(b) $$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos\pi}{1^2} - \frac{\cos 2\pi}{2^2} + \frac{\cos 3\pi}{3^2} \ldots\right]$$

$\Rightarrow$ $$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\left[-\frac{\cos\pi}{1^2} + \frac{\cos 2\pi}{2^2} - \frac{\cos 3\pi}{3^2} + \ldots\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{2\pi^2}{3 \times 4} = \left[-\frac{(-1)}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{(-1)}{3^2} + \ldots\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\pi^2}{6} = \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right]$$

i.e., $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7. (2) में $k = 1$ रखने से

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right\}$$

□□□