अध्याय 1

आव्यूह (Matrix)

1.1 परिभाषायें (Definitions)

1. आव्यूह (Matrix) : यदि mn संख्याओं (वास्तविक या सम्मिश्र) के समुच्चय के अवयवों को m पंक्तियाँ तथा n स्तंभों के एक आयताकार क्रमित सारणी के रूप में व्यवस्थित किया जाए तो इसे $m \times n$ क्रम का आव्यूह कहा जाता है तथा mn संख्याओं में से प्रत्येक इसका अवयव या तत्व कहलाता है।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ एक 2×3 क्रम का आव्यूह है, जिसमें 2 पंक्ति तथा स्तंभ हैं।

2. वर्ग आव्यूह (Square Matrix) : जिस आव्यूह में पंक्ति तथा स्तंभों की संख्या बराबर हों उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं। अत: $n \times n$ क्रम का आव्यूह, एक वर्ग आव्यूह है जिसका क्रम n है।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ आदि।

3. विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह $[a_{ij}]_{n \times n}$, में मुख्य विकर्ण को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हों तो उसे विकर्ण आव्यूह कहते हैं। **[2004, 05, 06, 15]**

अत: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ विकर्ण आव्यूह होगा, यदि $a_{ij} = 0$ जब $i \neq j$ तथा इसे निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$A = \text{diag}\,[a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}]$$

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ एक विकर्ण आव्यूह है।

4. अदिश आव्यूह (Scalar Matrix) : जिस विकर्ण आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव बराबर हों (शेष शून्य हों) उसे अदिश आव्यूह कहते हैं।

जैसे : $A = [4],\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

क्रमशः प्रथम, द्वितीय व तृतीय क्रम के अदिश आव्यूह हैं।

5. इकाई आव्यूह या तत्समक आव्यूह (Unit Matrix or Indentity Matrix) : एक वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के सभी अवयव 1 तथा शेष सारे अवयव शून्य हों, इकाई आव्यूह या तत्समक आव्यूह कहलाता है। इसे I से निरूपित करते हैं। **[2004, 16]**

द्वितीय क्रम का इकाई आव्यूह है।

जैसे : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. शून्य या रिक्त आव्यूह (Zero or Null Matrix) : यदि किसी आव्यूह के सारे तत्व शून्य हों तो इसे शून्य या रिक्त आव्यूह (Zero or Null Matrix) कहते हैं। इसे O से सूचित करते हैं। **[2005, 07, 13, 14]**

जैसे : $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ आदि शून्य आव्यूह हैं।

7. त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य विकर्ण के ऊपर अथवा नीचे के सभी अवयव शून्य हों तो आव्यूह त्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है। **[2015, 16]**

उच्च तथा निम्न त्रिभुजीय आव्यूह (Upper and Lower Triangular Matrices) : यदि किसी त्रिभुजीय आव्यूह के मुख्य विकर्ण के नीचे के सारे अवयव शून्य हों तो उसे **उच्च त्रिभुजीय आव्यूह** कहते हैं तथा यदि मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हों तो उसे निम्न **त्रिभुजीय आव्यूह** कहते हैं।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ उच्च त्रिभुजीय तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ निम्न त्रिभुजीय आव्यूह हैं।

8. उपआव्यूह (Sub-matrix) : किसी आव्यूह के कुछ पंक्तियों या कुछ स्तम्भों या दोनों को छोड़ने से प्राप्त आव्यूह को उपआव्यूह कहते हैं।

जैसे : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ के उपआव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, [1], [2], \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ आदि हैं।

9. परिवर्त आव्यूह (Transpose Matrix): यदि किसी दिए गए आव्यूह A की पंक्तियों को स्तंभों तथा स्तंभों को पंक्तियों में बदल दिया जाए तो प्राप्त आव्यूह A का परिवर्त आव्यूह कहलाता है तथा इसे A^T या A^t या A' से सूचित किया जाता है। **[2004, 05, 12, 13, 14]**

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}$ तो इसका परिवर्त आव्यूह $A' = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i \\ 1+2i & 2 \end{bmatrix}$

10. सममित आव्यूह (Symmetric Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह का परिवर्त आव्यूह उसके बराबर हो तो आव्यूह सममित कहलाता है। अर्थात् यदि $A = A'$ हो तो A सममित होगा।

स्पष्टत: A सममित है $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ सममित आव्यूह हैं क्योंकि $A = A'$ तथा $B = B'$.

11. विषम सममित आव्यूह (Skew Symmetric Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह के लिए $A = -A'$ हो तो उसे विषम सममित आव्यूह कहते हैं। **[2004, 05, 13, 14]**

स्पष्ट है इस दशा में i तथा j के प्रत्येक मान के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$

12. लांबिक आव्यूह या लम्ब कोणीय आव्यूह (Orthogonal Matrix) : यदि A एक वर्ग आव्यूह हो तथा $AA' = A'A = I$ हो तो A लांबिक आव्यूह कहलाता है। **[2005, 07, 08,, 13 14]**

13. हरमिटियन आव्यूह (Hermitian Matrix) : यदि कोई सम्मिश्र आव्यूह A अपने संयुग्मी परिवर्त आव्यूह के बराबर हो अर्थात् $A^\theta = (\bar{A})^T = A$ हो तो उसे हरमिटियन आव्यूह कहते हैं।

हरमिटियन आव्यूह के लिए i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ तथा इसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव वास्तविक होते हैं।

14. विषम हरमिटियन आव्यूह (Skew Hermitian Matrix) : यदि A कोई सम्मिश्र वर्ग आव्यूह है, तो A को विषम हरमिटियन आव्यूह कहा जाता है। यदि

$$A^\theta = -A \; i.e., (\bar{A})^T = -A$$

अत: विषम हरमिटियन आव्यूह में मुख्य विकर्ण के अवयव काल्पनिक होंगे अथवा शून्य होंगे।

15. ऐकिक या एकल आव्यूह (Unitary Matrix) : सम्मिश्र वर्ग आव्यूह A ऐकिक या एकल आव्यूह कहलाता है यदि $AA^\theta = A^\theta A = I$. जहाँ A^θ, A का हरमिटियन आव्यूह है। **[2007, 15]**

यदि $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$ तो $A^\theta = (\bar{A})'$; $\therefore \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} = AA^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

16. व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Non-Singular Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह के सारणिक का मान अशून्य अर्थात् $|A| \neq 0$ हो तो A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrix) कहा जाता है।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो $|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$

अत: A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

17. सहखण्ड आव्यूह (Cofactor Matrix) : किसी आव्यूह A के अवयवों को उसके संगत सारणिक $|A|$ के अवयवों के संगत सहखण्डों (cofactors) से प्रतिस्थापित करके बने आव्यूह को सहखण्ड आव्यूह कहते हैं। इसे A^C या $[A_{ij}]$ से निरूपित किया जाता है।

जैसे : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंड आव्यूह $A_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

18. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix or Adjugate Matrix) : किसी आव्यूह A के सहखण्ड आव्यूह (Cofactor Matrix) A^C के परिवर्त (Transpose) आव्यूह को सहखण्डज आव्यूह कहा जाता है। इसे Adj. A से निरूपित करते हैं।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो $A_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \therefore \; Adj.\, A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

19. व्युत्क्रम या प्रतिलोम आव्यूह (Inverse of a Matrix) : यदि A व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह (non-singular matrix) हो तथा B उसी क्रम का ऐसा आव्यूह हो, जिसके लिए $AB = BA = I$ तो B को A का प्रतिलोम आव्यूह कहते है तथा इसे $\overline{A}^1$ से सूचित करते हैं।

1.2 आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर (Difference Between a Matrix and a Determinant)

आव्यूह और सारणिक में अंतर का निम्नलिखित तालिका में दिखाया गया है :

	सारणिक	आव्यूह
1.	सारणिक $n \times n$ संख्याओं की लंब सारणी है। इसमें पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या समान होती है।	आव्यूह $m \times n$ संख्याओं की लंब सारणी है जिसमें m पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होते हैं। इसमें पंक्तियों तथा स्तंभों का बराबर होना आवश्यक नहीं है।
2.	सारणिक किसी व्यंजक को वर्ग सारणी के रूप में व्यक्त करता है।	आव्यूह किसी सूचनाओं अथवा तत्वों का आयताकार लम्ब सारणी के रूप में व्यक्त करने का विशेष प्रकार है।
3.	इसका मान निश्चित होता है।	इसका कोई मान नहीं होता।
4.	सारणिक में अवयवों की संख्या n^2 होती है।	इसमें अवयवों की संख्या $m \times n$ हाती है। यदि यह n क्रम तथा वर्गाकार है तो अवयवों की संख्या n^2 होगी।
5.	इसके किसी अदिश से गुणा करने पर किसी एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों में गुणा होता है।	इसमें किसी अदिश से गुणा करने पर प्रत्येक अवयव में गुणा होता है।
6.	इसमें किसी एक पंक्ति या स्तंभ के उभयनिष्ठ को पूरी सारणी के उभयनिष्ठ के रूप में निकाला जा सकता है।	इसमें किसी संख्या को उभयनिष्ठ के रूप में तभी निकाला जा सकता है, जबकि यह सारे अवयवों अवयवों में उभयनिष्ठ हो।
7.	इसे व्यक्त करने क लिए || चिन्ह का प्रयोग होता है।	इसे व्यक्त करने के लिए [ ] या ( ) या { } या || || का प्रयोग होता है।

परीक्षा में पूछे गए एवं अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3&5&7\\2&0&-6\\1&2&3\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}4&2&1\\3&5&8\\6&3&-5\end{bmatrix}$, $A+2B$ का मान है—

(a) $\begin{bmatrix}7&7&8\\3&5&2\\7&-5&-2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0&1&3\\2&3&5\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0&0&0\\3&5&7\\1&-2&-3\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

[2021(S)]

2. दिए गए आव्यूह [1 2] का क्रम

(a) 1×1 (b) 1×2 (c) 2×2 (d) कोई नहीं

3. यदि $\begin{bmatrix}4&3\\2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\2&7\end{bmatrix}$ तो

(a) $x=2, y=7$ (b) $x=4, y=3$ (c) $x=3, y=4$ (d) कोई नहीं

4. यदि $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$ तो A का परिवर्त आव्यूह है।

(a) $\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}3&4\\2&7\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

5. यदि $A=\begin{bmatrix}4&1\\6&5\end{bmatrix}$ तो $A^{-1}=$

(a) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&-1\\-6&4\end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&4\\1&6\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}5&6\\1&4\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

6. यदि $A=\begin{bmatrix}2&5&3\\3&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ तो $|A|=$

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) कोई नहीं

7. यदि $A=\begin{bmatrix}4&2\\3&5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&7\\2&9\end{bmatrix}$ तो $A-B=$

(a) $\begin{bmatrix}1&-5\\1&-4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&5\\1&4\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-1&5\\-1&4\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

8. यदि $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ तो $A+B$

(a) $\begin{bmatrix}2&2\\4&0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

9. यदि $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$ तो $AB=$

(a) $\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}5&12\\21&32\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}19&22\\43&50\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

10. यदि $A=\begin{bmatrix}3&-4\\2&5\end{bmatrix}$ तो ... $A^{-1}=$

(a) $\frac{1}{23}\begin{bmatrix}5&4\\-2&3\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}5&4\\-2&3\end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{23}\begin{bmatrix}5&-2\\4&3\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

11. यदि $A=\begin{bmatrix}3-2x&y+1\\2&4\end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है, तो

(a) $x=1, y=2$ (b) $x=2, b=1$ (c) $x=1, y=1$ (d) कोई नहीं

12. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ तो $A^{-1} =$

(a) A (b) $-A$ (c) adj A (d) $-$adj A

13. यदि $|A| = 3$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ तो adj $A =$

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. (a) यदि $A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$, तो $A^2 - 2A$ का मान ज्ञात कीजिए। **[2022(S)]**

(b) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो $3A + B$ का मान ज्ञात कीजिए। **[2013, 18]**

(c) $A - B$ ज्ञात करो, यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ **[2019(S)]**

(d) शून्य आव्यूह की परिभाषा दो और उसकी कोटि लिखो। **[2019(S)]**

(e) आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{3\times4}$ का परिवर्त ज्ञात कीजिये। **[2019(S)]**

(f) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ हो तो A^2 ज्ञात करो। **[2019(S)]**

(g) संयुग्मी परिवर्त आव्यूह ज्ञात करें यदि $A = \begin{bmatrix} 1-2i & 2+3i & 3-4i \\ 4+5i & 5-6i & 6+7i \\ 8 & 7-8i & 9 \end{bmatrix}$

2. (a) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो $A^2 - AB + B^2$ का मान ज्ञात करो। **[2018(S)]**

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} का मान ज्ञात कीजिए। **[2017]**

3. (i) यदि $\begin{bmatrix} x + 2y - z \\ x + y \\ z - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, तो x, y और z के मान ज्ञात कीजिए। **[2016]**

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A^2 - B^2$ का मान ज्ञात कीजिए। **[2016]**

4. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A^2 - 2A$ का मान ज्ञात कीजिए। **[2015]**

5. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^2 + 3A$ का मान ज्ञात कीजिए। **[2014]**

6. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, तो A^3 का मान ज्ञात कीजिए। **[2013]**

7. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, तो $2A$ का मान ज्ञात कीजिए। **[2012]**

(ii) आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}$ का परिवर्त आव्यूह ज्ञात कीजिए। **[2012]**

8. (a) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, तो $3A$ का मान ज्ञात कीजिए। **[2011]**

(b) दिखाइए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है। **[2011]**

9. निम्न पदों को उदाहरण के साथ परिभाषित कीजिए—
(i) इकाई आव्यूह; (ii) त्रिभुजीय आव्यूह; (iii) शून्य आव्यूह; **[2019(S)]**
(vi) ऐकिक आव्यूह; (v) विकर्ण आव्यूह; (vi) विषम सममित आव्यूह; (vii) लांबिक आव्यूह; **[2022(S)]**
(viii) विषम हरमिटियन आव्यूह; (ix) सममित आव्यूह; (x) हरमिटियन आव्यूह।

✍ लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. (i) यदि $A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$ और $B = \begin{Bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{Bmatrix}$ तो गुणन AB ज्ञात कीजिए। **[2022(S)]**

(ii) आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ का सह-खण्डज आव्यूह ज्ञात कीजिए। **[2022(S)]**

2. (a) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} का मान ज्ञात कीजिए। **[2021(S)]**

(b) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध करो कि $A^2 - 4A - 5I = 0$. **[2021(S)]**

3. (i) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 11 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ तो AB का मान बताइए। **[2018(SB)]**

(ii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिय। **[2010, 14, 18(SB)]**

(iii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$. तो $A^3 + A^2 + A$ का मान ज्ञात करे। **[2018(S)]**

4. आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये। **[2015]**

5. सिद्ध करें $\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$ हरमिटियन आव्यूह है। **[2013]**

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करें। $A^{-1} = A$. **[2011]**

7. सिद्ध कीजिए आव्यूह $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$ ऐकिक आव्यूह हैं। **[2010]**

हल एवं संकेत

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. (d) **2.** (b) **3.** (b) **4.** (a) **5.** (a) **6.** (b) **7.** (a) **8.** (a)
9. (c) **10.** (a) **11.** (c) **12.** (c) **13.** (b)

अति लघुउत्तरीय प्रश्न

1. (a) यहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-2 & 8-3 & 8-4 \\ 8-4 & 9-2 & 8-4 \\ 8-4 & 8-4 & 9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad 3A + B = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 6+3 & 9+7 \\ 0+1 & 6+2 & 15+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

(c) यहाँ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A - B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 2-7 \\ 3-2 & 5-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(d) **शून्य या रिक्त आव्यूह** (Zero or Null Matrix) : यदि किसी आव्यूह के सारे तत्व शून्य हों तो इसे शून्य या रिक्त आव्यूह (Zero or Null Matrix) कहते हैं। इसे O से सूचित करते हैं।

जैसे : $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ आदि शून्य आव्यूह हैं।

शून्य आव्यूह की कोटि शून्य होती है।

(e) यहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \\ 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+1\times 1+2\times 2 & 0\times 1+1\times 0+2\times(-1) & 0\times 2+1\times(-1)+2\times 0 \\ 1\times 0+0\times 1+(-1)\times 2 & 1\times 1+0\times 0+(-1)\,(-1) & 1\times 2+0\times(-1)+(-1)\times 0 \\ 2\times 0+(-1)\,(1)+0\times 2 & 2\times 1+(-1)\times 0+0\times -1 & 2\times 2+(-1)(-1)+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(g) $A = \begin{bmatrix} 1-2i & 2+3i & 3-4i \\ 4+5i & 5-6i & 6+7i \\ 8 & 7-8i & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1+2i & 2-3i & 3+4i \\ 4-5i & 5+6i & 6-7i \\ 8 & 7+8i & 9 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 1+2i & 4-5i & 8 \\ 2-3i & 5+6i & 7+8i \\ 3+4i & 6-7i & 9 \end{bmatrix}$

2. (a) दिया गया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+2\times 3 & 1\times 2+2\times(-1) \\ 2\times 1+(-1)\times 2 & 2\times 2(-1)\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+2\times 2 & 1\times 0+2\times 1 \\ 2\times 1+(-1)\times 2 & 2\times 0+2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+0\times 2 & 1\times 0+0\times 1 \\ 2\times 1+1\times & 2\times 0+1\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 - AB + B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-5+1 & 0-2+0 \\ 0-0+4 & 5+1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ उत्तर

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 6-5 = 1 \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

सहगुणनखंड $A_{11} = 3,\ A_{12} = -1,\ A_{21} = -5,\ A_{22} = 2$

सहगुणनखंड से बना आव्यूह $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad Adj\ A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad A^{-1} = \frac{adj A}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} x+2y-z \\ x+y \\ x-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x+2y-z = 3$ ...(1)

$x + y = 4$ ...(2)

$x - z = 1$ ...(3)

(2) से $y = 4-2$

अतः (1) तथा (3) $\quad x + 2(4-x) - z = 3 i.e., \quad x + z = 5$ ...(4)

अतः (3) + (4) से $\quad 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

(3) में x का मान रखने पर $\quad 3 - z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 2$

अतः $x = 3,\ y = 1,\ z = 2$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times 1+2\times 2 & 1\times 2+2\times(-1) \\ 2\times 1+(-1)\times 2 & 2\times 2+(-1)\times(-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\times 1+0\times 2 & 1\times 0+0\times 1 \\ 2\times 1+1\times 2 & 2\times 0+1\times 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 & 0-0 \\ 0-4 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8+9 & 2+6+3 & 3+4+12 \\ 4+12+6 & 8+9+2 & 12+6+8 \\ 3+4+12 & 6+3+4 & 9+2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18-2 & 11-4 & 19-6 \\ 22-8 & 19-6 & 26-4 \\ 19-6 & 13-2 & 27-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 7 & 13 \\ 14 & 13 & 22 \\ 13 & 11 & 19 \end{bmatrix}$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 + 3A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+3 & 8+6 & 8+6 \\ 8+6 & 9+3 & 8+6 \\ 8+6 & 8+6 & 9+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 14 \\ 14 & 12 & 14 \\ 14 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad\therefore\quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times +0\times 0 & 1\times 0+0\times(-1) \\ 0\times 1+(-1)\times 0 & 0\times 0+(-1)(-1) \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+0\times 0 & 1\times 0+0\times(-1) \\ 0\times 1+1\times 0 & 0\times 0+1\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$$

7. (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad\therefore\quad 2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A' = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i \\ 1+2i & 2 \end{bmatrix}$ [पंक्ति को स्तंभ तथा स्तंभ से पंक्ति में बदलने पर]

8. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad\therefore\quad 3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad\therefore\quad A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A = A' \quad \therefore \quad A$ सममित है।

9. परिभाषा देखें—(i) 5; (ii) 7; (iii) 6; (iv) 15; (v) 3; (vi) 11; (vii) 12; (viii) 13; (ix) 14; (x) 10।

✍ लघुउत्तरीय प्रश्न/दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$\because$ A में स्तंभ की संख्या $= 3 = B$ में पंक्ति की संख्या

अत: AB परिभाषित है।

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\times 1+1\times(-1)+2\times 2 & 0\times(-2)+1\times 0+2\times(-1) \\ 1\times 1+2\times(-1)+3\times 2 & 1\times(-2)+2\times 0+3\times(-1) \\ 2\times 1+3\times(-1)+3\times 2 & 2\times(-2)+3\times 0+4\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

(b) यहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-2)-0+5(1+2)$
$= 2\times 2+15 = 4+15 = 19 \neq 0$

$|A|$ के प्रथम पंक्ति के सहगुणनखंड

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 5;\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$|A|$ के द्वितीय पंक्ति के सहगुणनखंड

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} == -4;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 9;\ A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$|A|$ तृतीय पंक्ति के सहगुणनखंड

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$\therefore$ $B =$ सहगुणनखंडों का आव्यूह $= \begin{bmatrix} 2 & 5 & -10 \\ -4 & 9 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Adj. $A = B' = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \\ -10 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -14-20$
$= -34$

cofactor of $2 = A_{11} = -7$

cofactor of $5 = A_{12} = -4$

cofactor of $4 = A_{21} = -5$

cofactor of $-7 = A_{22} = 2$

$\therefore$ cofactor matrix $B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Adj $A = B' = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{|A|} = -\frac{1}{34}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{34} & \frac{5}{34} \\ \frac{4}{34} & \frac{-2}{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{34} & \frac{5}{34} \\ \frac{2}{17} & \frac{-1}{17} \end{bmatrix}$$

(b) यहाँ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ [गुणन से]

अत: $A^2-4A-5I=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}9-4-5&8-8-0&8-8-0\\8-8-0&9-4-5&8-8-0\\8-8-0&8-8-0&9-4-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$$

$\therefore\quad A^2-4A-5I=0$ उत्तर

3. (i) $A=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-3&4\\3&-2&3\end{bmatrix}$

यहाँ A तथा B 3×3 क्रम के आव्यूह हैं। जहाँ A में पंक्तियों की संख्या $=3=B$ में स्तंभों की संख्या अत: AB परिभाषित है।

$\therefore\quad AB=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-3&4\\3&-2&3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(-1)\times 1+(-1)(-2)+1\times 3&(-1)\times 1+(-1)(-3)+1\times(-2)&(-1)\times(-1)+(-1)\times 4+1\times 3\\2\times 1+2\times(-2)+(-2)(3)&2\times 1+2\times(-3)+(-2)(-2)&2\times(-1)+2\times 4+(-2)\times 3\\-3\times 1+(-3)\times(-2)+3\times 3&(-3)\times 1+(-3)(-3)+3\times(-2)&(-3)\times(-1)+(-3)\times 4+3\times 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+2+3&-1+3-2&1-4+3\\2-4-6&2-6+4&-2+8-6\\-3+6+9&-3+9-6&3-12+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\-8&0&0\\12&0&0\end{bmatrix}$$

(ii) $A=\begin{bmatrix}7&-1&-1\\10&-2&1\\6&3&-2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\quad |A|=\begin{vmatrix}7&-1&-1\\10&-2&1\\6&3&-2\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}-2&1\\3&-2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}10&1\\6&-2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}10&-2\\6&3\end{vmatrix}$$

$$=7(4-3)+(-20-6)-(30+12)=7-26-42=-61\neq 0$$

अत: व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब आव्यूह के सहगुणनखण्ड

$A_{11}=\begin{vmatrix}-2&1\\3&-2\end{vmatrix}=1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}10&1\\6&-2\end{vmatrix}=26,\ A_{13}=\begin{vmatrix}10&-2\\6&3\end{vmatrix}=42$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&-1\\3&-2\end{vmatrix}=-5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}7&-1\\6&-2\end{vmatrix}=-8,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}7&-1\\6&3\end{vmatrix}=-27$

$A_{31}=\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}7&-1\\10&1\end{vmatrix}=-17,\ A_{33}=\begin{vmatrix}7&-1\\10&-2\end{vmatrix}=-4$

अत: सह-खण्ड आव्यूह (Matrix of co-factors),

$$B=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&26&42\\-5&-8&-27\\-3&-17&-4\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad Adj.\ A=B'=\begin{bmatrix}1&-5&-3\\26&-8&-17\\42&-27&-14\end{bmatrix}$$

पुन: A का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a matrix)

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{adj.\,A}{|A|} = -\frac{1}{61}\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{61}\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{bmatrix}$$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6+0 & 2+2+0 & 0+10+0 \\ 3+3+10 & 1+1+20 & 0+5-15 \\ 2+12-6 & 4+4-12 & 0+20+9 \end{bmatrix}$$

i.e., $$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 16 & 27 & -10 \\ 8 & -4 & 29 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 1 & 27 & -10 \\ 8 & -4 & 29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+12+20 & 14+4+40 & 0+20-30 \\ 16+81-20 & 32+27-40 & 0+135+30 \\ 8-12+58 & 16-4+116 & 0-20-87 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 58 & -10 \\ 77 & 19 & 165 \\ 54 & 128 & -107 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3 + A^2 + A = \begin{bmatrix} 39 & 58 & -10 \\ 77 & 19 & 165 \\ 54 & 128 & -107 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 16 & 27 & -10 \\ 8 & -4 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 39+7+1 & 58+4+2 & -10+10+0 \\ 77+16+3 & 19+27+1 & 165-10+5 \\ 54+8+2 & 128-4+4 & -107+29-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 64 & 0 \\ 96 & 47 & 160 \\ 64 & 128 & -81 \end{bmatrix} \quad \text{Ans}$$

4. माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(1+4) - 5(3-2) + 3(6-1)$

$= -6 - 5 + 15 = 4 \neq 0$, अतः इसका व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5; \; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

सह-खण्ड (co-factor) आव्यूह $B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad adj.\, A = B' = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$

अत: व्युत्क्रम आव्यूह $A^{-1} = \frac{adj.A}{|A|} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{13}{4} \end{bmatrix}$ उत्तर

5. माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$ तो $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3-4i \\ 2+3i & 0 & 4+5i \\ 3+4i & 4-5i & 2 \end{bmatrix}$

तब $A^{\theta} = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix} = A \quad \therefore \quad A^{\theta} = A$

अत: A हरमिटियन आव्यूह है।

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad |A| = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\,(0-1) = -1 \neq 0$

अत: A का व्युत्क्रम होगा।

अब $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \quad adj A =$ सहखंडज आव्यूह $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$ अत: $A^{-1} = A$ सिद्ध हुआ।

7. $A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \bar{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$

अब $A^{\theta} = (\bar{A})^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$

$$A^{\theta}A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & !+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1\times 1 + (1+i)(1-i) & 1\times(1+i) + (1+i)(-1) \\ (1-i)\times 1 + (-1)(1-i) & (1-i)(1+i) + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+1-i^2 & 1+i-1-i \\ 1-i+i-1 & 1-i^2+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+1+1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\times 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= I$

अत: आव्यूह ऐकिक आव्यूह है।

□□□