अध्याय

12

लाप्लास रूपांतरण (Laplace Transform)

12.1 परिभाषा (Definition)

यदि $f(t)$, t के सभी धनात्मक मानों के लिए परिभाषित फलन हो तो $f(t)$ का लाप्लास रूपांतरण

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

से दिया जाता है जहाँ s प्राचल (Parameters) है तथा इस सीमा का अस्तित्व है।

12.2 लाप्लास रूपान्तरण के प्रमुख गुण (Important Properties of Laplace Transforms)

(i) $L\{c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t) \pm \ldots\} = c_1 L\{f_1(t)\} \pm c_2 L\{f_2(t)\} \pm \ldots$

अर्थात् लाप्लास रूपान्तरण रैखिक रूपान्तरण है।

(ii) यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ हो तो $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

(iii) यदि $\{L f(t)\} = F(s)$ तथा $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & 0 < t < a \end{cases}$ तो $L\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$

(iv) यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तो $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

(v) यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तो $L\{f'(t)\} = s L\{f(t)\} - f(0)$

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - s f(0) - f'(0)$$

(vi) यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तो $L\left[\int_0^t f(x)\, dx\right] = \frac{1}{s} L\{f(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$

(vii) यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तो $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$, जहाँ $n = 1, 2, 3, \ldots$

(viii) यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तथा $\underset{t \to 0}{Lt} \left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$ का अस्तित्व है, तो $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(x)\, dx$

☞ प्रमुख सूत्र (Important Formulae)

(i) $L(1) = \frac{1}{s}$ (ii) $L(t) = \frac{1}{s^2}$ (iii) $L(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ या $\frac{n!}{s^{n+1}}$

(iv) $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ (v) $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ (vi) $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$

(vii) $L(\sinh at) = \frac{a}{s^2 - a^2}$ (viii) $L(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$

...रूपांतरण

(ix) $L\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ (x) $L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)}{1-e^{-sT}}$

परीक्षा में पूछे गए एवं अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

...प्रश्न

...न कथनों में कौन-सा कथन गलत है

(a) $L(1) = \frac{1}{S}$ (b) $L(t^n) = \frac{n!}{S^{n+1}}$

(c) $L\{e^{at}\} = \frac{1}{S-a}$ (d) $L\{\sin at\} = \frac{a}{S^2-a^2}$

...न कथनों में कौन-सा कथन गलत है

(a) $L(\cos at) = \frac{a}{S^2+a^2}$ (b) $L(\sin at) = \frac{a}{S^2+a^2}$

(c) $L(\sin hat\} = \frac{a}{S^2-a^2}$ (d) $L(\cos hat) = \frac{S}{S^2-a^2}$

$L(a+bt+ct^2) =$

(a) $\frac{a}{S}+\frac{b}{S^2}+\frac{2c}{S^3}$ (b) $\frac{a}{S^2}+\frac{b}{S}+\frac{c}{S^3}$

(c) $\frac{a}{S}+\frac{b}{S^3}+\frac{c}{S^2}$ (d) कोई नहीं

$L(\sin 2t) =$

(a) $\frac{2}{S^2-4}$ (b) $\frac{2}{S^2+4}$ (c) $\frac{S}{S^2-4}$ (d) कोई नहीं

$L\{\cosh 2t\} =$

(a) $\frac{2}{S^2-4}$ (b) $\frac{2}{S^2+4}$ (c) $\frac{S}{S^2-4}$ (d) कोई नहीं

$L(\sin^2 t) =$

(a) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{S}-\frac{S}{S^2+4}\right]$ (b) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{S}+\frac{S}{S^2+4}\right]$

(c) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{S}-\frac{2}{S^2+4}\right]$ (d) कोई नहीं

$L(\cos^2 t) =$

(a) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{S}-\frac{S}{S^2+4}\right]$ (b) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{S}+\frac{S}{S^2+4}\right]$

(c) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{S}-\frac{2}{S^2+4}\right]$ (d) कोई नहीं

असत्य कथन पर चिह्न लगायें, यदि $L\{f(t)\} = F(S)$ तो

(a) $L\{e^{at} f(t)\} = F(S-a)$ (b) $L\{f'(t)\} = SF(t) - f(0)$

(c) $L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ (d) $L\{1\} = \frac{1}{S^2}$

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. $L[(\sin t - \cos t)^2]$ [1998, 202
2. (i) (a) $\sin^2 t$
   (b) $L(\sin^2 at)$ [2
   (ii) $L(t^2 - e^{-at})$ [202
3. (a) $L(4\cos^2 2t)$ का मान ज्ञात करो। [2
   (b) $L[3t^2 - 2\sin 3t]$ [201
   (c) $L\{t^2 \cos at\}$ का मान ज्ञात कीजिए। [2
4. $L(e^{2t}\cos 3t)$ [201
5. $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ का मान बतायें। [201
6. $L[7e^{2t} + 9e^{-2t} + 5\cos t + 7t^2 + 5\sin 3t + 2]$ [2003,
7. $L[3t^3 + 2\sin 3t + 4e^t]$
8. $L[a + bt + ct^2]$ [2
   [2000, 1

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. (a) L.T. of $t^2 \cos at$ का मान ज्ञात करें। [2009, 18(S), 19
   (b) दर्शाइये कि $L\left(\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{p}\right)}\, e^{-\frac{1}{4p}}$
2. (i) $L(e^{-t}\sin^2 t)$ तथा $L\{e^t \sin^2 t\}$ का मान ज्ञात करें। [2019
   (ii) $L(e^{-t}\cos^2 t)$ का मान ज्ञात करें। [2006,
3. $\sin 2t \,.\, \sin 3t$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें। [20
4. $t\cos at$ तथा $t\sin at$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें।
5. $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ का मान ज्ञात करें। क्या $L\left\{\frac{\cos t}{t}\right\}$ का मान ज्ञात किया जा सकता है? [20
6. $L\{t\, e^{-t}\sin^2 t\}$ का मान ज्ञात करें। [2004, 05,
7. $L\{e^t (t+3)^2\}$ [20

हल एवं संकेत

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. (d) 2. (a) 3. (a) 4. (b) 5. (c) 6. (a) 7. (b) 8. (

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. $L\{(\sin t - \cos t)^2\} = L\{\sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t \,.\, \cos t\} = L\{1 - \sin 2t\}$

$$= L\{1\} - L\{\sin 2t\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2 + 4}$$

2. (i) (a) $L(\sin^2 t) = L\,\frac{(1 - \cos 2t)}{2}$

$$= \frac{1}{2}L(1) - \frac{1}{2}L(\cos 2t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{S} - \frac{1}{2}\,\frac{S}{s^2 + 2^2}$$

$$= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2+4-s^2}{s\,(s^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{4}{s\,(s^2+4)}$$

$$= \frac{2}{s\,(s^2+4)}$$

(b) $L(\sin^2 at) = L\left(\frac{1-\cos 2at}{2}\right) = \frac{1}{2}[L(1) - L(\cos 2at)]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{S} - \frac{S}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s^2+a^2-s^2}{s(s^2+c^2)}\right] = \frac{1}{2}\frac{a^2}{s(s^2+a^2)}$$

(ii) $L\,(t^2 - e^{-at}) = L\,(t^2) - L(e^{-at}) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+a}$

(a) $L(4\cos^2 2t) = 2L\,(2\cos^2 2t) = 2L(1+\cos 4t)$

$$= 2\,[L(1) + L(\cos 4t)]$$

$$= 2\left[\frac{1}{S} + \frac{S}{S^2+4^2}\right] = 2\left[\frac{1}{S} + \frac{S}{S^2+16}\right]$$

(b) $L\{3t^2 - 2\sin 3t\} = 3L\{t^2\} - 2L\{\sin 3t\}$

$$= 3 \times \frac{2}{S^3} - 2 \times \frac{3}{S^2+9} = 6\left[\frac{1}{S^3} - \frac{1}{S^2+9}\right]$$

(c) $\because\ L\{t^2 \cos at\}\ \frac{S}{S^2+a^2}$

$$L\{t^2 \cos at\} = (-1)\frac{d^2}{dS^2}\{L\,(\cos at)\} \qquad \left[\because\ L(t^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dS}\{L\{f(t)\}\right]$$

$$= (-1)^2 \frac{d^2}{dS^2}\left(\frac{S}{S^2+a^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dS}\left\{\frac{d}{dS}\left(\frac{S}{S^2+a^2}\right)\right\} = \frac{d}{dS}\frac{(S^2+a^2)\times 1 - S \times 2S}{(S^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{d}{dS}\frac{s^2-S^2}{(S^2+a^2)} = \frac{(S^2+a^2)^2\,(-2S) - -(a^2-S^2) \times 2\,(S^2-a^2) \times 2S}{(S^2+a^2)}$$

$$= \frac{(2S\,(S^2+a^2)\,\{-(S^2+a^2) - 2\,(a^2-S^2)\}}{(S^2+a^2)^4}$$

$$= \frac{2S(S^2-3a^2)}{(S^2+a^2)^3}$$

$$L\cos 3t = \frac{S}{S^2+9}$$

$\therefore\ L(e^{2t}\cos 3t) = \frac{S-2}{(S-2)^2+9} = \frac{S-2}{S^2-4S+13}$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण]

5. $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

$$\therefore \quad L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{a}{x^2 + a^2}\, dx = a \times \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_s^\infty$$

$$= \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}\frac{s}{a} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{a} = \cot^{-1}\frac{s}{a}$$

6. $L\{7e^{2t} + 9e^{-2t} + 5\cos t + 7t^2 + 5\sin 3t + 2\}$

$$= L\{e^{2t}\} + 9L\{e^{-2t}\} + 5L\{\cos t\} + 7L\{t^2\} + 5L\{\sin 3t\} + 2L\{1\}$$

$$= 7 \times \frac{1}{s-2} + 9 \times \frac{1}{(s-(-2))} + 5 \times \frac{s}{s^2+1} + 7 \times \frac{2}{s^{2+1}} + 5 \times \frac{3}{s^2 + 3^2} + 2 \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{7}{s-2} + \frac{9}{s+4} + \frac{5s}{s^2+1} + \frac{14}{s^3} + \frac{15}{s^2+9} + \frac{2}{s}$$

7. $L\{3t^3 + 2\sin 3t + 3t\} = 3\,L(t^3) + 2L\,(\sin 3t) + 4L\{t\}$

$$= 3 \times \frac{3!}{s^4} + 2 \times \frac{3}{s^2+9} + 4 \times \frac{1}{s^2} = \frac{18}{s^4} + \frac{6}{s^2+9} + \frac{4}{s^2}$$

8. $L\{a + bt + ct^2\} = a\,L\{1\} + b\,L(t) + c^2\,L\{t^2\}$

$$= a \times \frac{1}{s} + b \times \frac{1}{s^2} + c \times \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{2c}{s^3}$$

लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. (a) $\because \quad L(\cos at) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$

$$\therefore \quad L\{t^2 \cos at\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) \qquad \left[\because L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\{L(f(t))\}\right]$$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = \frac{d}{ds}\left[\frac{(s^2+a^2)\times 1 - s \times 2s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{d}{ds}\left\{\frac{a^2 - s^2}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(s^2+a^2)^2 \times (-2s) - (a^2 - s^2)\, 2(s^2+a^2) \times 2s}{(s^2+a^2)^4}$$

$$= \frac{2s(s^2+a^2)\{-(s^2+a^2) - 2a^2 + 2s^2\}}{(s^2+a^2)^4} = \frac{2s(s^2 - 3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$$

(b) $$L\left(\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right) = L\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\left\{1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!} + \ldots\right\}\right] \qquad \left[\because \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots\right]$$

$$= L\left[t^{-1/2} - \frac{t^{1/2}}{2} + \frac{t^{3/2}}{24} - \frac{t^{5/2}}{720} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2s^{\frac{1}{2}+1}} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{24s^{\frac{3}{2}+1}} - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{720s^{\frac{5}{2}+1}}$$

$$=\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{s^{\frac{1}{2}}}-\frac{\Gamma\frac{3}{2}}{2s^{\frac{3}{2}}}+\frac{\Gamma\frac{5}{2}}{24s^{\frac{5}{2}}}-\frac{\Gamma\frac{7}{2}}{720\times s^{\frac{7}{2}}}+\ldots$$

$$=\frac{1}{s^{1/2}}\left[\sqrt{\pi}-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2s}+\frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{24s^{2}}-\frac{\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{720s^{3}}+\ldots\right]$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}\left[1-\frac{1}{4s}+\frac{1}{32s^{2}}-\frac{1}{384s^{3}}+\ldots\right]$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\left[1-\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{4s}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4s}\right)^{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4s}\right)^{3}+\ldots\right]$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\times e^{-1/4s} \qquad \left[\because e^{-x}=1-x+\frac{x^{2}}{2!}\ldots\right]$$

(i) $\because \quad \sin^{2}t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

$$\therefore \quad L(\sin^{2}t)=\frac{1}{2}L(1-\cos 2t)=\frac{1}{2}[(L(1)-L(\cos 2t)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^{2}+4}\right]=\frac{1}{2}\frac{4}{s(s^{2}+4)}=\frac{2}{s(s^{2}+4)}$$

$$\therefore \quad L\{e^{-t}\sin^{2}t\}=\frac{2}{(s+1)\{(s+1)^{2}+4\}}$$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

$$=\frac{2}{(s+1)(s^{2}+2s+5)}$$ उत्तर

तथा $L\{e^{t}\sin^{2}t\}=\dfrac{2}{(s-1)\{(s-1)^{2}+4\}}$

$$=\frac{2}{(s-1)(s^{2}-2s+5)} \qquad [\because L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)]$$

(ii) $L(\cos^{2}t)=L\left(\dfrac{1+\cos 2t}{2}\right)=\dfrac{1}{2}L(1)+\dfrac{1}{L}(\cos 2t)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^{2}+4}=\frac{1}{2}L\frac{s^{2}+4+s^{2}}{s(s^{2}+4)}=\frac{1}{2}\frac{(2s^{2}+4)}{s(s^{2}+4)}$$

$$\therefore \quad L\{e^{-t}\cos^{2}t\}=\frac{1}{2}\left[\frac{2(S+1)^{2}+4}{(s+1)\ \{(s+1)^{2}+4\}}\right] \qquad [\because L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2(s^{2}+2s+1)+4}{(s+1)(s^{2}+2s+1+4)}=\frac{1}{2}\frac{2s^{2}+4s+2+4}{(s+1)(s^{2}+2s+5)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2s^{2}+4s+6}{(s+1)(s^{2}+2s+5)}=\frac{1}{2}\times 2\frac{(s^{2}+2s+3)}{(s+1)(s^{2}+2s+5)}$$

$$= \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)}$$

3. $L\{\sin 2t \,.\, \sin 3t\} = L\left\{\frac{1}{2} 2 \sin 2t \sin 3t\right\}$

$$= \frac{1}{2} L\{\cos(2t - 3t) - \cos(2t + 3t)\}$$

$[\because 2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$$= \frac{1}{2}\{L(\cos t) - L(\cos 5t)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+25}\right]$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{s^2 + 25 - s^2 - 1}{(s^2+1)(s^2+25)} = \frac{s}{2}\frac{24}{(s^2+1)(s^2+25)} = \frac{12s}{(s^2+1)(s^2+25)}\right]$$

4. $\because \cos at = \dfrac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$ तथा $\sin at = \dfrac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$ तथा $L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$

$$L\{t \cos at\} = L\left\{t\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right\} = \frac{1}{2}[L(t\, e^{iat}) + L(t\, e^{-iat})]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-ia)^2} + \frac{1}{(s+ia)^2}\right]$$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s+ia)^2 + (s-ia)^2}{(s-ia)^2\,(s+ia)^2}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{2(s^2 + i^2a^2)}{\{(s-ia)(s+ia)\}^2} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

तथा $L\{t \sin at\} = \dfrac{1}{2i}[L(t\, e^{iat}) - L(t\, e^{-iat})]$.

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(s-ia)^2} - \frac{1}{(s+ia)^2}\right]$$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(s+ia)^2 - (s-ia)^2}{(s-ia)^2\,(s+ia)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2i} \times \frac{4ias}{(s^2+a^2)^2} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

5. $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{S^2 + a^2} = F(s)$ (माना)

$$\therefore \quad L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \int_s^\infty F(x)\,dx = \int_s^\infty \frac{a}{x^2+a^2}dx$$

$$= a \times \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_s^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}\frac{s}{a}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{a} = \cot^{-1}\frac{s}{a}$$

अब $L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} = F(s)$

$$\therefore \quad L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{2x}{x^2 + a^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}[\log (x^2 + a^2]_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to \infty} \log (x^2 + a^2) - \frac{1}{2} \log (s^2 + a^2)\right]$$

जिसका अस्तित्व नहीं है क्योंकि $\lim_{x \to \infty} \log (x^2 + a^2)$ परिभाषित नहीं हैं।

अतः $L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\}$ का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

6. $\because \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$

$$\therefore \quad L(\sin^2 t) = L\left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right) = \frac{1}{2} L(1) - \frac{1}{2} L(\cos 2t)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + 4} = \frac{1}{2}\frac{[s^2 + 4 - s^2]}{s(s^2 + 4)} = \frac{2}{s(s^2 + 4)} = F(s) \quad \text{(माना)}$$

$$\therefore \quad L\{t \sin^2 t\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} F(s) = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\}$$

$$= -\frac{s(s^2 + 4) \times 0 - 2\{3s^2 + 4\}}{\{s(s^2 + 4)\}^2} = \frac{6s^2 + 8}{s^2 (s^2 + 4)^2}$$

$$\therefore \quad L\{e^{-t}\, t \sin^2 t\} = \frac{6(s + 1)^2 + 8}{(s + 1)^2 \{(s + 1)^2 + 4\}^2} \qquad \text{[प्रथम स्थानान्तरी गुण से]}$$

$$\Rightarrow \quad L(t\, e^{-t} \sin^2 t) = \frac{6(s + 1)^2 + 8}{(s + 1)^2 (s^2 + 2s + 5)^2}$$

7. $L\{(t + 3)^2\} = L\{t^2 + 6t + 9\} = L(t^2) + 6L(t) + 9L(1) = \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}$

$$\therefore \quad L\{e^t (t + 3)^2\} = \frac{2}{(s - 1)^3} + \frac{6}{(s - 1)^2} + \frac{9}{s - 1} = \frac{2 + 6(s - 1) + 9(s - 1)^2}{(s - 1)^3}$$

$$= \frac{2 + 6s - 6 + 9(s^2 - 2s + 1)}{(s - 1)^3} = \frac{6s - 4 + 9s^2 - 18s + 9}{(s - 1)^3}$$

$$= \frac{9s^2 - 12s + 5}{(s - 1)^3}$$

□□□