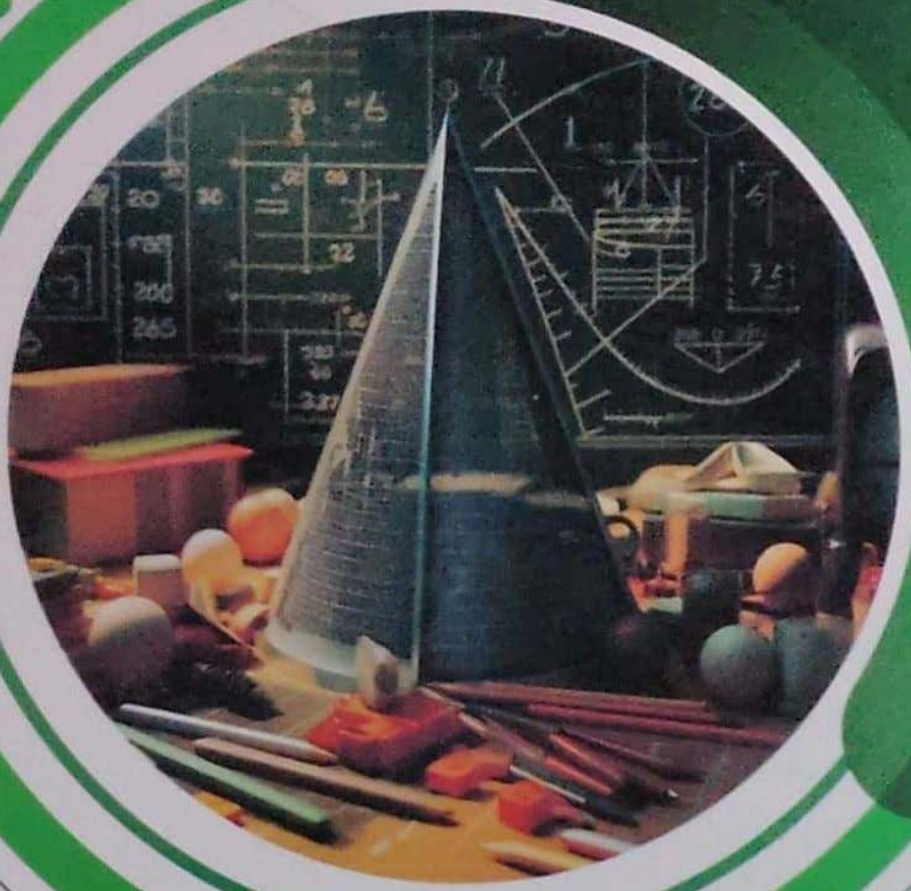
सार्थक



According to New Syllabus 2024-25
Approved by UPBTE under
NEP-2020 & AICTE

गणित–II

MATHEMATICS-II

अजय कुमार

JAI PRAKASH NATH PUBLICATIONS
Meerut

सार्थक

According to New Syllabus 2024-25
Approved by UPBTE Under NEP-2020 & AICTE

गणित-II

Mathematics-II

(द्वितीय सेमेस्टर : डिप्लोमा इंजीनियरिंग के सभी विद्यार्थियों के लिए)

लेखक :

अजय कुमार

एम० एस–सी० (गणित)
व्याख्याता (भू०पू०)
कु० मायावती राजकीय महिला पालीटेक्निक
बादलपुर (गौतमबुद्धनगर)

परामर्शदाता

श्रीमती अनुला
व्याख्याता (गणित)
राजकीय पालीटेक्निक, हरदोई

श्री अमित कुमार सिंह
प्रवक्ता (गणित)
लखनऊ पालीटेक्निक, लखनऊ

श्री ब्रजेश कुमार
(प्रधानाचार्य)
हंडिया पालीटेक्निक, हंडिया (प्रयागराज)

डॉ0 संजीव कुमार सिंह
प्रवक्ता (गणित)
राजकीय पालीटेक्निक, अयोध्या

श्री राम भवन
व्याख्याता (गणित)
चंदौली पालीटेक्निक, चंदौली

सुमित प्रताप सिंह
व्याख्याता (गणित)
राजकीय पालीटेक्निक, बरेली

कुलदीप यादव
प्रवक्ता (गणित)
हडिया पालीटेक्निक, हडिया

रियाजुद्दीन
व्याख्याता (गणित)
राजा बलवन्त सिंह पालीटेक्निक, बिचपुरी, आगरा

डा० शैलेन्द्र
व्याख्याता (गणित)
इशान कॉलिज ऑफ इंजीनियरिंग, मथुरा

प्रकाशक :

जय प्रकाश नाथ पब्लिकेशन्स

41/5, जागृति विहार
हीरो शोरूम के पीछे, गढ़ रोड, मेरठ – 250 004

★ प्रकाशक :
जय प्रकाश नाथ पब्लिकेशन्स
41/5, जागृति विहार
हीरो शोरूम के पीछे, गढ़ रोड, मेरठ – 250 004
Tel. : Off. : 2762403, 4056123
Fax : (0121) 2600606
email : jpnpmrt@hotmail.com
: info@jpnpbooks.com
Web : www.jpnpbooks.com

© लेखक

★ प्रथम संस्करण : 2025–26

ISBN : 978-93-49173-33-0

★ मूल्य : ₹ 315.00

★ *लेजर टाइप–सैटिंग*
बालाजी कम्प्यूटर्स,
मेरठ।

★ *मुद्रक :*
इंडियन प्रेस,
मेरठ।

IT-101

प्रस्तावना

प्रस्तुत संस्करण

ए०आई०सी०टी०ई० के पाठ्यक्रमानुसार प्राविधिक शिक्षा उ० प्र० द्वारा स्वीकृत नवीनतम् पाठ्यक्रम (एन०ई०पी० 2020) पर आधारित डिप्लोमा इंजीनियरिंग के **द्वितीय सेमेस्टर (2024-25)** के लिए यह पुस्तक **'गणित-द्वितीय'** आपके सम्मुख हैं। इस पुस्तक की विशेषतायें निम्नलिखित है :

- पाठ्य सामग्री को सरल एवं सुस्पष्ट भाषा में समझाया गया है।
- साधित प्रश्न एवं प्रश्नावली के अंतर्गत डिप्लोमा स्तर की विभिन्न परीक्षाओं मे पूछे गए तथा अन्य प्रश्नों का यथास्थान समावेश कर दिया गया है तथा साधित प्रश्नों को हल करते समय छोटे-छोटे स्टेपों का ध्यान रखा गया है, ताकि छात्रों को उनको समझने में कठिनाई न हो।
- प्रश्नावली में प्रश्नों को यथा संभव साधित प्रश्नों के क्रमानुसार रखा गया है, ताकि छात्रों को साधित प्रश्न समझकर हल करने में आसानी हो।
- प्रत्येक अध्याय में बहुविकल्पीय प्रश्नों का समावेश किया गया है।

मैं उन सभी छात्र-छात्राओं एवं आदरणीय अध्यापकों का आभारी रहूँगा जो पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने के लिए अपने अनुभव से परिपक्व बहुमूल्य सुझाव भेजने तथा पुस्तक में रह गयी त्रुटियों से अवगत कराने की कृपा करेंगे। मैं आशा करता हूँ, कि यह पुस्तक विद्यार्थियों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी।

इस पुस्तक को तैयार करते वक्त जिन विद्वान शिक्षकों एवं मित्रों के मार्गदर्शन एवं बहुमूल्य सुझाव प्राप्त हुए हैं। मैं उनका हृदय के आभार व्यक्त करता हूँ।

इसके साथ-साथ मैं प्रकाशक जय प्रकाश नाथ पब्लिकेशन्स तथा बालाजी कम्प्यूटर्स का भी आभारी हूँ जिन्होंने समय-समय पर अपने सुझाव देकर इस पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने में सहायता की।

—अजय कुमार

SYLLABUS
Mathematics-II

[Common to all Engineering Courses]

L	T	P
3	1	-

■ COURSE OBJECTIVES :

This course is designed to give a comprehensive coverage at an introductory level to the subject of matrices, integral calculus, coordinate geometry, basic elements of vector algebra and first order differential equations.

■ COURSE OUTCOMES

After undergoing this course, the students will be able to :

- Solve linear equations using determinants and matrix algebra.
- Perform integration techniques, solve area and volume problems.
- Solve first order differential equations and apply numerical methods.
- Form and interpret equations of lines, circles and conics.
- Perform vector operations and solve related engineering problems of relevant branch.

COURSE CONTENTS

1. DETERMINANTS AND MATRICES **(10 Periods)**

Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Carmmer's rule. Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.

2. INTEGRAL CALCULUS **(12 Periods)**

Integration as inverse operation of differentiation. Simple integration by substitution, by parts and by partial function (for linear factors only). Introduction to definite integration. Use of formula $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx$ for solving problems, where m and n are positive integers. Applications of integration for (i). Simple problems on evaluation of area bounded by a curve and axes. (ii) calculation of volume of a solid formed by revolution of an area about axes. (Simple problems).

3. DIFFERENTIAL EQUATIONS AND NUMERICAL METHODS **(15 Periods)**

Definition of differential Equations, order and degree of a differential equation, formation of differential equations, solution of first order and first degree differential equations by variable separable method (simple problems). Trapezoidal rule, Simpson's 1/3 and Simpson's 3/8 rule and their applications in simple cases, MATLAB-Simple Introduction.

4. TWO DIMENSIONAL CO-ORDINATE GEOMETRY **(10 Periods)**

Equation of straight line in various standard forms (without proof), intersection of two straight lines, angle between two lines. Parallel and perpendicular lines, perpendicular distance formula.

(i) Centre and Radius,

(ii) Three points lying on it and

(iii) Co-ordinates of end points of a diameter.

Definition of conics (Parabola, Ellipse, Hyperbola), their standard equations without proof. Problems on conics when their foci, directories or vertices are given.

5. VECTOR ALGEBRA **(9 Periods)**

Definition notation and rectangular resolution of a vector. Addition and subtraction of vectors. Scalar and vector product of two vectors. Simple problems related to work, moment and angular velocity.

■ INSTRUCTIONAL STRATEGY

The content of this course is to be taught on conceptual basis with plenty of real world examples. Differential equations and applications of differential equations can be taught with engineering applications of relevant branch.

■ MEANS OF ASSESSMENT

- Assignments and Quiz/Class Tests
- Mid-term and End-term Written Tests
- Model/Prototype Making

SUGGESTED DISTRIBUTION OF MARKS

Topic	Time Allotted (Periods)	Marks Allotted (%)
1.	10	20
2.	12	20
3.	15	25
4.	10	20
5.	09	15
Total	**56**	**100**

विषय सूची

खण्ड-1 : आव्यूह 1-

1. सारणिक 3
2. आव्यूह 33
3. आव्यूह विधि से रेखीय समीकरण निकाय का हल 52

खण्ड-2 : समाकलन गणित 65-2

4. समाकलन 65-
5. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन 79-
6. खण्डशः समाकलन 97-1
7. आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन 117-1
8. कुछ विशिष्ट समाकलन 132-1
9. निश्चित समाकलन 161-1
10. समाकलन के अनुप्रयोग 180-2

खण्ड-3 : अवकल समीकरण 204-232

11. प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण 204-216
12. आंकिक समाकलन 217-229
13. MATLAB का परिचय 230-232

खण्ड-4 : निर्देशांक ज्यामिति 233-320

14. सरल रेखा 233-259
15. वृत्त 260-283
16. परवलय 284-295
17. दीर्घवृत्त 296-309
18. अतिपरवलय 310-320

खण्ड-5 : सदिश बीजगणित 321-368

19. सदिशों का योग, अन्तर एवं वियोजन 321-334
20. दो सदिशों का अदिश या बिन्दु गुणन 335-347
21. सदिश या वज्र गुणन 348-362
22. सदिश गुणनफल के अनुप्रयोग 362-368

पूज्य माताजी व पिताजी
की पुण्य स्मृति को
''सादर समर्पित''

खण्ड-1 : आव्यूह

अध्याय 1

सारणिक (Determinants)

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

सारणिक का विकास युगपत समीकरणों के हल को आसान बनाने के लिए हुआ। बाद में इसका प्रयोग गणित की अनेक शाखाओं में होने लगा।

1.1.1. परिभाषा (Definitions)

मान लिया $a_1x + b_1y = 0$ ...(i)

$a_2x + b_2y = 0$ ...(ii)

(i) तथा (ii) से

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{-y}{x} = \frac{a_2}{b_2}$$

अर्थात् $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ या $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ...(iii)

इस फलन को निम्नलिखित रूप से व्यक्त किया जा सकता है—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{...(iv)}$$

∴ (iii) तथा (iv) से $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ ...(v)

(v) में बायें पक्ष $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ को द्वितीय क्रम का सारणिक (Determinant) कहते हैं। a_1, b_1, a_2, b_2 को सारणिक के **अवयव** कहते हैं। **क्षैतिज** (Horizontal) रूप में लिखे गए **अवयव** पंक्तियों के अवयव तथा **ऊर्ध्वाधर** (Vertical) रूप में लिखे गए अवयव **स्तम्भ** के अवयव कहलाते हैं। स्पष्ट है (v) में दो पंक्तियाँ $|a_1 \quad b_1|$ तथा $|a_2 \quad b_2|$, तथा दो स्तम्भ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$ तथा $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$ हैं। a_1, b_2 जो विकर्ण के अवयव के रूप में रखे गए हैं, उसे इस सारणिक का **मुख्य विकर्ण** (leading diagonal) कहते हैं।

(v) के दाहिने पक्ष अर्थात् $a_1b_2 - a_2b_1$ को सारणिक का मान (value) कहते हैं। सामान्यत: मान को Δ या D से सूचित किया जाता है।

अत: 4 अवयव a_1, b_1, a_2, b_2 को वर्गाकार रूप में दो क्षैतिज तथा दो ऊर्ध्वाधर पंक्तियों में दो ऊर्ध्व रेखाओं (two vertical bars) | | के बीच रेखने के ढंग को, जिसका कुछ निश्चित मान हो, 2×2 क्रम का सारणिक कहते हैं।

$$\Delta \text{ या } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{matrix}$$

गौण विकर्ण (off diagonal)

पंक्तियाँ (Rows)

मुख्य विकर्ण (leading diagonal)

$C_1 \quad C_2$

स्तंभ (Columns)

इसी तरह यदि $a_1x + b_1y + c_1z = 0;\quad a_2x + b_2y + c_2z = 0;\quad a_3x + b_3y + c_3z = 0$

तो इन समीकरणों से x, y, z को विलुप्त करने पर प्राप्त राशि को निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2) \quad \ldots(vi)$$

(vi) के बायें पक्ष को हम तृतीय क्रम (या कोटि) का सारणिक कहते हैं क्योंकि इसमें तीन पंक्तियाँ $|a_1\ b_1\ c_1|$, $|a_2\ b_2\ c_2|$ तथा $|a_3\ b_3\ c_3|$ तथा तीन स्तंभ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$ तथा $\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}$ होते हैं।

(vi) का दायाँ पक्ष सारणिक **मान** या **विस्तार** के नाम से जाना जाता है। जिस विकर्ण में अवयव a_1, b_2, c_3 स्थित हैं उसे मुख्य विकर्ण कहते हैं। मुख्य विकर्ण के पदों में इसे सारणिक (a_1, b_2, c_3) से भी व्यक्त किया जाता है।

उपरोक्त विवेचन से स्पष्ट है कि किसी सारणिक में **पंक्ति तथा स्तंभ की संख्या बराबर** होती है अर्थात् इसका रूप **वर्गाकार** होता है।

1.1.2 सारणिक की कोटि या क्रम (Order of a Determinant)

किसी सारणिक में जितनी पंक्तियाँ या स्तम्भ होते हैं उसे सारणिक का **क्रम** या **कोटि** कहते हैं।

किसी सारणिक में अवयवों की **संख्या** उसके **कोटि के वर्ग** के बराबर होती है। जैसे—द्वितीय क्रम के सारणिक में अवयवों की संख्या 2^2 अर्थात् 4 तथा तृतीय क्रम के सारणिक में अवयवों की संख्या के 3^2 या 9 होगी।

इस तरह

सारणिक में अवयवों की संख्या $= n^2$

जहाँ n सारणिक की कोटि है।

1.1.3 उपसारणिक या लघुघटक (Minors)

किसी सारणिक के किसी अवयव से होकर जाने वाली पंक्ति तथा स्तंभ को निकाल देने पर जो सारणिक प्राप्त होता है उसे उस अवयव का उपसारणिक या लघुघटक कहते हैं।

किसी अवयव a_{ij} के लघुघटक को सामान्यतः M_{ij} से सूचित किया जाता है।

जैसे— सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में ...(1)

प्रथम अवयव 1 का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$

↓

अवयव 5 का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$

1.1.4 सहखंड (Co-factors)

किसी सारणिक के किसी अवयव a_{ij} का सहखंड उस अवयव के उपसारणिक M_{ij} में उचित चिह्न (धन या ऋण) लगाने से प्राप्त होता है। यह उचित चिह्न $(-1)^{i+j}$ से दिया जाता है, जहाँ i तथा j क्रमशः उस पंक्ति तथा स्तंभ को बताते हैं जिसमें वह अवयव स्थित है।

अर्थात् a_{ij} का सहखंड $= (-1)^{i+j} M_{ij}$

जैसे : सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में 1 का सहखंड ज्ञात करना है; 1 प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ में है, अतः $i = 1, j = 1$

$\therefore$ 1 का सहखंड $= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^2 (45 - 48) = 1 \times (-3) = -3$

इसी तरह 6 का सहखंड $= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ [$\because$ अवयव 6 के लिए $i = 2, j = 3$]

$= (-1)^5 (8 - 14) = -1 \times (-6) = 6$

[$\because$ 1 प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ में है अतः $i = 1, j = 1$ इसी तरह 6 के लिए $i = 2, j = 3$]

1.1.5.1 सारणिक का विस्तार (Expansion of a Determinant)

(i) द्वितीय क्रम का सारणिक : हम देख चुके है कि

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(− और + चिह्न विकर्णों के ऊपर)

स्पष्ट है कि द्वितीय कोटि के सारणिक के विस्तार के लिए हम मुख्य विकर्ण के अवयवों को गुणा कर उसमें से दूसरे विकर्ण के अवयवों के गुणनफल को घटा देते हैं।

जैसे : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 4 \times 3 = 10 - 12 = -2$

(ii) तृतीय क्रम का सारणिक : किसी पंक्ति या स्तंभ के सापेक्ष सारणिक का विस्तार निम्न रूप में किया जा सकता है।

प्रथम पंक्ति के सापेक्ष विस्तार से $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= a_1 \times a_1$ का उपसारणिक $- b_1 \times b_1$ का उपसारणिक $+ c_1 \times c_1$ का उपसारणिक

$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)$

$= a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$

जहाँ A_1, B_1 तथा C_1 क्रमशः a_1, b_1 तथा c_1 के सहखण्ड हैं।

कार्यविधि : प्रथम पंक्ति (या प्रथम स्तंभ) के प्रयोग से सारणिक का मान :

(i) प्रथम पंक्ति (या प्रथम स्तंभ) के प्रत्येक अवयव का लघुघटक ज्ञात करें।

(ii) प्रथम अवयव से प्रारम्भ कर इनके संगत लघुघटकों से गुणा करें।

(iii) पहले गुणनफल से पहले '+'; द्वितीय से पहले '–' तथा तृतीय से पहले '+' का चिह्न लगायें।

(iv) इनका योग सारणिक का मान होगा।

उदाहरण : $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} h & f \\ g & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} h & b \\ g & f \end{vmatrix}$ [प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर]

$= a(bc - f^2) - h\,(ch - gf) + g\,(hf - bg)$

$= abc - af^2 - ch^2 + fgh + fgh - bg^2$

$= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

टिप्पणी : (i) सारणिक का विस्तार किसी भी पंक्ति या स्तंभ के अनुसार किया जा सकता है। परन्तु विद्यार्थीगण प्रारंभ में पहली पंक्ति या स्तंभ के सापेक्ष ही विस्तार का अभ्यास करें।

(ii) विस्तार की सुगमता के लिए उस पंक्ति या स्तंभ को चुनना चाहिए जिसमें अधिकतम शून्य हों।

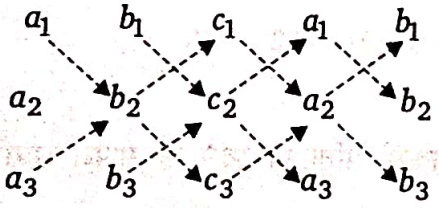
(iii) सहखंड के लिए 3×3 सारणिक के लिए चिन्ह योजना $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

1.1.5.2 सैरस विधि से तृतीय क्रम के सारणिक का विस्तार (Expansion by Sarrus Diagram)

माना तृतीय कोटि का सारणिक

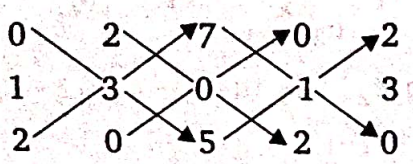
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसका विस्तार सैरस विधि से करने के लिए दी गई सारणिक के दाहिनी ओर प्रथम स्तंभ एवं द्वितीय स्तंभ के अवयवों को निम्न रूप में लिखते हैं तथा चित्रानुसार बिंदुदार रेखायें विकर्ण के समानान्तर तथा लंबवत् खींचते हैं। पुनः मुख्य विकर्ण के समानांतर अवयवों (ऊपर से नीचे की ओर) के गुणनफल का योग प्राप्त करते हैं एवं इसमें से विकर्ण के लंबवत् (नीचे से ऊपर की ओर) के अवयवों के गुणनफल के योग का अंतर प्राप्त करते हैं।



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

जैसे : $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ को सैरस विधि से लिखने पर



$\therefore \quad \Delta = (0\times 3\times 5 + 2\times 0\times 2 + 7\times 1\times 0) - (2\times 3\times 7 + 0\times 0\times 0 + 5\times 1\times 2)$
$= 0 + 0 + 0 - (42 + 0 + 10) = -52$

नोट :

- यह विधि तृतीय कोटि के सारणिक के लिए प्रयुक्त होती है।

1.1.6. सारणिकों के गुण (Properties of Determinants)

(i) किसी सारणिक के प्रत्येक पंक्ति को स्तंभ में तथा प्रत्येक स्तंभ को पंक्ति में परिवर्तित कर दिया जाए तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता।

माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ...(1)

तो $\Delta = a_1\,(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1\,(a_2\,c_3 - a_3c_2) + c_1\,(a_2b_3 - a_3b_2)$ ...(2)

$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ [पंक्तियों तथा स्तंभों को परस्पर बदलने पर]

$= a_1\,(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1)$
$= a_1\,(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1\,(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1\,(a_2b_3 - a_3b_2)$ ...(3)

$\therefore$ (2) तथा (3) से $\Delta = \Delta'$

(ii) यदि किसी सारणिक के दो आसन्न (adjacent) पंक्तियों या स्तंभों को परस्पर बदल दिया जाए तो सारणिक के संख्यात्मक मान में कोई परिवर्तन नहीं होता किन्तु उसका चिह्न बदल जाता है।

उपपत्ति : माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ...(1)

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1\,(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1\,(a_2b_3 - a_3b_2)$
$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3\,c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$

अर्थात् $\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3) - (a_1b_3c_2 + b_1a_2c_3 + c_1a_3b_2)$ ...(2)

तथा मान $\Delta' = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [(1) में प्रथम दो पंक्तियों को परस्पर बदलने पर]

$= a_2\,(b_1c_3 - b_3c_1) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + c_2\,(a_1b_3 - a_3b_1)$
$= a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 - b_2a_1c_3 + b_2a_3c_1 + c_2a_1b_3 - c_2a_3b_1$
$= (a_2b_1c_3 + b_2a_3c_1 + c_2a_1b_3) - (a_2b_3c_1 + b_2a_1c_3 + c_2a_3b_1)$
$= -[(a_1b_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3) - (a_1b_3c_2 + b_1a_2c_3 + c_1b_2a_3)]$
$= -\Delta$ [(2) से]

अर्थात् $\Delta' = -\Delta$

(iii) यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

जैसे : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0\,(2\times 6 - 3\times 5) - 0\,(1\times 6 - 4\times 3) + 0\,(1\times 5 - 2\times 4) = 0$

[प्रथम स्तंभ से विस्तार करने पर]

(iv) यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ या दो स्तंभ समान (Identical) हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्ति : माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [यहाँ पहली तथा दूसरी पंक्ति समान हैं]

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [पहली तथा दूसरी पंक्ति को परस्पर बदलने पर]

$= -\Delta$ [गुण (ii) से]

अर्थात् $\Delta = -\Delta$ या $2\Delta = 0$ $\therefore$ $\Delta = 0$

(v) यदि किसी सारणिक के किसी पंक्ति या स्तंभ के प्रत्येक अवयव में किसी एक अशून्य संख्या m से गुणा (या भाग) किया जाए तो सारणिक के मान में m से गुना (या भाग) हो जाता है।

उपपत्ति : माना $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta$ तो

$$\Delta = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1) \quad \text{[विस्तार से]} \quad ...(1)$$

अब $\Delta' = \begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ma_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - ma_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + ma_3 (b_1c_2 - b_2c_1)$

$= m\{a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)\}$

$= m \times \Delta$ [(1) से]

स्पष्ट है, यदि किसी पंक्ति (या स्तंभ) में कोई कॉमन फैक्टर हो तो इसे सारणिक से बाहर गुणक के रूप में निकाला जा सकता है।

(vi) यदि किसी पंक्ति या स्तंभ का प्रत्येक अवयव दो या अधिक पदों का योग (या अंतर) हो तो सारणिक को उसी कोटि के दो या अधिक सारणिकों के योग (या अंतर) के रूप में प्रकट किया जा सकता है।

अर्थात् $\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) यदि सारणिक की किसी पंक्ति या स्तंभ के प्रत्येक अवयव को समान संख्या से गुणा कर दूसरी पंक्ति या स्तंभ के संगत अवयवों में जोड़ या घटा दिया जाए तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता।

1.1.7 सारणिक समीकरण (Determinant Equation)

किसी सारणिक, जिसमें कम-से-कम एक अज्ञात चर (variable) हो, को शून्य के बराबर करने से सारणिक समीकरण प्राप्त होता है।

जैसे—

$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & x & x \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$, सारणिक समीकरण हैं।

1.1.8 सारणिक के मान प्राप्त करने की कार्य विधि (Working Rule)

यदि दिया गया सारणिक द्वितीय क्रम का है तो मान आसानी से निकल आता है। किन्तु यदि सारणिक तृतीय या ऊँचे क्रम का हो, तो हम सारणिक के गुणों का प्रयोग करके किसी पंक्ति या स्तंभ में अधिक से अधिक शून्य लाने की कोशिश करते हैं। तत्पश्चात् उस पंक्ति या स्तंभ के सापेक्ष उसका विस्तार कर देते हैं। इसके सारणिक का मान निकलना सहज हो जाता है।

(i) यदि किसी सारणिक के ith पंक्ति R_i (या स्तंभ C_i) में jth पंक्ति R_j (या स्तंभ C_j) के अवयवों को m से गुणा कर जोड़ते हैं, तो इसे हम निम्न प्रकार से लिखेंगे :

$$R_i \to R_i + mR_j \quad \text{या} \quad R_i = R_i + mR_j$$
$$C_i \to C_i + mC_j \quad \text{या} \quad C_i = C_i + mC_j$$

जैसे : $R_2 = R_2 + 2R_3$ बतलाता है कि दूसरी पंक्ति के अवयवों को दूसरी पंक्ति के अवयव तथा तीसरी पंक्ति के संगत अवयव में 2 से गुणा कर जोड़ने से प्राप्त परिणामों के जोड़ के रूप में लिखा गया है।

(ii) यदि दो पंक्तियों R_i तथा R_j को परस्पर बदला जाए तो इसे $R_i \leftrightarrow R_j$ तथा इसी प्रकार दो स्तंभों C_i तथा C_j के परस्पर बदलाव को $C_i \leftrightarrow C_j$ से सूचित करते हैं।

(iii) KR_i (या KC_j) i वीं पंक्ति (या jवें स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को K से गुणनफल को बताता है।

नोट :

- (i) यदि किसी सारणिक में किसी पंक्ति (या स्तंभ) के सभी अवयव शून्य हों, तो सारणिक का मान शून्य होगा।
- (ii) यदि किसी सारणिक के किसी पंक्ति (या स्तंभ) के दो अवयव शून्य हों, तो सारणिक का मान तीसरे अवयव तथा उसके सहखंड को गुणा करने से प्राप्त होता है—

$$e.g., \text{(i)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(12-10) = 4$$

सारणिक के प्रयोग

(i) किसी त्रिभुज, जिसके शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) हों, का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(ii) माना बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाली रेखा पर $A(x, y)$ कोई बिंदु हो तो उस रेखा का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(iii) तीन बिंदु $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) संगामी होंगे, यदि

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. सारणिक $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ में

(i) अवयव 1, 5 तथा 9 के लघुघटक ज्ञात करें। (ii) 4 तथा 8 के सहखण्ड ज्ञात करें।

हल : (i) अवयव 1 का लघुघटक $= \begin{vmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{vmatrix} = 5\times 9 - 8\times 6 = 45 - 48 = -3$

अवयव 5 का लघुघटक $= \begin{vmatrix}1 & 3\\7 & 9\end{vmatrix} = 9\times 1 - 7\times 3 = 9 - 21 = -12$

अवयव 9 का लघुघटक $= \begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{vmatrix} = 1\times 5 - 4\times 2 = 5 - 8 = -3$ उत्तर

(ii) सूत्र से किसी अवयव का सहखण्ड $= (-1)^{i+j} \times$ अवयव का लघुघटक

4 का सहखण्ड $= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\8 & 9\end{vmatrix}$ [∵ 4 द्वितीय पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ में है ∴ $i = 2,\ j = 1$]

$= (-1)^3\ (18 - 24) = (-1)\times(-6) = 6$

8 का सहखण्ड $= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}$ [∵ $i = 3,\ j = 2$]

$= (-1)^5\ (6 - 12) = (-1)\ (-6) = 6$ उत्तर

उदाहरण 2. सारणिक $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\5 & 6 & 1\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ का मान बतायें।

हल : यदि सारणिक का मान Δ हो, तो प्रथम पंक्ति के सापेक्ष विस्तार करने पर

$$\Delta = 2\begin{vmatrix}6 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}5 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}5 & 6\\1 & 2\end{vmatrix} = 2\ (18 - 2) - 3\ (15 - 1) + 4\ (10 - 6)$$

$= 2\times 16 - 3\times 14 + 4\times 4 = 32 - 42 + 16 = 48 - 42 = 6$ उत्तर

उदाहरण 3. बिना प्रसार किए निम्न सारणिकों का मान ज्ञात करें।

(i) $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\1 & b & c+a\\1 & c & a+b\end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\-1 & 2 & -2\\-1 & 2 & -2\end{vmatrix}$

हल : (i) दिया गया सारणिक $= \begin{vmatrix}1 & a+b+c & b+c\\1 & b+c+a & c+a\\1 & c+a+b & a+b\end{vmatrix}$ [$C_2 = C_2 + C_3$ से]

$= (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & b+c\\1 & 1 & c+a\\1 & 1 & a+b\end{vmatrix}$ [$(a+b+c)$ उभयनिष्ठ है]

$= (a+b+c)\times 0$ [∵ $C_1 = C_2$]

$= 0$ उत्तर

(ii) माना $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ यहाँ $R_2 = R_3$, अत: इसका मान शून्य होगा।

अर्थात् $\Delta = 0$ उत्तर

उदाहरण 4. (i) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$

(ii) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ ...(1)

पंक्ति तथा स्तंभ के रूपांतरण से

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad ...(2)$$

सिद्ध हुआ।

पुन: (1) से $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \text{ से} \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b+a)(b-a) \\ 0 & c-a & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

[R_2 तथा R_3 से क्रमश: $b-a$ तथा $c-a$ उभयनिष्ठ (common) लेने पर]

$$= (b-a)(c-a)\left[1\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & c+a \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & b+a \end{vmatrix}\right]$$

$$= (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)-0+0] = (b-a)(c-a)[c+a-b-a]$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = \{-(a-b)\}\{-(b-c)\} \times (c-a)\}$$

$\therefore$ $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$ ...(3)

अर्थात् $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad [(2) \text{ तथा } (3) \text{ से}]$$

सिद्ध हुआ।

(ii) $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y & x^2-y^2 & -z(x-y) \\ y-z & y^2-z^2 & -x(y-z) \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} \begin{bmatrix} R_1 = R_1 - R_2 \\ R_2 = R_2 - R_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x-y & (x+y)(x-y) & -z(x-y) \\ y-z & (y+z)(y-z) & -x(y-z) \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & x+y & -z \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 0 & x-z & x-z \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} \quad [R_1 = R_1 - R_2]$$

$$= (x-y)(y-z)(x-z) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$= -(x-y)(y-z)(z-x) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & x+y+z & -x \\ z & z^2-xy & xy \end{vmatrix} \quad [C_2 = C_2 - C_3]$$

$$= -(x-y)(y-z)(z-x) \left\{ 0 - 0 + 1 \begin{vmatrix} 1 & x+y+z \\ z & z^2-xy \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -(x-y)(y-z)(z-x)\{z^2 - xy - xz - yz - z^2\}$$

$$= -(x-y)(y-z)(z-x)\{-(xy+yz+zx)\}$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx) = \text{R.H.S.}$$

उदाहरण 5. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = bc + ca + ab + abc$

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & -a & -a \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \text{ से} \end{bmatrix}$

$$\Delta = (1+a)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -a & -a \\ 0 & c \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -a & -a \\ b & 0 \end{vmatrix}$$

$= (1+a)(bc-0) - 1(-ac-0) + (0+ab)$ (स्तम्भ के सापेक्ष विस्तार करने पर)

$= (1+a)bc + ac + ab$

$= bc + abc + ac + ab = abc\left[\frac{1}{a} + 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] = abc\left[1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$ का मान बिना प्रसार किए प्राप्त करें।

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & -bc \\ 1 & b & -ca \\ 1 & c & -ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

$= \Delta_1 - \Delta_2$ (माना) ...(1)

अब $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a & a^2 \\ abc & b & b^2 \\ abc & c & c^2 \end{vmatrix}$ [C_1 में abc से गुणा करने पर]

$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ac & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix}$ [R_1 से a, R_2 से b तथा R_3 से c उभयनिष्ठ लेने पर]

$= -\begin{vmatrix} 1 & bc & a \\ 1 & ac & b \\ 1 & ab & c \end{vmatrix}$ [C_1 तथा C_2 को परस्पर बदलने पर]

$= \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ [पुनः C_2 तथा C_3 को परस्पर बदलने पर]

अर्थात् $\Delta_1 = \Delta_2$ $\therefore$ $\Delta_1 - \Delta_2 = 0$

अर्थात् $\Delta = 0$ [(1) से]

उत्तर

उदाहरण 7. यदि ω इकाई का काल्पनिक घनमूल हो तो सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करें।

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega+\omega^2+1 & \omega^2 & 1 \\ \omega^2+1+\omega & 1 & \omega \end{vmatrix}$ [$C_1 = C_1 + C_2 + C_3$ से]

$= \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$= 0$

उत्तर

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3$

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2 - b^2 & b^2 \\ c^2 - (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} C_1 = C_1 - C_3 \\ C_2 = C_2 - C_3 \text{ से} \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a+b)(c+a-b) & b^2 \\ (c+a+b)[c-(a+b)] & (c+a+b)[c-(a+b)] & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

[C_1 तथा C_2 से उभयनिष्ठ $(a+b+c)$ बाहर निकालने पर]

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix} \quad [R_3 = R_3 - (R_1 + R_2) \text{ से}]$$

$$= (a+b+c)^2 \times \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} ab+ac-a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & bc+ab-b^2 & b^2 \\ -2ab & -2ab & 2ab \end{vmatrix} \quad [C_1 = aC_1 \text{ तथा } C_2 = bC_2 \text{ से}]$$

$$= (a+b+c)^2 \times \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} a(b+c) & a^2 & a^2 \\ b^2 & b(c+a) & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_1 = C_1 + C_3 \\ C_2 = C_2 + C_3 \text{ से} \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \frac{ab}{ab} \times 2ab \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} R_1 \text{ से } a,\ R_2 \text{ से } b \\ \text{तथा } R_3 \text{ से } 2ab \text{ बाहर निकालने पर} \end{bmatrix}$$

$$= 2ab(a+b+c)^2 [(b+c)\{(c+a) - b \times 0\} - b\{a-0\} + 0 \times \{ab - a(c+a)\}]$$
$$= 2ab(a+b+c)^2 [(b+c)(c+a) - ab]$$
$$= 2ab(a+b+c)^2 [bc + ab + c^2 + ac - ab]$$
$$= 2ab(a+b+c)^2 \times c(b+c+a) = 2abc(a+b+c)^3$$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 9. दिखायें कि $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

हल: बायाँ पक्ष $\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c+2b+2c & 2a+b-c-a+2c & 2a+2b+c-a-b \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

[$R_1 = R_1 + R_2 + R_3$ से]

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

[$(a+b+c)$ को उभयनिष्ठ रूप में बाहर लेने पर]

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \text{ से} \end{bmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के सापेक्ष विस्तार करने पर

$$= (a+b+c)\left[1\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2b & 0 \\ 2c & -(a+b+c) \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2b & -(a+b+c) \\ 2c & c \end{vmatrix}\right.$$

$$= (a+b+c)\,[\{-(a+b+c)\} \times \{-(a+b+c)\} - 0] - 0 + 0$$
$$= (a+b+c)\,(a+b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^3 = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 10. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$

हल : बायाँ पक्ष $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma+\alpha & \gamma+\alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix}$ [$R_3 = R_3 + R_1$ से]

$$\Delta = (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \beta+\alpha & \gamma+\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\,[1(\gamma+\alpha) - (\beta+\alpha) - 0 + 0] \quad \text{[तृतीय पंक्ति से विस्तार से]}$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$
$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma) = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 11. दिखायें कि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$

हल : बायाँ पक्ष $\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a-b+b-c+c-a & b-c & c-a \\ b+c+c+a+a+b & c+a & a+b \end{vmatrix}$ [$C_1 = C_1 + C_2 + C_3$ से]

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & b-c & c-a \\ 2(a+b+c) & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 0 & b-c & c-a\\ 2 & c+a & a+b\end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 0 & b-c & c-a\\ 0 & c+a-2b & a+b-2c\end{vmatrix} \quad [R_3 \to R_3 - 2R_1]$$

$$= (a+b+c)\left[1\begin{vmatrix} b-c & c-a\\ c+a-2b & a+b-2c\end{vmatrix} - 0 + 0\right]$$

$= (a+b+c)\,[(b-c)(a+b-2c) - (c-a)(c+a-2b)]$ [प्रथम स्तंभ के सापेक्ष प्रसार से]

$= (a+b+c)\,[ab + b^2 - 2bc - ac - bc + 2c^2 - c^2 - ac + 2bc + ac + a^2 - 2ab]$

$= (a+b+c)\,[a^2 + b^2 + 2c^2 - c^2 + ab - 2ab - 2bc - bc + 2bc - ac - ac + ac]$

$= (a+b+c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\therefore \quad \Delta = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$ दायाँ पक्ष सिद्ध हुआ।

उदाहरण 12. यदि $\begin{vmatrix}x & x^2 & 1+x^3\\ y & y^2 & 1+y^3\\ z & z^2 & 1+z^3\end{vmatrix} = 0$, तो सिद्ध करें कि $xyz = -1$

हल : दिया गया है कि $\begin{vmatrix}x & x^2 & 1+x^3\\ y & y^2 & 1+y^3\\ z & z^2 & 1+z^3\end{vmatrix} = 0$ ...(1)

अब $\Delta = \begin{vmatrix}x & x^2 & 1+x^3\\ y & y^2 & 1+y^3\\ z & z^2 & 1+z^3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ y & y^2 & 1\\ z & z^2 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ y & y^2 & y^3\\ z & z^2 & z^3\end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix}1 & x^2 & x\\ 1 & y^2 & y\\ 1 & z^2 & z\end{vmatrix} + xyz\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{vmatrix} + xyz\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{vmatrix}$$

$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{vmatrix}(1+xyz) = 0$ [(1) से]

अतः $1 + xyz = 0 \quad \Rightarrow \quad xyz = -1$ सिद्ध हुआ।

उदारहण 13. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके शीर्ष $A(-2, -3)$, $B(3, 2)$ तथा $C(-1, -8)$ है।

हल : हम जाने हैं कि उस त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हैं, निम्न है–

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

माना $(x_1, y_1) = (-2, -3) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2, y_1 = -3$

$(x_2, y_2) = (3, 2) \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3, y_2 = 2$

तथा $(x_3, y_3) = (-1, -8) \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1, y_3 = -8$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ -4 & -10 & 0 \end{vmatrix}$ $R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_2$

$= \frac{1}{2}\left[1\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -4 & -10 \end{vmatrix} - 0 + 0\right]$ [C_3 से विस्तार करने पर]

$= \frac{1}{2}(-50 + 20)$

$= -15$

$\therefore$ क्षेत्रफल $= 15$ वर्ग इकाई।

उदारहण 14. k का वह मान प्राप्त करें, जिसके लिए बिंदु $(2, 3)$, $(k, 2)$ तथा $(5, 11)$ एक सरल रेखा पर है।

हल : दी गई शर्तों से

$\therefore \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ [$\because$ बिंदु एक सरल रेखा पर हैं, $\therefore$ इन बिंदुओं से बने Δ का क्षेत्रफल $= 0$]

$x_1 = 2, y_1 = 3$

$x_2 = k, y_2 = 2$

$x_3 = 5, y_3 = 11$ रखने पर

$\therefore \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ k & 2 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 0$

या $\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ k & 2 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 0$

या $\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ k-2 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$

या $\quad 1\begin{vmatrix} k-2 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 0$ [C_3 से विस्तार करने पर]

$\Rightarrow \quad (8k - 16 + 3) = 0$

$8k - 13 = 0$

$k = \frac{13}{8}$ **उत्तर**

उदाहरण 15. निम्न के लिए x का मान प्राप्त करें—

(i) $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$

(ii) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

हल : (i) दिया गया है $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$

$$\{(3x)\,4 - (2)\,(7)\} = 10$$

या $12x - 14 = 10$

या $12x = 24$

या $x = 2$

या

(ii) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

या $x^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 28$ [पहली पंक्ति से विस्तार करने पर]

या $x^2\,(2.4 - 1.1) - x\,(0.4 - 1.3) + (0.1 - 2.3) = 28$

या $x^2(8-1) - x\,(0-3) + (0-6) = 28$

या $7x^2 + 3x - 6 = 28$

या $7x^2 + 3x - 34 = 0$

$7x^2 + 17x - 14x - 34 = 0$

$x\,(7x + 17) - 2\,(7x + 17) = 0$

$(7x + 17)\,(x - 2) = 0$

अब यदि $x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

तथा $7x + 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{17}{7}$

▸समीकरणों को हल करने पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 16. सिद्ध करें कि $x = 1$ निम्न समीकरण का मूल (root) है—

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

हल : दिये गये समीकरण के बायें पक्ष में $x = 1$ रखने पर

$$\begin{vmatrix} 1+1 & 3 & 5 \\ 2 & 1+2 & 5 \\ 2 & 3 & 1+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ [∵ तीनों पंक्तियाँ समान हैं]

∴ $x = 1$ दिए गए समीकरण का मूल है।

उदाहरण 17. x का मान ज्ञात करें जबकि $\begin{vmatrix} a & a & x \\ x & x & x \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0$

हल : समीकरण में $x = 0$ रखने पर $\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix} = 0$

∴ $x = 0$ समीकरण (1) का एक मूल है।

पुनः $x = a$ रखने पर $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ b & a & b \end{vmatrix} = 0$ [∵ प्रथम एवं द्वितीय पंक्तियाँ समान हैं]

∴ $x = a$, समीकरण का दूसरा मूल है।

पुनः $x = b$ रखने पर $\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ b & b & b \end{vmatrix} = 0$ [∵ द्वितीय एवं तृतीय पंक्तियाँ समान हैं]

∴ $x = b$ समीकरण का एक मूल है। ∴ $x = 0, a, b$ दिए गए समीकरण के मूल हैं।

उदाहरण 18. समीकरण $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण $\begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & c \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ [$C_1 = C_1 + C_2 + C_3$ से]

या $(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ [उभयनिष्ठ $x+a+b+c$ बाहर लेने पर]

या $(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \text{ से} \end{bmatrix}$

या $(x+a+b+c)\,x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad i.e. \quad x = 0$

या $x+a+b+c = 0 \quad i.e. \quad x = -(a+b+c) \quad \therefore \quad x = 0, -(a+b+c)$ उत्तर

उदाहरण 19. समीकरण $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ को हल करें।

हल : दिया गया समीकरण $\begin{vmatrix} x+9 & 3 & 5 \\ x+9 & x+2 & 5 \\ x+9 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ [$C_1 = C_1 + C_2 + C_3$ से]

या $(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & x+2 & 5 \\ 1 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ या $(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \text{ से} \end{bmatrix}$

या $(x+9)(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x+9 = 0$ या $(x-1)^2 = 0$

अर्थात् $x = -9$ या $x = 1, 1$ ∴ अभीष्ट हल $x = -9, 1, 1$ उत्तर

उदाहरण 20. समीकरण $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ को हल करें।

हल : दिया गया समीकरण $x\begin{vmatrix} -3x & x-3 \\ 2x & x+2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 2x & x+2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -3x & x-3 \end{vmatrix} = 0$

या $x\{-3x(x+2)-2x(x-3)\}-2\{-6(x+2)-(-1)(2x)\}$
$-3\{(-6)(x-3)-(-1)(-3x)\}=0$

या $x\{-3x^2-6x-2x^2+6x\}-2\{-6x-12+2x\}-3\{-6x+18-3x\}=0$

या $x\times(-5x^2)-2\{-4x-12\}-3\{-9x+18\}=0$

या $-5x^3+8x+24+27x-54=0$ या $-5x^3+35x-30=0$

या $5(x^3-7x+6)=0$ या $x^3-7x+6=0$

या $x^3-x^2+x^2-x-6x+6=0$ या $x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1)=0$

या $(x-1)(x^2+x-6)=0$ या $(x-1)(x^2+3x-2x-6)=0$

या $(x-1)\{x(x+3)-2(x+3)\}=0$ या $(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$\therefore \quad x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$

या $x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$

या $x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad \therefore \quad x=1,-3,2$ उत्तर

प्रश्नावली 1.1

1. निम्न सारणियों का मान निकालें—

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 13 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

2. दिखायें विंदु $A(1, 4), B(3, -2)$ तथा $C(-3, 16)$ संगामी हैं। $\left[\text{संकेत : } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 0\right]$

3. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ में

(i) अवयव 1, 6 एवं 7 के लघुघटक (Minor) ज्ञात करें।

(ii) 1, 2 तथा 3 के सहखंड (Cofactor) ज्ञात करें।

4. निम्न सारणियों का विस्तार के द्वारा मान निकालें—

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 12 & 3 & 7 \\ 27 & 7 & 17 \\ 36 & 9 & 22 \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$ (vi) $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$

(vii) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ (viii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

5. गुणों के प्रयोग से मान निकालें—

(i) $\begin{vmatrix} 225 & 240 & 189 \\ 210 & 225 & 204 \\ 212 & 252 & 188 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 1/a & a^2 & bc \\ 1/b & b^2 & ca \\ 1/c & c^2 & ab \end{vmatrix}$ [संकेत : $R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2, R_3 \to cR_3$]

(v) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix}$ (vi) $\begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & x+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (vii) $\begin{vmatrix} 25 & 9 & -18 \\ 10 & -27 & 20 \\ 12 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

(viii) यदि $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 49$ तो $\begin{vmatrix} 6 & 3 & -16 \\ 6 & 6 & 20 \\ 2 & -3 & 12 \end{vmatrix}$ का मान बतायें।

सिद्ध करें :

6. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} 0 & ab & ac \\ ba & 0 & bc \\ ca & cb & 0 \end{vmatrix} = 2a^2b^2c^2$

8. $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x+2a)(x-a)^2$

9. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

10. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

[संकेत : $C_1 \to aC_1$; $C_2 \to bC_2$; $C_3 \to cC_3$ से $\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(a^2+1) & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & b(b^2+1) & bc^2 \\ a^2c & b^2c & c(c^2+1) \end{vmatrix}$]

11. सिद्ध करें $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

12. सिद्ध करें—

(i) $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

(ii) यदि $x \neq y \neq z$ तथा $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ तो दिखायें $xyz = -1$.

13. सिद्ध करें $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$

14. सिद्ध करें—

(i) $\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$ (ii) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

15. सिद्ध करें $\begin{vmatrix} \alpha_{C_1} & \alpha_{C_2} & \alpha_{C_3} \\ \beta_{C_1} & \beta_{C_2} & \beta_{C_3} \\ \gamma_{C_1} & \gamma_{C_2} & \gamma_{C_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \alpha\beta\gamma\,(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)\,(\gamma-\alpha)$

[संकेत : $\alpha_{C_1} = \alpha; \beta_{C_1} = \beta; \gamma_{C_1} = \gamma$ तथा $\alpha_{C_1} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}; \alpha_{C_3} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{6}$ आदि]

16. यदि a, b, c धनात्मक एवं असमान हैं, तो दिखायें $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ का मान ऋणात्मक है।

17. सिद्ध करें $x = 1$ निम्न समीकरण का मूल है—

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

18. सिद्ध करें $x = -1$ निम्न समीकरण का मूल है—

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 3 \\ 3 & 4-x & 5 \\ 3 & 5 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

हल करें :

19. $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

20. $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$

21. $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$

22. $\begin{vmatrix} p+x & q+x & r+x \\ q+x & r+x & p+x \\ r+x & p+x & q+x \end{vmatrix} = 0$

23. $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$

24. यदि $a+b+c=0$, तो समीकरण $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$ को हल करें।

सैरस डायग्राम (Sarrus Diagram) की सहायता से मान निकालें—

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

बहुविकलपीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. यदि $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} = 0$ तो $x =$

(a) 2
(b) -2
(c) ± 2
(d) कोई नहीं

2. $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} =$

(a) $a^2+b^2+c^2+d^2$
(b) $a^2+b^2-c^2-d^2$
(c) $a^2+b^2-c^2+d^2$
(d) कोई नहीं

3. $\begin{vmatrix} 1100 & 1101 \\ 1102 & 1103 \end{vmatrix} =$

(a) 2
(b) -2
(c) ± 2
(d) कोई नहीं

4. $\begin{vmatrix} 1188 & 1190 \\ 1192 & 1194 \end{vmatrix} =$

(a) -8
(b) 8
(c) ± 8
(d) कोई नहीं

5. $\begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{5} \\ \sqrt{20} & \sqrt{24} \end{vmatrix} =$

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) कोई नहीं

6. $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

(a) 0
(b) 1
(c) $x+y+z$
(d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (i) -4 (ii) $\cos 2\theta$

3. (i) 1 का लघुघटक $= -3$; 6 का लघुघटक $= -6$; 7 का लघुघटक $= -3$

(ii) 1 का सहखंड = –3; 2 का सहखंड = 6; 3 का सहखंड = –3

4. (i) –8 (ii) – 52 (iii) 0 (iv) 3 (v) 1 (vi) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
(vii) – 87 (viii) 6

5. (i) –158400 (ii) 0 (iii) $(x + a + b + c)\, x^2$ (iv) 0 (v) $4a^2b^2c^2$ (vi) $(x-1)^3$
(vii) –26112 (viii) 1176

19. $x = 1, -9$ **20.** $x = 0, -(a + b + c)$ **21.** $x = 0, 3a$

22. $x = -\frac{1}{3}(p + q + r)$ **23.** 1, – 3, 2 **24.** $x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}$

25. –12 **26.** 60

✍ बहुविकलपीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (c) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (a) **5.** (a) **6.** (a)

1.2 रैखिक समीकरण निकाय (System of Linear Equations)

1.2.1 परिभाषा :

रैखिक समीकरण निकाय मुख्यत: निम्न प्रकार के होते हैं—

(i) समघाती (Homogeneous) रैखिक समीकरण निकाय—जो रैखिक समीकरण $ax + by + cz = 0$ के रूप में लिखे जा सकते हैं वे x, y तथा z में समघाती रैखिक समीकरण कहलाते हैं तथा उनका निकाय समघाती रैखिक समीकरण निकाय कहलाता है।

जैसे : $2x + 3y + 4z = 0;\ 3x + 5y + 5z = 0$ तथा $x + y + z = 0$
एक रैखिक समघाती समीकरण निकाय है।

(ii) असमघाती (Non-homogeneous) रैखिक समीकरण निकाय—जो रैखिक समीकरण $ax + by + cz + d = 0$ जहाँ $d \neq 0$, के रूप में लिखे जा सकते हैं वे x, y तथा z में असमघाती रैखिक समीकरण कहलाते हैं तथा उनका निकाय असमघाती रैखिक समीकरण निकाय कहलाता है।

जैसे : $2x + 3y + 4z = 5;\ 4x + 4y - 5z = 6;\ x + y + z = 1$
असमघाती रैखिक समीकरण निकाय है।

(iii) संगत समीकरण (Consistent Equation)—समीकरणों का वह निकाय जिसका **हल निकाला जा सकता है, संगत समीकरण** कहलाता है।

हल **अद्वितीय** (unique) हो सकता है, या **एक से अधिक हल** हो सकते हैं।

(iv) असंगत समीकरण (Inconsistent Equation)—समीकरणों का ऐसा निकाय जिसका कोई हल नहीं निकाला जा सकता असंगत समीकरण निकाय कहलाता है।

1.2.2 क्रेमर नियम (Cramer's rule)

संगत रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने के लिए गणितज्ञ क्रेमर ने सारणिक विधि विकसित की, जो क्रेमर नियम के नाम से जानी जाती है।

माना $a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2,\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3$
संगत रैखिक समीकरणों का निकाय है, तो इसका हल निम्न रूप से दिया जाता है—

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$

जहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ = गुणांकों का सारणिक तथा $\Delta \neq 0$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

1.2.3 कार्यविधि (Working rule)

क्रेमर के नियम से रैखिक समीकरणों को हल करने की सरल विधि निम्न है—

1. दिए गए समीकरणों का **गुणांक सारणिक** बनायें तथा इसे Δ से सूचित करें तथा Δ का मान प्राप्त करें।
2. अब इस सारणिक Δ के प्रथम स्तंभ के स्थान पर समीकरण के अचर पदों का स्तंभ लिखें तथा इसे Δ_1 से सूचित करें एवं इसका मान प्राप्त करें।
3. इसी प्रकार Δ के द्वितीय तथा तृतीय स्तंभों को अचरों से प्रतिस्थापित कर Δ_2 तथा Δ_3 का मान निकालें।
4. अब $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ से x, y, z का मान प्राप्त करें।

नोट :

- क्रेमर नियम से हल करने के लिए $\Delta \neq 0$ आवश्यक है।

1.2.4 असंगतता तथा संगतता के लिए आवश्यक शर्तें (Conditions for Inconsistency and Consistency)

(i) यदि $\Delta \neq 0$ तो दिया गया समीकरण निकाय संगत होगा और इसका हल अद्वितीय होगा।

(ii) दिया गया समीकरण निकाय असंगत होगा यदि $\Delta = 0$ तथा Δ_1, Δ_2 एवं Δ_3 में कम-से-कम एक शून्य नहीं हो। इस स्थिति में निकाय का कोई हल नहीं होगा।

(iii) यदि $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ तो निकाय के अनंत हल होंगे या कोई हल नहीं होगा। अत: इस स्थिति में निकाय संगत भी हो सकता है और असंगत भी। [देखें उदाहरण 5 एवं 7]

(iv) यदि समीकरण निकाय परस्पर समानांतर रेखाओं को निरूपित करता हो, तो निकाय असंगत होगा। [देखें उदाहरण 7]

1.2.5 रैखिक समघात समीकरणों का हल (Solution of Linear Homogeneous Equations)

कार्यविधि : माना समीकरण

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

तो (i) सर्वप्रथम गुणांकों का सारणिक Δ बनायें

अर्थात् $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(ii) Δ का मान ज्ञात करें।

(a) यदि $\Delta \neq 0$, तब समघात समीकरणों के निकाय का हल अद्वितीय है, जो $x = 0, y = 0, z = 0$ से दिया जाएगा। यह ट्रिवियल हल या शून्य हल (Trivial Solution) कहलाता है।

(b) यदि $\Delta = 0$, तो समीकरणों के निकाय के अनंत हल होंगे। ये हल या अशून्य हल (Non-trivial Solutions) कहलाते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए $z = k$ लेते हैं तथा x एवं y को k के पदों में व्यक्त करते हैं तथा $k = 1, 2, 3, \ldots$ रखकर x, y, z के अनंत हल प्राप्त करते हैं। [देखें उदाहरण 2]

1.2.6 दो सारणिकों का गुणनफल (Multiplication of Two Determinants)

माना $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & R_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & R_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & R_3 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & R_1' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & R_2' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & R_3' \end{vmatrix}$

तो $\Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

अर्थात् $\Delta_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} R_1 R_1' & R_1 R_2' & R_1 R_3' \\ R_2 R_1' & R_2 R_2' & R_2 R_3' \\ R_3 R_1' & R_3 R_2' & R_3 R_3' \end{vmatrix}$

इसे पंक्ति-से-पंक्ति का गुणनफल (Row-by-Row Multiplication) कहते हैं। इसी तरह स्तंभ-से-स्तंभ का गुणनफल (Column-by-Column Multiplication) प्राप्त किया जा सकता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. नीचे दिए गए समीकरणों को क्रेमर विधि से हल करें—

$$7x + 5y = 16;\ 2x - 3y = 9$$

हल : दिया गया समीकरण $7x + 5y = 16;\ 2x - 3y = 9$

$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7(-3) - 5 \times 2 = -21 - 10 = -31 \quad \therefore \quad \Delta \neq 0$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$ [Δ के प्रथम स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$= -16 \times 3 - 9 \times 5 = -48 - 45 = -93$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$ [Δ के द्वितीय स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$= 7 \times 9 - 16 \times 2 = 63 - 32 = 31$

$\therefore \quad x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-93}{-31} = 3$

$y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{31}{-31} = -1 \qquad \therefore \quad x = 3,\ y = -1$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 2. निम्न समीकरणों को हल करें—

$$2x + 3y + 4z = 0;\ x + y + z = 0;\ 2x - y + 3z = 0$$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2(3+1) - 3(3-2) + 4(-1-2)$
$= 2 \times 4 - 3 \times 1 + 4 \times (-3)$
$= 8 - 3 - 12 = 8 - 15 = -7 \neq 0$

अतः दिए गए समीकरणों का एक हल होगा, जो $x = 0, y = 0, z = 0$ से दिया जाएगा।

उदाहरण 3. समीकरण निकाय $6x + y - 3z = 5,\ x + 3y - 2z = 5$
$2x + y + 4z = 8$ को क्रेमर नियम से हल करें।

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6\{12 - (-2)\} - 1\{4 - (-4)\} + (-3)\{1 - 6\}$

$= 6 \times 14 - 1 \times 8 + (-3) \times (-5) = 84 - 8 + 15 = 91$ ...(1)

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ [प्रथम स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$= 5\{12 - (-2)\} - 1\{20 - (-16)\} + (-3)\{5 - 24\}$
$= 5 \times 14 - 1 \times 36 + (-3) \times (-19) = 70 - 36 + 57$
$= 91$ ...(2)

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ [द्वितीय स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$= 6\{20 - (-16)\} - 5\{4 - (-4)\} + (-3)\{8 - 10\}$
$= 6 \times 36 - 5 \times 8 + (-3) \times (-2) = 216 - 40 + 6$
$= 182$ ...(3)

तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ [तृतीय स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$= 6(24 - 5) - 1(8 - 10) + 5(1 - 6)$
$= 6 \times 19 - 1 \times (-2) + 5 \times (-5) = 114 + 2 - 25 = 91$ ...(4)

∴ क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{91}{91} = 1,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{182}{91} = 2,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{91}{91} = 1$$

[(1) तथा (2), (3) एवं (4) के प्रयोग से]

∴ $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 4. निम्न समीकरण निकाय को क्रेमर नियम से हल करें।

$x + y + z = 8;\ 4x + 2y + z = 11;\ 9x - 3y + z = 6$

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\{2 - (-3)\} - 1\{4 - 9\} + 1\{-12 - 18\}$

$= 1 \times 5 - 1 \times (-5) + 1 \times (-30) = 5 + 5 - 30 = -20 \neq 0$ ...(1)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8\{2-(-3)\} - 1\{11-6\} + 1\{-33-12\}$$

$= 8 \times 5 - 1 \times 5 + 1 \times (-45) = 40 - 5 - 45 = -10$ ...(2)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & 11 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1(11-6) - 8(4-9) + 1(24-99)$$

$= 1 \times 5 - 8 \times (-5) + 1 \times (-75) = 5 + 40 - 75 = -30$ ...(3)

तथा $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 11 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 1\{12-(-33)\} - 1\{24-99\} + 8\{-12-18\}$$

$= 1 \times 45 - 1 \times (-75) + 8 \times (-30) = 45 + 75 - 240 = -120$ ...(4)

∴ क्रेमर नियम से, $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-30}{-20} = \frac{3}{2}$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-120}{-20} = 6$

[(1) तथा (2), (3) एवं (4) के प्रयोग से]

∴ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = 6$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 5. निम्न समीकरण निकाय को हल करें $x + y + z = 1$; $x + 2y + 3z = 4$; $x + 3y + 5z = 7$

हल : दिया गया समीकरण $x + y + z = 1$ ...(1)

$x + 2y + 3z = 4$ ...(2)

$x + 3y + 5z = 7$ ...(3)

यहाँ $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(10-9) - 1(5-3) + 1(3-2)$$

$= 1 \times 1 - 1 \times 2 + 1 \times 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

∴ $\Delta = 0$

∴ निकाय का हल अद्वितीय नहीं है।

पुनः $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(10-9) - 1(20-21) + 1(12-14)$$

$= 1 \times 1 - 1 \times (-1) + 1 \times (-2) = 1 + 1 - 2 = 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 1(20-21) - 1(5-3) + 1(7-4)$$

$= 1 \times (-1) - 1 \times 2 + 1 \times 3 = -1 - 2 + 3 = 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1(14-12) - 1(7-4) + 1(3-2)$$

$= 1 \times 2 - 1 \times 3 + 1 \times 1 = 2 - 3 + 1 = 0$

इस तरह $\Delta = 0,\ \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

$\therefore$ निकाय संगत भी हो सकता है या असंगत भी।

माना $z = k$

$\therefore$ समीकरण (1) तथा (2) से $x + y = 1 - k$ ...(4)

तथा $x + 2y = 4 - 3k$ ...(5)

(4) में से (5) घटाने पर $-y = -3 + 2k \Rightarrow y = 3 - 2k$

$\therefore$ (4) से $x = 1 - k - (3 - 2k) = 1 - k - 3 + 2k = k - 2$

अब समीकरण (3) में $x = k - 2,\ y = 3 - 2k$ तथा $z = k$ रखने पर

$k - 2 + 3(3 - 2k) + 5k = k - 2 + 9 - 6k + 5k = 7$

अत: ये मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं। अत: निकाय संगत है।

$\therefore$ अभीष्ट हल $x = k - 2,\ y = 3 - 2k,\ z = k,$ जहाँ $k = 0, 1, 2, \ldots$ इत्यादि। उत्तर

उदाहरण 6. दिखायें कि समीकरणों का निम्न निकाय असंगत है—

$$x - 3y + 2z = 4;\ 2x + y - 3z = -2;\ 4x - 5y + z = 5$$

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1\{1 - 15\} - (-3)\{2 - (-12)\} + 2\{-10 - 4\}$

$= 1 \times (-14) + 3 \times 14 + 2 \times (-14) = -14 + 42 - 28 = 0$

तथा $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 4\{1 - 15\} - (-3)\{(-2) - (-15)\} + 2\{10 - 5\}$

$= 4 \times (-14) + 3 \times 13 + 2 \times 5 = -56 + 39 + 10 = -7 \neq 0$

$\because$ $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 \neq 0$

स्पष्ट है कि कम-से-कम एक सारणिक शून्य नहीं है।

$\therefore$ दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

उदाहरण 7. क्या समीकरणों का निम्न निकाय संगत है ?

$$2x - y + 3z = 4;\ 4x - 2y + 6z = 8;\ 2x - y + 3z = 5$$

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 6 \times 0 = 0$ [$\because$ प्रथम तथा तृतीय स्तंभ समान हैं]

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-1) \times 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times 0 = 0$ [द्वितीय स्तंभ तथा तृतीय स्तंभ समान हैं]

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times 0$ [$\because$ प्रथम तथा तृतीय स्तंभ समान हैं]

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$= -2 \times 0$ [∵ प्रथम तथा द्वितीय स्तंभ समान हैं]

$\therefore \quad \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

अत: समीकरण निकाय संगत भी हो सकता है और असंगत भी।

यदि $z = k$

पहले समीकरण से $2x - y = 4 - 3k$ ...(1)

दूसरे समीकरण से $2x - y = 4 - 3k$ ...(2)

तीसरे समीकरण से $2x - y = 5 - 3k$ ...(3)

अत: (1), (2) तथा (3) समानांतर रेखाओं को निरूपित करते हैं। अत: इन समीकरणों का कोई हल नहीं है,

$\therefore$ समीकरण निकाय असंगत है।

उदाहरण 8. k के किन मानों के लिए समीकरण समूह

$3x - y + kz = 1;\ 2x + y + z = 2;\ x + 2y - k = -1$ संगत है।

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -k \end{vmatrix} = 3\{-k-2\} - (-1)\{-2k-1\} + k(4-1)$

$= -3k - 6 - 2k - 1 + 3k = -2k - 7$ ...(1)

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत है

(i) यदि $\Delta \neq 0 \quad \Rightarrow -2k - 7 \neq 0 \quad \Rightarrow k \neq \frac{-7}{2}$

(ii) यदि $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

किन्तु $\Delta = 0 \Rightarrow k = -\frac{7}{2}$

अब $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -k \end{vmatrix} = 2k - 1$ [प्रसार से]

$= 2 \times \frac{-7}{2} - 1 = -8 \neq 0 \quad \left[k = -\frac{7}{2} \text{ के लिए}\right]$

अत: $k = \frac{-7}{2}$ के लिए $\Delta_1 \neq 0$

$\therefore$ इस स्थिति में समीकरण निकाय संगत नहीं है,

$\therefore$ यदि $k \neq \frac{-7}{2}$ तो समीकरण निकाय संगत है।

▸ गुणन पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 9 : यदि $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ हो, तो $\Delta_1\Delta_2$ प्राप्त करें।

हल : $\Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\Delta_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1\times2+2\times3+3\times4 & 1\times0+2\times2+3\times5 & 1\times1+2\times2+3\times0 \\ 2\times2+0\times3+3\times4 & 2\times0+0\times2+3\times5 & 2\times1+0\times2+3\times0 \\ 4\times2+5\times3+0\times4 & 4\times0+5\times2+0\times5 & 4\times1+5\times2+0\times0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2+6+12 & 0+4+15 & 1+4+0 \\ 4+0+12 & 0+0+15 & 2+0+0 \\ 8+15+0 & 0+10+0 & 4+10+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 19 & 5 \\ 16 & 15 & 2 \\ 23 & 10 & 14 \end{vmatrix}$$

उदाहरण 10. दिखायें कि $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

हल : बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0\times0+c\times c+b\times b & 0\times c+c\times0+b\times a & 0\times b+c\times a+b\times0 \\ c\times0+0\times c+a\times b & c\times c+0\times0+a\times a & c\times b+0\times a+a\times0 \\ b\times0+a\times c+0\times b & b\times c+a\times0+0\times a & b\times b+a\times a+0\times0 \end{vmatrix}$$

[पंक्ति का पंक्ति से गुणा करने पर]

$$= \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix}$$

सिद्ध हुआ।

पुनः $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} c & a \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & 0 \\ c & a \end{vmatrix}$

$= 0 - c(0-ab) + b(ac-0) = abc + abc = 2abc$

$\therefore \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = (2abc)^2 = 4a^2b^2c^2$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 11. सिद्ध करो कि $\begin{vmatrix} 2y_1z_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1z_3+y_3z_1 \\ y_1z_2+y_2z_1 & 2y_2z_2 & y_2z_3+y_3z_2 \\ y_1z_3+y_3z_1 & y_2z_3+y_3z_2 & 2y_3z_3 \end{vmatrix} = 0$

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 2y_1z_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1z_3+y_3z_1 \\ y_1z_2+y_2z_1 & 2y_2z_2 & y_2z_3+y_3z_2 \\ y_1z_3+y_3z_1 & y_2z_3+y_3z_2 & 2y_3z_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} y_1z_1+y_1z_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1z_3+y_3z_1 \\ y_1z_2+y_2z_1 & y_2z_2+y_2z_2 & y_2z_3+y_3z_2 \\ y_1z_3+y_3z_1 & y_2z_3+y_3z_2 & y_3z_3+y_3z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & 0 \\ z_2 & y_2 & 0 \\ z_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 0 \\ y_2 & z_2 & 0 \\ y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 12. सारणिक $\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$ को दो सारणिकों के गुणनफल के रूप में लिखें।

हल : $\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+2ax+a^2x^2 & 1+2ay+a^2y^2 & 1+2az+a^2z^2 \\ 1+2bx+b^2x^2 & 1+2by+b^2y^2 & 1+2bz+b^2z^2 \\ 1+2cx+c^2x^2 & 1+2cy+c^2y^2 & 1+2cz+c^2z^2 \end{vmatrix} \quad \ldots(1)$$

अब (1) में प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ का अवयव

$$1+2ax+a^2x^2 = 1 \times 1 + 2a \times x + a^2 \times x^2$$

∴ पहले सारणिक की पहली पंक्ति $1 \quad 2a \quad a^2$

दूसरे सारणिक की पहली पंक्ति $1 \quad x \quad x^2$

इसी तरह पहले सारणिक की द्वितीय पंक्ति $1 \quad 2b \quad b^2$

दूसरे सारणिक की द्वितीय पंक्ति $1 \quad y \quad y^2$

पहले सारणिक की तृतीय पंक्ति $1 \quad 2c \quad c^2$

दूसरे सारणिक की तृतीय पंक्ति $1 \quad z \quad z^2$

∴ $\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 1 & 2b & b^2 \\ 1 & 2c & c^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

उत्तर

प्रश्नावली 1.2

1. क्रेमर नियम के प्रयोग से हल करें—

(i) $6x - 4y = -24;\ 5x - 11y = -43$

(ii) $x + y + z = 6;\ x - y + z = 2;\ 2x + y - z = 1$

(iii) $x + y + z = 3;\ x + 2y + 3z = 4;\ x + 4y + 9z = 6$

(iv) $x + y + z = 6;\ x + 2y + 3z = 14;\ x + 4y + 9z = 36$

(v) $x - 3y + z = 2;\ 3x + y + z = 6;\ 5x + y + 3z = 3$

(vi) $2x - y + z = 3;\ x + 3y - 2z = 11;\ 3x - 2y + 4z = 1$

(vii) $4x + y + 4z = 7;\ 2x + 3y + 2z = 6;\ 6x + 9y + 2z = 14$

(viii) $x + y + z + 1 = 0;\ x + 2y + 3z + 4 = 0;\ x + 3y + 4z + 6 = 0$

(ix) $x + 2y + 3z = 1;\ 2x + y - z = 2;\ 3x + 4y + z = 6$

(x) $x + y = 5;\ y + z = 3;\ x + z = 4$

(xi) $x + 2y + 3z = 2;\ 2x + 4y + z = 9;\ 3x + 2y + 5z = 2$

(xii) $x+y+z=7,\ x+2y+3z=16,\ x+3y+4z=22$

(xiii) $6x+y-3z=5,\ x+3y-2z=5,\ 2x+y+4z=8$

2. निम्न समीकरणों की संगतता की जाँच करें—

(i) $2x-y+z=4;\ x+3y+2z=12;\ 3x+2y+3z=10$

(ii) $x-3y+2z=4;\ 2x+y-3z=-2;\ 4x-5y+z=5$

(iii) $5x-7y+z=11;\ 6x-8y-z=15;\ 3x+2y-6z=7$

(iv) $4x+6y=14,\ 12x+18y=32$

3. निम्न समीकरणों को हल करें—

(a) (i) $x+y-z=0;\ x-2y+z=0;\ 3x+6y-5z=0$

(ii) $3x-4y+5z=0;\ x+y-2z=0;\ 2x+3y+z=0$

(b) दिखायें कि $\lambda=\frac{57}{10}$ के लिए समीकरण निकाय

$$2x+3y-2z=0;\ 2x-y+3z=0;\ 7x+\lambda y-z=0$$

का अशून्य हल (Non-trivial) है।

[**संकेत :** $\Delta=0$ के लिए शर्त प्राप्त करें]

4. $\Delta_1=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_2=\begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}$ तो $\Delta_1\times\Delta_2$ का मान बतायें।

5. गुणनफल ज्ञात करें $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

6. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta-\alpha) & \cos(\gamma-\alpha) \\ \cos(\alpha-\beta) & 1 & \cos(\gamma-\beta) \\ \cos(\alpha-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) & 1 \end{vmatrix}=0$

[**संकेत :** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix}$]

7. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix} a_1x_1+b_1y_1 & a_1x_2+b_1y_2 & a_1x_3+b_1y_3 \\ a_2x_1+b_2y_1 & a_2x_2+b_2y_2 & a_2x_3+b_2y_3 \\ a_3x_1+b_3y_1 & a_3x_2+b_3y_2 & a_3x_3+b_3y_3 \end{vmatrix}=0$

[**संकेत :** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix}=0$]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Questions)

1. मान बतायें $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

2. मान बताये $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$

3. मान बतायें $\begin{vmatrix} \text{cosec } x & \cot x \\ \cot x & \text{cosec } x \end{vmatrix}$

4. मान बतायें $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$

5. x का मान बतायें यदि

(a) $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} 4 & x \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 21$

6. मान बतायें $\begin{vmatrix} \cos 70° & \sin 20° \\ \sin 70° & \cos 20° \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \cos 15° & \sin 15° \\ \sin 15° & \cos 15° \end{vmatrix}$

7. मान बतायें $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

उत्तरमाला

1. (i) $x = -2, y = 3$ (ii) $x = 1, y = 2, z = 3$ (iii) $x = 2, y = 1, z = 0$ (iv) $x = 1, y = 2, z = 3$

(v) $x = \frac{13}{3}, y = \frac{-7}{6}, z = -\frac{35}{6}$ (vi) $x = 3, y = 2, z = -1$

(vii) $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1$ (viii) $x = 1, y = -1, z = -1$

(ix) $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{21}{10}, z = \frac{-9}{10}$ (x) $x = 3, y = 2, z = 1$

(xi) $x = 1, y = 2, z = -1$ (xii) $x = 1, y = 3, z = 3$

(xiii) $x = 1, y = 2, z = 1$

2. (i) असंगत (ii) असंगत (iii) संगत (iv) असंगत

3. (i) $x = k, y = 2k, z = 3k, k \in R$ (ii) $x = 0, y = 0, z = 0$ (vi)

4. $\begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 11 & 27 & 24 \\ 8 & 31 & 18 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Questions)

1. 6 **2.** 0 **3.** 1 **4.** 0

5. (a) $\pm 2\sqrt{2}$ (b) 7/6 (c) -1 **6.** (a) 0 (b) $\sqrt{3}/2$

7. $-(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

अध्याय 2

आव्यूह (Matrices)

2.1 प्रस्तावना (Introduction)

आव्यूह संख्याओं या फलनों का आयताकार क्रमित सारणी (Ordered Rectangular Array) है।

यदि mn संख्याओं (वास्तविक या सम्मिश्र) के समुच्चय के अवयवों को m क्षैतिज पंक्तियों (rows) तथा n ऊर्ध्वाधर पंक्तियों (columns) के एक आयताकार क्रमित सारणी (array) के रूप में व्यवस्थित किया जाए तो इसे $m \times n$ (m by n) क्रम का आव्यूह कहा जाता है तथा mn संख्याओं में से प्रत्येक इसका अवयव (element) या तत्व कहलाता है।

सामान्यतः किसी आव्यूह को अंग्रेजी के बड़े अक्षर (Capital Letter) से व्यक्त किया जाता है।

यदि A, $m \times n$ क्रम का आव्यूह हो तो इसे निम्न रूप में व्यक्त करते हैं—

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

यहाँ क्षैतिज रेखायें (Horizontal lines) पंक्ति (Rows) तथा ऊर्ध्वाधर रेखायें (Vertical lines) स्तंभ (Columns) कहलाती हैं।

आव्यूह के तत्व : यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक आव्यूह हो, तो $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ आदि आव्यूह के तत्व हैं। व्यापक रूप में a_{ij} उस अवयव को प्रदर्शित करता है, जो किसी आव्यूह में iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर है। जैसे a_{12} वह अवयव है जो प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय स्तंभ के परिच्छेद बिन्दु पर है।

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, तो इसके अवयव 1, 2, 3, 4, 5, 6 हैं, तथा $a_{12} = 2$ प्रथम पंक्ति तथा दूसरे स्तंभ का अवयव है। इसी तरह $a_{23} = 6$ जो द्वितीय पक्ति तथा तीसरे स्तंभ का अवयव है।

नोट :

- किसी आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ को $||a_{ij}||_{m \times n}$ या $(a_{ij})_{m \times n}$ से भी व्यक्त किया जा सकता है।

2.2 आव्यूहों के प्रकार (Types of Matrices)

आव्यूहों को निम्न रूपों में वर्गीकृत किया जा सकता है—

(i) आयताकार आव्यूह **(ii)** वर्ग आव्यूह **(iii)** रिक्त या शून्य आव्यूह

2.2.1 आयताकार आव्यूह (Rectangular Matrix)

$m \times n$ क्रम का आव्यूह जिसमें $m \neq n$ अर्थात् पंक्तियों एवं स्तंभों की संख्या बराबर न हों, आयताकार आव्यूह कहलाता है।

विशिष्ट रूप (Special Case) :

(i) स्तंभ आव्यूह (Column Matrix) : यदि किसी आव्यूह में केवल एक स्तंभ हो तो इसे स्तंभ आ
कहते हैं। इसमें पंक्तियों की संख्या एक से अधिक हो सकती है।

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ एक 3×1 क्रम का स्तंभ आव्यूह है।

व्यापक रूप में $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ $m \times 1$ क्रम का स्तंभ आव्यूह है। इसे स्तंभ सदिश (Column vector) भी कहते हैं।

(ii) पंक्ति आव्यूह (Row Matrix) : यदि किसी आव्यूह में केवल एक पंक्ति हो तो उसे पंक्ति आव्यूह क
है। इसमें स्तंभों की संख्या 1 से अधिक हो सकती है।

जैसे $B = [1\ 2\ 3]_{1 \times 3}$ एक 1×3 क्रम का पंक्ति आव्यूह है जिसमें एक पंक्ति तथा तीन स्तंभ हैं।

व्यापक रूप में $B = [b_{ij}]_{1 \times n}$, $1 \times n$ क्रम का पंक्ति आव्यूह है जिसमें एक पंक्ति तथा n स्तंभ हैं। इसे पंक्ति सदि
(Row vector) भी कहा जाता है।

(iii) क्षैतिज आव्यूह (Horizontal Matrix) : जिस आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तंभों से कम हो उ
क्षैतिज आव्यूह कहते हैं।

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ एक क्षैतिज आव्यूह है क्योंकि इसमें 2 पंक्तियाँ तथा 3 स्तंभ हैं।

(iv) ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Vertical Matrix) : जिस आव्यूह में स्तंभों की संख्या पंक्तियों से कम हो उ
ऊर्ध्वाधर आव्यूह कहते हैं।

जैसे $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ एक ऊर्ध्वाधर आव्यूह है क्योंकि इसमें 2 स्तंभ तथा 3 पंक्तियाँ हैं।

2.2.2 वर्ग आव्यूह (Square Matrix)

जिस आव्यूह में पंक्ति तथा स्तंभों की संख्या बराबर हों उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं। अत: आव्यूह जिसमें n पंक्ति
तथा n स्तंभ हों, n क्रम का वर्ग आव्यूह (या $n \times n$ आव्यूह) होगा।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ आदि।

6. मुख्य विकर्ण एवं इसके अवयव (Principal Diagonal and Diagonal Elements) : यदि $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक वर्ग आव्यूह हो तो आव्यूह के वे अवयव जिनके लिए $i = j$ हो, तो मुख्य विकर्ण के अवयव कहलाते हैं। अत: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ आदि विकर्ण के अवयव हैं।

जैसे—$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ में A के विकर्ण अवयव 3, 7 तथा 1 हैं।

मुख्य विकर्ण

विशिष्ट रूप (Special Case)

(i) **विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) :** यदि किसी वर्ग आव्यूह $[a_{ij}]_{n \times n}$ में मुख्य विकर्ण को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हों तो उसे विकर्ण आव्यूह कहते हैं।

अत: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ विकर्ण आव्यूह होगा, यदि $a_{ij} = 0$ जब $i \neq j$ तथा इसे निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है—

$A = \text{diag}\,[a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}]$

जैसे—$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ एक विकर्ण आव्यूह है।

(ii) **अदिश आव्यूह (Scalar Matrix) :** जिस विकर्ण आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव बराबर हों (शेष शून्य हों) उसे अदिश आव्यूह कहते हैं।

अत: $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ अदिश आव्यूह होगा, जहाँ $b_{ij} = 0$ यदि $i \neq j$

तथा $b_{ij} = k$ यदि $i = j$, जहाँ k कोई अचर है।

जैसे : $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

क्रमश: प्रथम, द्वितीय व तृतीय क्रम के अदिश आव्यूह हैं।

(iii) **इकाई आव्यूह या तत्समक आव्यूह (Unit Matrix or Indentity Matrix) :** एक वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के सभी अवयव 1 तथा शेष सभी अवयव शून्य हों, इकाई आव्यूह या तत्समक आव्यूह कहलाता है।

स्पष्ट है आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ इकाई आव्यूह होगा यदि

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

सामान्यत: nवें क्रम को इकाई आव्यूह हो I_n से सूचित करते हैं। यदि क्रम ज्ञात हो तो इसे I से भी व्यक्त किया जाता है।

जैसे : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ क्रमश: द्वितीय व तृतीय क्रम के इकाई आव्यूह हैं।

(iv) **त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrix) :** यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य विकर्ण के ऊपर अथवा नीचे के सभी अवयव शून्य हों तो आव्यूह त्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है।

उच्च तथा निम्न त्रिभुजीय आव्यूह (Upper and Lower Triangular Matrices) : यदि किसी त्रिभुजीय आव्यूह के मुख्य विकर्ण के नीचे के सारे अवयव शून्य हों तो उसे **उच्च त्रिभुजीय आव्यूह** कहते हैं तथा यदि मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हों तो उसे निम्न **त्रिभुजीय आव्यूह** कहते हैं।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ उच्च त्रिभुजीय आव्यूह तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ निम्न त्रिभुजीय आव्यूह हैं।

स्पष्टत: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक उच्च त्रिभुजीय आव्यूह होगा यदि $a_{ij} = 0, i > j$ तथा निम्न त्रिभुजीय आव्यूह होगा यदि $a_{ij} = 0, i < j$

2.2.3 शून्य या रिक्त आव्यूह (Zero or Null Matrix)

यदि किसी आव्यूह के सारे तत्व शून्य हों तो इसे शून्य या रिक्त आव्यूह (Zero or Null Matrix) कहते हैं। इसे O से सूचित करते हैं।

जैसे : $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ आदि शून्य आव्यूह हैं।

2.3 आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

आव्यूहों का योग (Addition of Matrices) : यदि A तथा B समान क्रम के आव्यूह हों तो उनका योग $A+B$ संगत अवयवों को जोड़ने से प्राप्त होता है।

अत: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ तो $A+B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

आव्यूहों का अंतर (Subtraction of Matrices) : यदि A तथा B समान क्रम के आव्यूह हों तो उनका अंतर $(A-B)$ उनके संगत अवयवों के अंतर से प्राप्त होता है। अत: $A - B = A + (-B)$

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

तो $A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 1-4 & 2-5 & 3-6 \\ 4-1 & 5-2 & 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\left[\because -B = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\right]$

आव्यूहों के योग के गुण (Properties of Matrix Addition) :

(i) एक ही क्रम के आव्यूह जोड़े या घटाये जा सकते हैं।

(ii) क्रम विनिमेय नियम (Commutative Laws) : आव्यूहों का योग क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है।

अत: $A + B = B + A$, जहाँ A तथा B समान क्रम के आव्यूह हैं।

(iii) साहचर्य नियम (Associative Law) : आव्यूहों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है।

अत: $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iv) यदि शून्य आव्यूह O तथा आव्यूह A का क्रम समान हो तो $A + O = O + A = A$

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तथा $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ तो $A + O = O + A = A$

2.3.1 आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of Matrices)

यदि किसी आव्यूह को अदिश k से गुणा किया जाए तो आव्यूह के प्रत्येक अवयव में k से गुणा हो जाता है।

अर्थात् $kA = k[a_{ij}] = [k\, a_{ij}]$

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तो $2A$ का मान बतायें।

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

उत्तर

2.3.2 अदिश गुणन के गुण (Properties of Scalar Multiplication) :

1. यदि k तथा l दो अदिश हों तथा A कोई आव्यूह हो, तो

(i) $(k + l)\, A = kA + lA$

(ii) $k\,(lA) = (kl)\, A$

(iii) $(-k)\, A = -(kA) = k\,(-A)$

2. वितरण नियम (Distributive Law) : $k\,(A + B) = kA + kB$

जहाँ A तथा B समान क्रम के आव्यूह हैं।

2.4 आव्यूह का गुणन (Multiplication of Matrices)

दो आव्यूहों A तथा B का गुणन तभी संभव है, जब A में स्तंभों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।

परिभाषा : यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तथा $B = [b_{jk}]_{n \times p}$

दो आव्यूह हों तो A तथा B का गुणनफल $m \times p$ क्रम का आव्यूह $[C_{ik}]_{m \times p}$ होगा जिसका (i, k)वाँ अवयव आव्यूह A की iवीं पंक्ति तथा आव्यूह B के kवें स्तंभ के संगत अवयवों को गुणा कर जोड़ने से प्राप्त होगा।

अत: $AB = [C_{ik}]_{m \times p}$, जहाँ $C_{ik} = \Sigma a_{ij} b_{jk}$

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

यहाँ AB परिभाषित है क्योंकि A में स्तंभों की संख्या $= 2 = B$ में पंक्तियों की संख्या

अब
$$AB = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6\times 2 + 9\times 7 & 6\times 6 + 9\times 9 & 6\times 0 + 9\times 8 \\ 2\times 2 + 3\times 7 & 2\times 6 + 3\times 9 & 2\times 0 + 3\times 8 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 12 + 63 & 36 + 81 & 0 + 72 \\ 4 + 21 & 12 + 27 & 0 + 24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix} = C \text{ (माना)}$$

(1) में दिखायी गई गणना निम्न रूप में की गई है—

पहली पंक्ति

(i) प्रथम अवयव $[6 \ \ 9] \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 6\times 2 + 9\times 7$

(ii) द्वितीय अवयव $[6 \ \ 9] \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 6\times 6 + 9\times 9$

(iii) तृतीय अवयव $[6 \ \ 9] \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = 6\times 0 + 9\times 8$

द्वितीय पंक्ति

(i) $[2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 2\times 2 + 3\times 7$

(ii) $[2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 2\times 6 + 9\times 9$

(iii) $[2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = 2\times 0 + 3\times 8$

नोट :

- (i) यदि AB परिभाषित हो तो BA भी परिभाषित हो आवश्यक नहीं है, ऊपर के उदाहरण में B में 3 स्तंभ हैं जबकि A में 2 पंक्तियाँ हैं। अत: BA परिभाषित नहीं है।
- (ii) $A \times A = A^2$; $A \times A \times A = A^3$; ... $A \times A \times A \times \ldots n$ बार $= A^n$, जहाँ A एक वर्ग आव्यूह है।
- (iii) $I^2 = I^3 = \ldots . I^n = I$, जहाँ I इकाई आव्यूह हैं।
- (iv) $A.I = I.A = A$, जहाँ I, A के समान क्रम का इकाई आव्यूह है।

2.4.1 आव्यूह गुणन के गुण (Properties of Matrix Multiplication)

1. **साहचर्य नियम (Associative Law) :** यदि A, B तथा C तीन आव्यूह हों तो $(AB)\,C = A\,(BC)$, जहाँ दोनों पक्ष परिभाषित हैं।
2. **वितरण नियम (Distributive Law) :** यदि A, B, C तीन आव्यूह हों तो $A\,(B + C) = AB + AC$
3. यदि A कोई वर्ग आव्यूह हो तथा I उसी क्रम का इकाई आव्यूह हो, तो $AI = IA = A$

4. यदि $AB = O$, अर्थात् AB शून्य आव्यूह है तो A अथवा B अथवा दोनों शून्य हों आवश्यक नहीं है।

2.5 अन्य परिभाषायें (Other Definitions)

1. उपआव्यूह (Sub-matrix) : किसी आव्यूह के कुछ पंक्तियों या कुछ स्तम्भों या दोनों को छोड़ने से प्राप्त आव्यूह को उपआव्यूह कहते हैं।

जैसे : $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix}$ के उपआव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 4\\7 & 8\end{bmatrix}, [1], [2], \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\5 & 6 & 7\end{bmatrix}$ आदि हैं।

2. समान आव्यूह (Equal Matrices) : दो आव्यूह समान कहे जाते है यदि.

(i) वे समान क्रम के है।

(ii) दोनों आव्यूहों के संगत अवयव बराबर हों।

अर्थात् यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$ तो $A = B$ होगा यदि i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = b_{ij}$

जैसे $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ तो $A = B$.

3. परिवर्त आव्यूह (Transpose Matrix): यदि किसी दिए गए आव्यूह A की पंक्तियों को स्तंभों तथा स्तंभों को पंक्तियों में बदल दिया जाए तो प्राप्त आव्यूह A का परिवर्त आव्यूह कहलाता है तथा इसे A^T या A^t या A' से सूचित किया जाता है।

यदि $A, m \times n$ क्रम का आव्यूह है तो $A', n \times m$ क्रम का आव्यूह होगा।

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix}3 & 1+2i\\1-2i & 2\end{bmatrix}$ तो इसका परिवर्त आव्यूह ज्ञात करें।

हल : इसका परिवर्त आव्यूह $A' = \begin{bmatrix}3 & 1-2i\\1+2i & 2\end{bmatrix}$

4. (i) सममित आव्यूह (Symmetric Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह का परिवर्त आव्यूह उसके बराबर हो तो आव्यूह सममित कहलाता है अर्थात् यदि $A = A'$ हो तो A सममित होगा।

स्पष्टत: A सममित है $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \; \forall \; i, j$

उदाहरण : आव्यूह $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}a & h & g\\h & b & f\\g & f & c\end{bmatrix}$

सममित आव्यूह हैं क्योंकि $A = A'$ तथा $B = B'$.

(ii) विषम सममित आव्यूह (Skew Symmetric Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह के लिए $A = -A'$ हो तो उसे विषम सममित आव्यूह कहते हैं।

स्पष्ट है इस दशा में i तथा j के प्रत्येक मान के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$

यदि $i = j$ लें।

पुन: $a_{ij} = -a_{ij} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$

अत: इस विषम सममित आव्यूह के **मुख्य विकर्ण के अवयव शून्य होते हैं।**

उदाहरण : $\begin{bmatrix}0 & 3\\-3 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & h & g\\-h & 0 & f\\-g & -f & 0\end{bmatrix}$ यदि विषम सममित हैं।

2.5.1 सममित तथा विषम सममित आव्यूह के गुण (Properties of Symmetric and Skew Symmetric Matrices)

सममित : (i) यदि A सममित आवयूह है, तो $A^2, A^3, \ldots, A^n$ सममित होंगे।

(ii) यदि A सममित आव्यूह है तो $A + A'$ सममित आव्यूह होगा।
(iii) यदि A तथा B सममित हैं तो AB सममित होगा यदि $A = B$
(iv) यदि A तथा B सममित आव्यूह हैं, तो $A + B$ तथा $A - A'$ सममित होंगे।

विषम सममित : (i) यदि A विषम सममित है तो $A - A'$ विषम सममित होगा।
(ii) यदि A तथा B सममित हैं तो $AB - BA$ विषम सममित होगा।

2. प्रत्येक वर्ग आव्यूह A को सममित तथा विषम सममित आव्यूह के योग (sum) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

i.e.,
$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

5. लांबिक आव्यूह या लम्बकोणीय आव्यूह (Orthogonal Matrix) : यदि A एक वर्ग आव्यूह हो तथा $AA' = A'A = I$, जहाँ I इकाई आव्यूह है,
तो A लांबिक आव्यूह कहलाता है।

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो $A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad AA' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

अतः A एक लांबिक आव्यूह है।

6. सम्मिश्र आव्यूह (Complex Matrix) : यदि किसी आव्यूह के अवयव सम्मिश्र संख्यायें हों तो वह सम्मिश्र आव्यूह कहलाता है।

उदाहरण : $A = \begin{bmatrix} 2+i & i \\ 3+2i & 2-i \end{bmatrix}$ एक सम्मिश्र आव्यूह है।

7. संयुग्मी आव्यूह (Conjugate Matrix) : किसी सम्मिश्र आव्यूह A के अवयवों को उसके संगत संयुग्मी अवयवों से बदलने से प्राप्त आव्यूह संयुग्मी आव्यूह कहलाता है। इसे $\bar{A}$ से सूचित किया जाता है।

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1-2i & 3+4i \\ 4-i & 2+3i \end{bmatrix}$ तो $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i \\ 4+i & 2-3i \end{bmatrix}$

8. संयुग्मी परिवर्त आव्यूह (Conjugate Transpose Matrix) : सम्मिश्र आव्यूह A के संयुग्मी आव्यूह $\bar{A}$ के परिवर्त आव्यूह को A का संयुग्मी परिवर्त आव्यूह कहा जाता है। इसे $(\bar{A})^T$ या A^θ या A^* से सूचित किया जाता है।

जैसे : यदि $A = \begin{bmatrix} 1-2i & 3+4i \\ 4-i & 2+3i \end{bmatrix}$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i \\ 4+i & 2-3i \end{bmatrix}$$

अतः $(\bar{A})^T$ या A^θ या $A^* = \begin{bmatrix} 1+2i & 4+i \\ 3-4i & 2-3i \end{bmatrix}$

9. (i) हरमिटियन आव्यूह (Hermitian Matrix) : यदि कोई सम्मिश्र आव्यूह A अपने संयुग्मी परिवर्त आव्यूह के बराबर हो अर्थात् $A^\theta = (\bar{A})^T = A$ हो तो उसे हरमिटियन आव्यूह कहते हैं।

स्पष्ट है हरमिटियन आव्यूह के लिए i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ तथा इसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव वास्तविक होते हैं।

उदाहरण : सिद्ध करें $\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$

हरमिटियन आव्यूह है।

हल : माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$ तो $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3-4i \\ 2+3i & 0 & 4+5i \\ 3+4i & 4-5i & 2 \end{bmatrix}$

अब $A^\theta = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix} = A \quad \therefore A^\theta = A$

अत: A हरमिटियन आव्यूह है।

(ii) विषम हरमिटियन आव्यूह (Skew Hermitian Matrix) : यदि A कोई सम्मिश्र वर्ग आव्यूह है, तो A को विषम हरमिटियन आव्यूह कहा जाता है। यदि

$$A^\theta = -A \text{ या } (\bar{A})^T = -A$$

स्पष्ट है $[a_{ij}]_{m \times n}$ विषम हरमिटियन होगा यदि i तथा j के सभी मानों के लिए

$$a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$$

या $a_{ii} = -\bar{a}_{ii} \Rightarrow a_{ii} + \bar{a}_{ii} = 0$, यदि $i = j \quad \Rightarrow$ अत: $a_{ii} = 0$ या पूर्ण काल्पनिक है।

अत: विषम हरमिटियन आव्यूह में मुख्य विकर्ण के अवयव काल्पनिक होंगे अथवा शून्य होंगे।

उदाहरण : $A = \begin{bmatrix} 0 & -3+4i \\ 3+4i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3-4i \\ 3-4i & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^\theta = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & 3-4i \\ -3-4i & 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 & -3+4i \\ 3+4i & 0 \end{bmatrix} = -A$$

अत: A विषम हरमिटियन है।

10. ऐकिक या एकल आव्यूह (Unitary Matrix) : वर्ग आव्यूह A ऐकिक या एकल आव्यूह कहलाता है यदि

$$AA^\theta = A^\theta A = I.$$

उदाहरण : सिद्ध कीजिए आव्यूह $A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$ ऐकिक आव्यूह है।

हल : $A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \quad \therefore$ संयुग्मी आव्यूह $\bar{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$

अत: परिवर्त आव्यूह $A^\theta = (\bar{A})^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$

अब $A^\theta A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & !+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1\times 1 + (1+i)(1-i) & 1\times(1+i) + (1+i)(-1) \\ (1-i)\times 1 + (-1)(1-i) & (1-i)(1+i) + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+1-i^2 & 1+i-1-i \\ 1-i+i-1 & 1-i^2+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+1+1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\times 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

अत: आव्यूह ऐकिक आव्यूह है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ तो $A+B$ तथा $A-B$ का मान ज्ञात करें।

हल : $A-B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1 & 2-0\\ 2-2 & -1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ **उत्तर**

तथा $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 2+0\\ 2+2 & -1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ **उत्तर**

उदाहरण 2. यदि $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 8 & 9\end{bmatrix}$ तथा $Q=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 5 & 7 & 0\end{bmatrix}$ तो $2P-3Q$ का मान ज्ञात करें।

हल : $2P-3Q=2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 8 & 9\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 5 & 7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 10 & 14\\ 0 & 16 & 18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 0 & 9\\ 9 & 0 & 15\\ 15 & 21 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2-6 & 4-0 & 6-9\\ 0-9 & 10-0 & 14-15\\ 0-15 & 16-21 & 18-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & -3\\ -9 & 10 & -1\\ -15 & -5 & 18\end{bmatrix}$ **उत्तर**

उदाहरण 3. यदि $\begin{bmatrix}x+3 & 2y+x\\ z-1 & 4a-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -7\\ 3 & 2a\end{bmatrix}$ तो x, y, z तथा a का मान प्राप्त करें जो दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है।

हल : प्रश्न से, $\begin{bmatrix}x+3 & 2y+x\\ z-1 & 4a-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -7\\ 3 & 2a\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $x+3=0$ [∵ समान आव्यूह के संगत पद बराबर होते हैं]

$2y+x=-7$

$z-1=3$ तथा $4a-6=2a$

अत: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$z-1=3 \Rightarrow z=1+3=4$

$4a-6=2a \Rightarrow 4a-2a=6 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$

तथा $2y+x=-7 \Rightarrow 2y-3=-7$ [x का मान रखने पर]

$\Rightarrow$ $2y=-7+3=-4 \Rightarrow y=-\frac{4}{2}=-2$

अत: $x=-3, y=-2, z=4$ तथा $a=3$ **उत्तर**

उदाहरण 4. (i) A^2 का मान निकालिये, यदि आव्यूह

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

(ii) A^2-2A का मान ज्ञात करें।

हल : (i) $A^2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 3 & 2\\3 & 1 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 3 & 2\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}1\times1+2\times4+3\times3 & 1\times2+2\times3+3\times1 & 1\times3+2\times2+3\times4\\4\times1+3\times4+2\times3 & 4\times2+3\times3+2\times1 & 4\times3+3\times2+2\times4\\3\times1+1\times4+4\times3 & 3\times2+1\times3+4\times1 & 3\times3+1\times2+4+4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+8+9 & 2+6+3 & 3+4+12\\4+12+6 & 8+9+2 & 12+6+8\\3+4+12 & 6+3+4 & 9+2+16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18 & 11 & 19\\22 & 19 & 26\\19 & 13 & 27\end{bmatrix}$$

(ii) $A^2 - 2A = \begin{bmatrix}18 & 11 & 19\\22 & 19 & 26\\19 & 13 & 27\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 3 & 2\\3 & 1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18-2 & 11-4 & 19-6\\22-8 & 19-6 & 26-4\\19-6 & 13-2 & 27-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 7 & 13\\14 & 13 & 22\\13 & 11 & 19\end{bmatrix}$

उदाहरण 5. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}$ तो दिखायें $AB \neq BA$.

हल : यहाँ $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}_{2\times2}$

A में पंक्तियों की संख्या $= B$ में स्तंभों की संख्या $= 2$

अतः AB परिभाषित है। इसी तरह BA भी परिभाषित है।

अब $AB = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8\\3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}5+14 & 6+16\\15+28 & 18+32\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

तथा $BA = \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\times1+6\times3 & 5\times2+6\times4\\7\times1+8\times3 & 7\times2+8\times4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23 & 34\\31 & 46\end{bmatrix}$ ...(2)

(1) तथा (2) से, $AB \neq BA$.

उदाहरण 6. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तथा आव्यूह $B = \begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $AB = BA$.

हल : $AB = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}\cos\alpha\,.\,\cos\beta+\sin\alpha\,.\,\sin\beta & \cos\alpha\,.\,\sin\beta+\sin\alpha\,.\,\cos\beta\\\sin\alpha\,.\,\cos\beta+\cos\alpha\,.\,\sin\beta & \sin\alpha\,.\,\sin\beta+\cos\alpha\,.\,\cos\beta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

$BA = \begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha & \cos\beta\,.\,\sin\alpha+\sin\beta\,.\,\cos\alpha\\\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha & \sin\beta\,.\,\sin\alpha+\cos\beta\,.\,\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से स्पष्ट है कि $AB = BA$. **यही सिद्ध करना था।**

उदाहरण 7. सिद्ध करो कि दो आव्यूहों $\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$ तथा $\begin{pmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{pmatrix}$ का गुणनफल शून्य होगा यदि θ तथा ϕ का अन्तर $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणित हो।

हल : $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta.\cos^2\phi + \cos\theta.\sin\theta.\cos\phi.\sin\phi & \cos^2\theta.\cos\phi.\sin\phi + \cos\theta.\sin\theta.\sin^2\phi) \\ \cos\theta.\sin\theta.\cos^2\phi + \sin^2\theta.\cos\phi.\sin\phi & \cos\theta\sin\theta.\cos\phi.\sin\phi + \sin^2\theta.\sin^2\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta.\cos\phi(\cos\theta.\cos\phi + \sin\theta.\sin\phi) & \cos\theta.\sin\phi(\cos\theta.\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \\ \sin\theta\cos\phi(\cos\theta.\cos\phi + \sin\theta.\sin\phi) & \sin\theta.\sin\phi(\cos\theta.\cos\phi + \sin\theta.\sin\phi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta.\cos\phi\{\cos(\theta\sim\phi)\} & \cos\theta.\sin\phi\{\cos(\theta\sim\phi)\} \\ \sin\theta.\sin\phi\{\cos(\theta\sim\phi)\} & \sin\theta.\sin\phi\{\cos(\theta\sim\phi)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta.\cos\phi\cos(\theta\sim\phi) & \cos\theta.\sin\phi\cos(\theta\sim\phi) \\ \sin\theta.\sin\phi\cos(\theta\sim\phi) & \sin\theta.\sin\phi\cos(\theta\sim\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ **उत्तर**

क्योंकि यदि $\theta \sim \phi, \frac{\pi}{2}$ का विषम गुणित हो तो $\cos(\theta-\phi)$ का मान शून्य होगा जिससे गुणनफल शून्य हो जायेगा।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 8. यदि $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तो दिखाइये कि $E^2F + F^2E \neq E$.

हल : $\because E^2 = E \times E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad E^2.F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

तथा $F^2 = F \times F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad F^2.E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

अत: $E^2.F + F^2.E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq E$

$\therefore \quad E^2 \cdot F + F^2 \cdot E \neq E.$

उदाहरण 9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix}$ तथा I_3, क्रम 3 का एक आव्यूह हो, तो सिद्ध करें कि

$$A^3 = p \cdot I_3 + q \cdot A + r \cdot A^2$$

हल : $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p & q & r \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0\times0+1\times0+0\times p & 0\times1+1\times0+0\times q & 0\times0+1\times1+0\times r \\ 0\times0+0\times0+1\times p & 0\times1+0\times0+1\times q & 0\times0+0\times1+1\times r \\ p\times0+q\times0+r\times p & p\times1+q\times0+r\times q & p\times0+q\times1+r\times r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \\ p(q+r^2) & pr+q(q+r^2) & p+rq+r(q+r^2) \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

अतः $pI_3 + qA + rA^2 = p\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \end{bmatrix}$

[I_3, A तथा A^2 का मान रखने प

$$= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \\ qp & q^2 & qr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ pr & qr & r^2 \\ pr^2 & r(p+qr) & r(q+r^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \\ p(q+r^2) & q^2+r(p+qr) & p+qr+r(q+r^2) \end{bmatrix} = A^3$$

[(1) से

यही सिद्ध करना थ

ण 10. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध करो $A^2 - 5A + 7I = 0$ जबकि I एक इकाई आव्यूह, आर्डर 2×

की है।

हल : यहाँ $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times3+1\times-1 & 3\times1+1\times2 \\ -1\times3+2\times-1 & -1\times1+2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 - 5A + 7I = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$ यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 11. $A^2 - 4A - 5I$ का मान निकालिये,

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

हल : यहाँ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ [गुणन से]

अत: $A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8-0 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 9-4-5 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 8-8-0 & 9-4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore \quad A^2 - 4A - 5I = 0$ उत्तर

उदाहरण 12. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A^3 - 2A^2 + A - I$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times2+2\times1 & 1\times3+3\times0+2\times(-1) & 1\times2+3\times3+2\times(-1) \\ 2\times1+0\times2+3\times1 & 2\times3+0\times0+3\times(-1) & 2\times2+0\times3+3\times(-1) \\ 1\times1+(-1)\times2+(-1)\times1 & 1\times3+(-1)\times0+(-1)\times(-1) & 1\times2+(-1)\times3+(-1)\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0-2 & 2+9-2 \\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0-3 \\ 1-2-1 & 3+0+1 & 2-3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

तथा $A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9+2+9 & 27+0-9 & 18+3-9 \\ 5+6+1 & 15+0-1 & 10+9-1 \\ -2+8+0 & -6+0+0 & -4+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 12 \\ 12 & 14 & 18 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

तथा $2A^2 = 2\begin{bmatrix} 9 & 1 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 2 & 18 \\ 10 & 6 & 2 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^3-2A^2+A-I=\begin{bmatrix}20 & 18 & 12\\ 12 & 14 & 18\\ 6 & -6 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}18 & 2 & 18\\ 10 & 6 & 2\\ -4 & 8 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20-18+1-1 & 18-2+3-0 & 12-18+2-0\\ 12-10+2-0 & 14-6+0-1 & 18-2+3-0\\ 6+4+1-0 & -6-8-1-0 & 8-0-1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 19 & -4\\ 4 & 7 & 19\\ 11 & -15 & 6\end{bmatrix}$$ Ans.

उदाहरण 13. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$ को सममित तथा विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त करें।

हल : प्रश्न से, $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 3 & 5\end{bmatrix}$

अतः $\frac{1}{2}(A+A^T)=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 3 & 5\end{bmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 6 & 5\\ 6 & 10 & 7\\ 5 & 7 & 10\end{bmatrix}$ = सममित आव्यूह

तथा $\frac{1}{2}(A-A^T)=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 3 & 5\end{bmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ = विषम सममित आव्यूह

अब $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 6 & 5\\ 6 & 10 & 7\\ 5 & 7 & 10\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ = सममित आव्यूह + विषम सममित आव्यूह

प्रश्नावली 2.1

1. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$, तो $A+B$ का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 9\end{bmatrix}$, तो $A-B$ ज्ञात करें।

2. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 6\\ 5 & 8 & 9\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\ 5 & 3 & 2\\ 0 & 4 & 7\end{bmatrix}$ तो $3A-2B$ का मान बतायें।

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$, तो $2A$ का मान ज्ञात करें।

(iii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 7\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ तो $3A+B$ का मान बतायें।

3. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 4 & -5 & 6\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}4 & 7 & -2\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}$

तो दिखाइये कि $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 4 & 8\end{bmatrix}$, तो दिखाइये कि $A+B=B+A$.

4. यदि $3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$, तो x, y, z तथा w का मान बतायें।

5. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & -3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$ तथा $A+B-D=O$ हो, तो p,q,r,s,t तथा u का मान बतायें जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

6. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$, तो A^2 का मान बतायें।

(ii) यदि आव्यूह $A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}$, A^3 का मान ज्ञात कीजिये।

(iii) (a) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$, तो A^2+3A का मान ज्ञात करें।

(b) यदि $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ और $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ तो गुणन A, B ज्ञात कीजिए।

(iv) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$, तो A^2 का मान ज्ञात करें।

(v) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$, तो A^2-2A का मान ज्ञात करें।

(vi) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, तो A^2-B^2 का मान ज्ञात करें।

(vii) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, तो A^2-AB+B^2 का मान ज्ञात करें।

(viii) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$, तो A^3+3A का मान ज्ञात करें।

(ix) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$, तो A^2 का मान ज्ञात करें।

7. यदि I, 2×2 क्रम का इकाई आव्यूह है तो सिद्ध करें कि

$$I\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

8. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, तो दिखाइये कि $AB \neq BA$.

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, तो दिखाइये कि $AB \neq BA$.

9. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, तो AB का मान ज्ञात करें तथा बतायें BA संभव नहीं है।

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, तो AB का मान बतायें।

10. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$, तो दिखायें कि $AB = O$, किन्तु $A \neq O, B \neq O$.

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ तो AB प्राप्त करें।

(iii) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ तो A^2 प्राप्त करें।

11. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, तो (i) $A^2 + B^2$ (ii) AB तथा BA का मान बतायें।

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, तो $A^3 + A^2 + A$ का मान ज्ञात करें।

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = [1 \quad 2 \quad 3]$, तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$.

13. यदि $A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A(\theta) \cdot A(\beta) = A(\theta + \beta)$.

14. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, तो दिखायें $A^2 - 9A + 14I = 0$, जहाँ I द्वितीय क्रम का इकाई आव्यूह है।

15. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ है और I इकाई आव्यूह है तो $A^2 - 3A + 9I$ का मान निकालिए।

16. यदि $f(x) = x^2 - 5x + 6$, तो $f(A)$ का मान बतायें।

यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

[**संकेत** : $f(A)=A^2-5A+6$]

17. दिखायें समीकरण $A^2-5A+7I=0$ का हल A होगा, यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$.

18. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, तो दिखायें—

(i) $(A+B)'=A'+B'$ (ii) $(A-B)'=A'-B'$

19. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$, तो सिद्ध करें कि $A+A'$ एक सममित आव्यूह है।

20. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, तो सिद्ध करें कि $A-A^T$ विषम सममित आव्यूह है।

(ii) दिखाइये आव्यूह $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

21. आव्यूह $\begin{bmatrix}-1 & 7 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 0 & 5\end{bmatrix}$ को सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के योग के रूप में व्यक्त करें।

[**संकेत** : $A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$]

22. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तो दिखायें कि A लांबिक आव्यूह है।

[**संकेत** : $AA'=I=A'A$]

23. दिखायें कि $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$ एक लांबिक आव्यूह है।

24. सिद्ध कीजिए $A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1+i\\ 1-i & -1\end{bmatrix}$ ऐकिक आव्यूह है।

[**संकेत** : $(\bar{A})^T A=I$]

25. सिद्ध कीजिए $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ -1 & -i\end{bmatrix}$ ऐकिक आव्यूह है।

26. निम्न पदों को उदाहरण के साथ परिभाषित कीजिए—

(i) सममित आव्यूह
(ii) विषम सममित आव्यूह
(iii) लांबिक आव्यूह
(iv) ऐकिक आव्यूह
(v) विकर्ण आव्यूह.
(vi) त्रिभुजीय आव्यूह
(vii) इकाई आव्यूह
(viii) शून्य आव्यूह

27. आव्यूह तथा सारणिक में अंतर स्पष्ट करें।

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ तो $A+B=$

(a) $\begin{bmatrix}4 & 6\\ 8 & 10\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 10\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & 10\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

2. यदि $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & 7\end{bmatrix}$ तो

(a) $x=2, y=7$ (b) $x=4, y=3$ (c) $x=3, y=4$ (d) कोई नहीं

3. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ तो A का परिवर्त आव्यूह है।

(a) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 7\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

4. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & 0 & -6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 8\\ 6 & 3 & -5\end{bmatrix}$ तो $A+B=$

(a) $\begin{bmatrix}7 & 7 & 8\\ 3 & 5 & 2\\ 7 & 5 & -2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 7\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

5. $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ एक वर्ग आव्यूह है, यदि

(a) $m=n$ (b) $m>n$ (c) $m<n$ (d) कोई नहीं

6. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तथा $A+A'=I$ तो $\alpha=$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) कोई नहीं

7. $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ एक विकर्ण आव्यूह है यदि

(a) $a_{ij}=0, i\neq j$ (b) $a_{ij}\neq 0, i=j$

(c) $a_{ij}=k, i=j$ (d) कोई नहीं

8. आव्यूह A तथा B के लिए $(AB)'=$

(a) $A'B'$ (b) $B'A'$

(c) $A'B$ (d) कोई नहीं

9. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ तो $AB=$

(a) $\begin{bmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}5 & 12\\ 21 & 32\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 0 & 9 & 2 \\ -10 & 6 & 14 \\ 15 & 16 & 13 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 16 \\ 13 & 17 & 21 \end{bmatrix}$

4. $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$ **5.** $p = -2, q = 0, r = 4, s = -1, t = 9, u = 3$

6. (i) $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, (iii) (a) $\begin{bmatrix} 12 & 14 & 14 \\ 14 & 12 & 14 \\ 14 & 14 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 16 & 7 & 13 \\ 14 & 13 & 22 \\ 13 & 11 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix}$ (vi) $4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 24 & 0 & 40 \\ 12 & 14 & 26 \\ 40 & 0 & 64 \end{bmatrix}$ (ix) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

9. (i) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. (i) अस्तित्व नहीं है। (ii) $\begin{bmatrix} 47 & 64 & 0 \\ 96 & 49 & 160 \\ 64 & 128 & -81 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **21.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

✍ बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (a) **2.** (b) **3.** (a) **4.** (a) **5.** (a) **6.** (b) **7.** (a) **8.** (b)
9. (c)

अध्याय 3 आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण निकाय का हल (Solution of System of Linear Equation Using Matrix)

वर्ग आव्यूह का सारणिक : यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ वर्ग आव्यूह हो तो इसका सारणिक $|A|=|a_{ij}|_{m\times n}$ होता है, जिसमें अवयवों को उसी क्रम में रखा गया है, जिस क्रम में आव्यूह A में होते हैं।

जैसे— $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$ तो इसका सारणिक

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}_{2\times 2}$$

3.1 विशिष्ट प्रकार (Special Case)

3.1.1 अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular Matrix)

यदि किसी वर्ग आव्यूह के सारणिक का मान शून्य हो अर्थात् $|A|=0$, तो A को अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहा जाता है।

जैसे : $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ तो $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=6-6=0$

अत: यह अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

ऐसे आव्यूहों का व्युत्क्रम (Inverse) नहीं निकाला जा सकता।

व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Non-Singular Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह के सारणिक का मान अशून्य अर्थात् $|A|\neq 0$ हो तो A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrix) कहा जाता है।

जैसे : $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ तो $|A|=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=4-6=-2\neq 0$

अत: A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

यदि A व्युत्क्रमणीय है, तो इसका व्युत्क्रम निकाला जा सकता है।

3.1.2 सहखण्ड आव्यूह (Cofactor Matrix)

किसी वर्ग आव्यूह A के अवयवों को उसके संगत सारणिक $|A|$ के अवयवों के संगत सहखण्डों (cofactors) से प्रतिस्थापित करके बने आव्यूह को सहखण्ड आव्यूह कहते हैं। इसे A^C या $[A_{ij}]$ से निरूपित किया जाता है, जहाँ A_{ij} सारणिक $|A|$ के अवयव a_{ij} का सहखंड है।

जैसे : $\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ तो $|A|=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{vmatrix}$

$A_{11}=5$ का सहखण्ड $=8$; $A_{12}=6$ का सहखण्ड $=-7$;

$A_{21}=7$ का सहखण्ड $=-6$; $A_{22}=8$ का सहखण्ड $=5$

अत: सहखण्ड आव्यूह $=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -7\\ -6 & 5\end{bmatrix}$

सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix) : किसी वर्ग आव्यूह A के सहखण्ड आव्यूह (Cofactor Matrix) A^C के परिवर्त (Transpose) आव्यूह को सहखण्डज आव्यूह कहा जाता है। इसे Adj. A से निरूपित करते हैं।

अत: Adj. $A = (A^C)^T$ या $[A_{ij}]^T$.

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो $|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

$A_{11} = \cos\alpha$ का सहखण्ड $= \cos\alpha$; $A = A_{12} = \sin\alpha$ का सहखण्ड $= \sin\alpha$;

$A_{21} = -\sin\alpha$ का सहखण्ड $= -\sin\alpha$; $A_{22} = \cos\alpha$ का सहखण्ड $= \cos\alpha$

$\therefore$ सहगुणनखण्ड आव्यूह $A^C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

अत: Adj. $A = (A^C)^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

उत्तर

नोट :

- यदि आव्यूह 2×2 क्रम का हो, तो मुख्य विकर्ण के अवयवों को परस्पर परिवर्तित कर तथा गौण विकर्ण (off diagonal) के अवयवों के चिह्न परिवर्तन से Adj. प्राप्त हो जाता है।

जैसे— यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ तो Adj. $A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

सहखण्डज आव्यूह के गुण : यदि A, n क्रम का वर्ग आव्यूह है—

(i) A (Adj. A) = (Adj. A) $A = I$, जहाँ I, n क्रम का इकाई आव्यूह है।

(ii) यदि $|A| \neq 0$ तो $\frac{A\ (\text{Adj. } A)}{|A|} = \frac{(\text{Adj. } A)\ A}{|A|} = I$

(iii) Adj. (AB) = Adj. B. Adj. A

3.1.3 व्युत्क्रम या प्रतिलोम आव्यूह (Inverse of a Matrix)

यदि A व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह (non-singular matrix) हो तथा B उसी क्रम का ऐसा आव्यूह हो, जिसके लिए $AB = BA = I$ तो B को A का व्युत्क्रम या प्रतिलोम आव्यूह कहते हैं तथा इसे A^{-1} से सूचित करते हैं।

इसी तरह A^{-1} का प्रतिलोम आव्यूह A होगा।

सहखण्डज आव्यूह की सहायता से प्रतिलोम आव्यूह A^{-1} को निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है—

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \text{Adj. } A}$$

व्युत्क्रम आव्यूह निकालने की क्रियाविधि :

Step I. $|A|$ ज्ञात करें।

Step II. यदि $|A| = 0$ तो आव्यूह A का व्युत्क्रम नहीं होगा। यदि $|A| \neq 0$ तो A व्युत्क्रमणीय है।

Step III. A के संगत अवयवों के सहगुणनखंड (Cofactor) प्राप्त करें तथा इसे आव्यूह के रूप में लिखें।

Step IV. प्राप्त आव्यूह का परिवर्त आव्यूह निकालकर Adj. A प्राप्त करें।

Step V. फिर $A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|}$ का प्रयोग कर व्युत्क्रम निकालें।

उदाहरण : आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम आव्यूह ज्ञात करें।

हल : यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$, अत: A व्युत्क्रमणीय है।

तथा $A_{11}=3, A_{12}=-1, A_{21}=-1, a_{22}=3$ $\therefore$ सहखण्ड आव्यूह $=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$

अत: Adj. $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ $\therefore$ $A^{-1}=\dfrac{\text{Adj. } A}{|A|}=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

व्युत्क्रम आव्यूह के गुण :

(1) किसी वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम A^{-1} अद्वितीय (Unique) होता है।

(2) $(A^{-1})^{-1}=A$ (3) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ (4) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3.2 गुणांक आव्यूह तथा संवर्द्धित आव्यूह (Coefficient Matrix and Augmented Matrix)

माना रैखिक समीकरण निकाय निम्न है :

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1; a_2x+b_2y+c_2z=d_2; a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

इन समीकरणों को आव्यूह के रूप में लिखने पर

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{bmatrix} \quad \text{या} \quad AX=B,$$

जहाँ $A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{bmatrix}$

यहाँ आव्यूह A को, जो x, y तथा z के गुणांकों को क्रमबद्ध करने से बना है, गुणांक आव्यूह कहते हैं। A के साथ अचर पदों के आव्यूह B के अवयवों d_1, d_2, d_3 को सम्मिलित करने से बने आव्यूह

$$C=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & : & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & : & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & : & d_3\end{bmatrix}$$

को समीकरण निकाय का संवर्द्धित आव्यूह (Agumented Matrix) कहा जाता है तथा इसे $[A:B]$ से व्यक्त करते हैं।

3.2.1 रैखिक समीकरण के निकाय का आव्यूह विधि से हल (व्युत्क्रम के प्रयोग से)

(Solution of Simultaneous Linear Equations by Matrix Method Using Inverse)

(1) में A^{-1} से गुणा करने पर

$A^{-1}AX=A^{-1}B$ या $IX=A^{-1}B$ $\Rightarrow$ $X=A^{-1}B$ $[\because A^{-1}A=I]$

अब दोनों पक्षों की तुलना से x, y तथा z का मान प्राप्त किया जा सकता है।

क्रिया विधि : Step I. समीकरणों को आव्यूह रूप में व्यक्त करें।

Step II. गुणांक आव्यूह को A, चरों के आव्यूह को X तथा दायें पक्ष में अचर को B के रूप में लेके समीकरण $AX=B$ का रूप दें।

Step III. $X=A^{-1}B$ ज्ञात करके दोनों तरफ तुलना कर x, y, z के मान प्राप्त करें।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & -6 & -7\end{bmatrix}$, तो Adj. A (सहखण्डज आव्यूह) ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{vmatrix}$

माना A के अवयवों के सहखण्ड क्रमशः $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{33}$ हैं तो

माना आव्यूह A के सह-गुणनखण्डों (co-factors) का आव्यूह $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = +(-28+30) = \mathbf{2}$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -(-21-0) = \mathbf{21}$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = +(-18-0) = \mathbf{-18}$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = -(0-6) = \mathbf{6}$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = +(-7-0) = \mathbf{-7}$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-6-0) = \mathbf{6}$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = +(0+4) = \mathbf{4}$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5+3) = \mathbf{-8}$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +(4-0) = \mathbf{4}$ [$\because$ $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, a_{ij}$ का लघुघटक]

अतः सहखण्डों से बना आव्यूह, $B = \begin{bmatrix} 2 & 21 & -18 \\ 6 & -7 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Adj. $A = B' = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, तो A का सहखण्डज आव्यूह (Adjoint matrix) ज्ञात करें।

हल : प्रश्नानुसार, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

माना A के अवयवों के सहखण्ड (cofactors) क्रमशः $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{33}$ हैं तो सहखण्ड आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

अतः $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = +(9-16) = \mathbf{-7}$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = \mathbf{1}$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(4-3) = \mathbf{1}$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6-12) = \mathbf{6}$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} = +(3-3) = 0; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} = -(4-2) = -2$$

[∵ $A_{ij} = (-1)^{i+j} \times a_{ij}$ का लघुक]

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} = +(8-9) = -1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = +(3-2) = 1$$

[∵ $A_{ij} = (-1)^{i+j}$

अत: $B = \begin{bmatrix}-7 & 1 & 1\\ 6 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ [(1) से]

$\therefore$ Adj. $A = B = \begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

उदाहरण 3. आव्यूह A का प्रतिलोम (inverse) ज्ञात करें यदि $A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$.

हल : $|A| = \begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$

अत: इसका व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब $\cos\alpha$ का सहखण्ड $A_{11} = \cos\alpha$; $\sin\alpha$ का सहखण्ड $A_{12} = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$

$-\sin\alpha$ का सहखण्ड $A_{21} = -\sin\alpha$; $\cos\alpha$ का सहखण्ड $A_{22} = \cos\alpha$

A का सह-गुणनखण्ड आव्यूह (Matrix of Co-factors),

$$B = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \quad \therefore \quad B' = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} = \text{Adj. } A$$

अत: A का व्युत्क्रम आव्यूह,

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

उदाहरण 4. आव्यूह $\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

हल : माना $A = \begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, तो $|A| = \begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}$

$= 2(1-4) - 5(3-2) + 3(6-1)$

$= -6 - 5 + 15 = 4 \neq 0$, अत: इसका व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

$$A_{11} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -1, \; A_{13} = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

सह-खण्ड (co-factor) आव्यूह $B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Adj. $A = B' = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$.

अत: व्युत्क्रम आव्यूह $A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{13}{4} \end{bmatrix}$ उत्तर

उदाहरण 5. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए।

हल : $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 7(4-3) + (-20-6) - (30+12) = 7 - 26 - 42 = -61 \neq 0$$

अत: व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब आव्यूह के सहगुणनखंड

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 26, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 42$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -27$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = -17, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

अत: सहखण्ड आव्यूह (Matrix of co-factors),

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 26 & 42 \\ -5 & -8 & -27 \\ -3 & -17 & -4 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \text{Adj. } A = B' = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -14 \end{bmatrix}$$

पुन: A का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a matrix)

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = -\frac{1}{61}\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{61}\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{vmatrix}$$

उदाहरण 6. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए।

हल : $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= 3(-3+4) + 3(2+0) + 4(-2+0) = 3 + 6 - 8 = 1 \neq 0$

$\therefore$ $|A| \neq 0$ (शून्य नहीं है)

अब सह-गुणनखण्ड

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3$

अतः सहखण्डों से बना आव्यूह (Matrix of Cofactors) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\text{Adj } A = B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

अतः A का व्युत्क्रम आव्यूह $A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ $[\because |A| = 1]$

$\therefore$ व्युत्क्रम आव्यूह $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

उदाहरण 7. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & c \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ तो a और c के मान ज्ञात कीजिये।

हल : $A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & c \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c+1 \\ 0 & 1 & 2c+2 \\ (-4a+4) & (3a-3) & (ac+2) \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

परन्तु $$A \times A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots(2)$$

या $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & (c+1) \\ 0 & 1 & (2c+2) \\ (-4a+4) & (3a-3) & (ac+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अत: $c+1=0; \quad -4a+4=0$

$\therefore \quad c=-1 \quad$ तथा $a=1$ उत्तर

उदाहरण 8. आव्यूह विधि से हल करें :

$$3x+2y+4z=7;\ 2x+y+z=4;\ x+3y+5z=2$$

हल : समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखने पर $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

या $AX=B,$ जहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

अब $$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3(5-3)-2(10-1)+4(6-1) = 6-18+20 = 8 \neq 0$$

अत: इसका व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब $$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (5-3) = 2;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(10-1) = -9$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-1 = 5;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(10-12) = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15-4 = 11;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(9-2) = -7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-4) = -2;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-4 = -1 \qquad [\because \text{सहखंड गुणांक } A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}]$$

$\therefore$ सहखंड आव्यूह $C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 5 \\ 2 & 11 & -7 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

अतः $\text{Adj. } A = C' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}$ $\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

अब $X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 14+8-4 \\ -63+44+10 \\ 35-28-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$

अर्थात् $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{8} \\ -\frac{9}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$ $\therefore \quad x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4};\ y = -\frac{9}{8};\ z = \frac{5}{8}$

उदाहरण 9. आव्यूह विधि से समीकरण हल कीजिए—

$$x + 2y + 3z = 1;\ 2x + 3y + 2z = 2;\ 3x + 3y + 4z = 1$$

हल : समीकरण को आव्यूह रूप में व्यक्त करने पर $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

या $AX = B$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

अब $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(12-6) - 2(8-6) + 3(6-9) = 6 - 4 - 9 = -7 \neq 0$

अतः A व्युत्क्रमणीय है।

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-9) = 1;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5 \text{ तथा } A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(3-6) = 3$$

तथा $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$\therefore$ सहखण्ड आव्यूह $C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $\text{Adj. } A = C' = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

अब $X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6+2-5 \\ -2-10+4 \\ -3+6-1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ -8/7 \\ -2/7 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad x = -\frac{3}{7}, y = -\frac{8}{7}, z = -\frac{2}{7}$ उत्तर

प्रश्नावली 3.1

1. (i) Adj. A प्राप्त करें यदि—

(a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$, तो adj. A (सहखण्डज आव्यूह) ज्ञात कीजिए।

(iii) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}$, तो इसका परिवर्त आव्यूह ज्ञात करें।

(iv) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ का परिवर्त ज्ञात करें।

(v) आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ का सह-खण्डज आव्यूह ज्ञात कीजिए।

2. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो adj. A ज्ञात करें।

(ii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

(iii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिये।

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, तो दिखायें कि A (Adj. A) = (Adj. A) $A = |A| I$.

4. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात करें।

(ii) यदि $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, तो A का प्रतिलोम ज्ञात करें।

(iii) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} का मान ज्ञात कीजिए।

5. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} का मान ज्ञात करें।

(iii) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} का मान ज्ञात करें।

(iv) $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करें।

6. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} का मान ज्ञात करें।

7. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, तो दिखायें कि $A^{-1} = A^2$

[संकेत : यदि $A^{-1} = A^2$ तो $A^2A = A^{-1}A = I$, अतः $A^2A = I$]

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध करें कि $A^{-1} = A$

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, तो दिखायें कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

9. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध करें $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात करें।

$A = \begin{bmatrix} 1-2i & 2+3i & 3-4i \\ 4+5i & 5-6i & 6+7i \\ 8 & 7-8i & 9 \end{bmatrix}$ का परिवर्त संयुग्मी ज्ञात करें।

$2x - 3y + 5z = 6$; $3x + 2y - 4z = 7$; $5x + 7y - 3z = 8$ तो इसके लिए गुणांक आव्यूह तथा संवर्द्धित आव्यूह लिखें।

12. निम्न समीकरणों को आव्यूह विधि से हल करें :

(i) $x - y + 2z = 3;\ x + 2y + 3z = 5;\ 3x - 4y - 5z = -13$

(ii) $x + 2y + 3z = 3;\ 2x - y + z = 6;\ 3x + y - z = 4$

(iii) $x + y + z = 6;\ 2x - y + 2z = 6;\quad x + y - z = 0$

(iv) $x + 3y + 3z = 1;\ x + 4y + 3z = 0;\ x + 3y + 4z = 2$

(v) $3x + y + 2z = 3;\ 2x - 3y - z = -3;\ x + 2y + z = 4$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ तो adj A =

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} =

(a) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (d) कोई नहीं

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो $|A|$=

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) कोई नहीं

4. आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम आव्यूह होंगे यदि

(a) $AB = BA$ (b) $AB = BA = 0$ (c) $AB = BA = I$ (d) कोई नहीं

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3-2x & y+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है, तो

(a) $x = 1, y = 2$ (b) $x = 2, y = 1$ (c) $x = 1, y = 1$ (d) कोई नहीं

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 3 \\ 3 & k & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है तो K =

(a) 16/3 (b) 4/5 (c) 33/2 (d) कोई नहीं

7. यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो I =

(a) $\frac{\text{Adj. } A}{|A|}$ (b) $\frac{A\ (\text{Adj. } A)}{|A|}$ (c) $\frac{A}{|A|}$ (d) कोई नहीं

8. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ तो A^{-1} =

(a) A (b) $-A$ (c) adj A (d) $-$ adj A

उत्तरमाला

1. (i) (a) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & 1-2i \\ 1+2i & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \\ 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \\ -10 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{-23}\begin{bmatrix} -3 & 9 & -10 \\ 2 & -6 & -1 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

4. (i) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{7}{34} & \frac{5}{34} \\ \frac{2}{17} & -\frac{1}{17} \end{bmatrix}$

5. (i) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

(iii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$ (iv) $-\frac{1}{61}\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **9.** (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1+2i & 4-5i & 8 \\ 2-3i & 5+6i & 7+8i \\ 3+4i & 6-7i & 9 \end{bmatrix}$

11. गुणांक आव्यूह $= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, संवर्द्धित आव्यूह $= \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \\ 5 & 7 & -3 & 8 \end{array}\right]$

12. (i) $x=-1, y=0, z=2$ (ii) $x=2, y=-1, z=1$
(iii) $x=1, y=2, z=3$ (iv) $x=1, y=-1, z=1$
(v) $x=1, y=2, z=-1$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (b) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (c) **5.** (c) **6.** (c) **7.** (b) **8.** (c)

अध्याय 4

समाकलन (Integration)

पिछले अध्यायों में हमने फलनों को अवकल गुणांक निकालने के बारे में पढ़ा। इस अध्याय में हम समाकलन के बारे में पढ़ेंगे। अवकल गणित में हमें दिए गए फलन का अवकल गुणांक ज्ञात करना होता है जबकि समाकलन गणित में दिए गए अवकल गुणांक से मूल फलन को प्राप्त करना होता है। अत: **समाकलन को अवकलन की विपरीत क्रिया कहा जा सकता है।**

4.1 परिभाषा (Definition)

यदि $F(x)$ कोई फलन है जिसका अवकल गुणांक $f(x)$ से दिया जाता है, तो $F(x)$ को $f(x)$ का समाकल (Integral) कहा जाता है तथा समाकलन प्राप्त करने की विधि समाकलन (Integration) कहलाती है। इसे प्रतीक रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है :

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

प्रतीक '$\int$' को समाकलन चिह्न कहते हैं तथा dx में x यह बतलाता है कि समाकलन चर राशि x के सापेक्ष होना है। जिस फलन का समाकलन किया जाता है उसे समाकल्य (Integrand) तथा समाकलन से प्राप्त परिणाम को समाकल (Integral) कहते हैं। $\int g'(x)\,dx = g(x)$ में $g'(x)$ समाकल्य तथा $g(x)$ समाकल है।

जैसे : (i) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \quad \therefore \quad \int \sec^2 x\,dx = \tan x$

(ii) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \therefore \quad \int \cos x\,dx = \sin x$

उपरोक्त उदाहरणों में $\sec^2 x$, $\cos x$ समाकल्य (Integrand) तथा $\tan x$ तथा $\sin x$ समाकल (Integral) हैं।

टिप्पणी : (i) '$\int$' S का **विकृत रूप (elongated)** है, जो 'Sum' का पहला अक्षर है।

(ii) प्रतीक '$\int$' तथा 'dx' का अलग-अलग कोई अर्थ नहीं है।

4.2 समाकलन नियतांक (Constant of Integration)

माना $\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \quad$ तो $\int f(x)\,dx = F(x)$ ...(i)

पुन: यदि C कोई स्वेच्छ अचर हो, तो

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \qquad \left(\because \frac{d}{dx}(C) = 0\right)$$

$\therefore \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$ ...(ii)

(i) तथा (ii) से स्पष्ट है कि किसी फलन का समाकल अद्वितीय नहीं होता, C के भिन्न-भिन्न मानों के लि इसका मान भिन्न-भिन्न होगा।

अत: यदि $F(x)$, $f(x)$ का कोई समाकल हो तो $F(x)+C$ को उसका व्यापक समाकल कहते हैं।

अत: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, जहाँ C **समाकलन नियतांक (Constant of Integration)** है।

$F(x)+C$ को C की अनिश्चितता के कारण $f(x)$ का अनिश्चित समाकल (Indefinite Integral) कहते

यदि शर्तों के अधीन अनिश्चित समाकल का कोई विशेष मान प्राप्त कर लिया जाता है, तो इसे **विशेष समाक** (Particular Integral) कहते हैं।

नोट :

- प्रत्येक अनिश्चित समाकलन मे समाकलन नियतांक का प्रयोग आवश्यक है। सुविधा के लिए इसे छोड़ दिया जाता है, किंतु ह हल करते समय विद्यार्थीगण अंत में इसका प्रयोग अवश्य करें।

किसी फलन $f(x)$ का अनिश्चित समाकलन एक वक्र परिवार (Family of curves) को निरूपित करता है।

4.3 मूलभूत समाकलन सूत्र (Fundamental Integral Formulae)

हम जानते है कि $\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C$

इस सूत्र तथा मानक फलनों के अवकलन सूत्र के आधार पर उनके संगत समाकलन सूत्रों की सूची नीचे दी ग है :

समाकलन के मानक सूत्र

	समाकलन (Integration)	अवकलन (Differentiation)
1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$
2.	$\int \frac{1}{x} dx = \log_e x$	$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$
3.	$\int e^x dx = e^x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = a^x$
5.	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$
6.	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
7.	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
8.	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x$	$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$
	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x$	$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \cot x . \operatorname{cosec} x$

11.	$\int 1\,dx = x$	$\frac{d}{dx}(x) = 1$
12.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x$	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\cos^{-1} x$	$\frac{d}{dx}(-\cos^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14.	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
15.	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\cot^{-1} x$	$\frac{d}{dx}(-\cot^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
16.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x$	$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
17.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
18.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\sec^{-1} x$	$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
19.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$
20.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}$	$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

नोट :

- यदि उपरोक्त मानक फलनों में समाकल्य (Integrand) में x की जगह $(ax + b)$ हो तो प्राप्त परिणाम में a से भाग दे दिया जाता है, अर्थात् $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

  जैसे : $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{\tan(ax+b)}{a} + c$

4.4 अचर एवं फलन के गुणनफल का समाकल (Integral of the Product of a Constant and a Function)

(i) माना λ कोई अचर है, तो $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$ ...(1)

अर्थात् अचर तथा फलन के गुणनफल का समाकल अचर तथा उस फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है।

जैसे : $\int 5x^3 dx = 5\int x^3\,dx = \frac{5x^4}{4} + c$

उपसाध्य : यदि (1) में $f(x) = 1$ हो, तो $\int \lambda \times 1\,dx = \int \lambda\,dx = \lambda \int dx = \lambda \int x^0 dx = \lambda x + c$

तथा $\int dx = x + c$

(ii) $\int \{f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ldots\}\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \int f_3(x)\,dx \pm \ldots$

अर्थात् फलनों के योग अथवा अंतर का समाकल फलनों के अलग-अलग समाकल के योग या अंतर के बराबर होता है।

जैसे : $\int\left(3x^2 - 5\sin x + 6e^x + \frac{1}{x}\right)dx = 3\int x^2dx - 5\int \sin x\,dx + 6\int e^x dx + \int \frac{1}{x}dx$

$= 3\times\frac{x^3}{3} - 5\times(-\cos x) + 6e^x + \log_e x + c$

$= x^3 + 5\cos x + 6e^x + \log_e x + c$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्नलिखित फलनों के x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात करें :

(i) $\int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\,dx$ (ii) $\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

(iii) $\int (x+3)(x-4)\,dx$ (iv) $\int \frac{(1-x^2)^3}{x^2}dx$

हल : (i) $\int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\,dx = \int x^3dx + 3\int x^2\,dx + 3\int x\,dx + \int 1\,dx$

$= \frac{x^4}{4} + 3\times\frac{x^3}{3} + 3\times\frac{x^2}{2} + x + C$

$= \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$

(ii) $\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int\left\{(\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\times\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}dx$

$= \int\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)dx = \int x\,dx + \int\frac{1}{x}dx + 2\int dx$

$= \frac{x^2}{2} + \log_e x + 2x + C$

(iii) $\int (x+3)(x-4)\,dx = \int (x^2 - 4x + 3x - 12)\,dx$

$= \int (x^2 - x - 12)\,dx = \int x^2dx - \int x\,dx - 12\int dx$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x + C$

(iv) $\int \frac{(1-x^2)^3}{x^2}dx = \int \frac{1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6}{x^2}dx$

$= \int\frac{1}{x^2}dx - 3\int\frac{x^2}{x^2}dx + 3\int\frac{x^4}{x^2}dx - \int\frac{x^6}{x^2}dx$

$= \int x^{-2}dx - 3\int dx + 3\int x^2dx - \int x^4dx$

$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 3\times x + 3\frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{4+1}}{4+1} + C$

$= -x^{-1} - 3x + x^3 - \frac{x^5}{5} + C$

$$= -\frac{x^5}{5} + x^3 - 3x - \frac{1}{x} + C$$ उत्तर

उदाहरण 2. निम्न समाकलनों के मान ज्ञात करें :

(i) $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$ (ii) $\frac{x^4}{x^2+1}$

हल : (i) $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1-1}{x+1}\,dx$

$$= \int \frac{x+1}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x+1}\,dx = \int dx - 2\int (x+1)^{-1}\,dx = x - 2\log_e (x+1) + C$$

(ii) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int (x^2-1)\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x + C$$ उत्तर

▸त्रिकोणमितीय फलन पर आधारित प्रश्न

उदारहण 3. निम्न के समाकल ज्ञात करें :

(i) $\int (2\tan x - 3\cot x)^2\,dx$ (ii) $\int \frac{5}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]**

(iii) $\int (2\cos x - 4\sec^2 x + 5\operatorname{cosec}^2 x)\,dx$ (iv) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

(v) $\int \tan^2 x\,dx$ (vi) $\int \cot^2 x\,dx$

हल : (i) $\int (2\tan x - 3\cot x)^2\,dx = \int (4\tan^2 x + 9\cot^2 x - 2\times 2\tan x \times 3\cot x)\,dx$

$$= 4\int \tan^2 x\,dx + 9\int \cot^2 x\,dx - 12\int dx \quad [\because \tan x \cdot \cot x = 1]$$

$$= 4\int (\sec^2 x - 1)\,dx + 9\int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx - 12\int dx$$

$$= 4\int \sec^2 x\,dx - 4\int dx + 9\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - 9\int dx - 12\int dx$$

$$= 4\tan x - 4x - 9\cot x - 9x - 12x + C$$

$$= 4\tan x - 9\cot x - 25x + C$$ उत्तर

(ii) $\int \frac{5}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = 5\int \sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\,dx = 5\int \sec^2 x (1 + \cot^2 x)\,dx$

$$= 5[\int \sec^2 x\,dx + \int \sec^2 x \cot^2 x]\,dx$$

$$= \left[\tan x + \int \frac{1\times \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx\right]$$

$$= 5[\tan x + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx] = 5[\tan x - \cot x] + C$$

(iii) $\int (2\cos x - 4\sec^2 x + 5\operatorname{cosec}^2 x)\,dx$

$$= 2\int \cos x\,dx - 4\int \sec^2 x\,dx + 5\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$$

$= 2\sin x - 4\tan x - 5\cot x + C$

(iv) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

$= \int \text{cosec}^2 x\,dx - \int \sec^2 x\,dx$

$= -\cot x - \tan x + C \qquad [\because \sec^2 x = 1 + \tan^2 x]$

(v) $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \int \sec^2 x\,dx - \int 1\,dx$

$= \tan x - x + c \qquad [\because \text{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x]$

(vi) $\int \cot^2 x\,dx = \int (\text{cosec}^2 x - 1)\,dx$

$= \int \text{cosec}^2 x\,dx - \int 1\,dx$

$= (-\cot x) - x + c$

उदाहरण 4. मान निकालें :

(i) $\int \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\,dx$

(iii) $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\,dx$ (iv) $\int \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}\,dx$

(v) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$

हल : (i) $\int \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx = \int \sqrt{2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int \sin x\,dx = -\sqrt{2}\cos x + C$

(ii) $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x}\,dx \qquad \left[\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x\right]$

$= \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\,dx = \int (\sin x + \cos x)\,dx$

$= \int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + \sin x + C$

(iii) $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\,dx = \int \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan x}\,dx = \int \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$

$= -\frac{\log\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{-1} + C \qquad \left[\because \int \tan(ax + b)dx = -\frac{\log\cos(ax + b)}{a}\right]$

$= \log\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + C$

(iv) $\int \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}\,dx = \int \frac{(\sec x + \tan x)(\sec x + \tan x)}{(\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x)}\,dx$

$= \int \frac{(\sec x + \tan x)^2}{\sec^2 x - \tan^2 x}\,dx$

$$= \int (\sec^2 x + \tan^2 x + 2 \sec x \cdot \tan x)\, dx$$
$$= \int \{\sec^2 x + (\sec^2 x - 1) + 2 \sec x \cdot \tan x\}\, dx$$
$$= \int \{2 \sec^2 x - 1 + 2 \sec x \cdot \tan x\}\, dx$$
$$= 2\int \sec^2 x\, dx - \int dx + 2\int \sec x \cdot \tan x\, dx$$
$$= 2 \tan x - x + 2 \sec x + C$$ उत्तर

(v) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \int \frac{dx}{1 + 2\cos^2 x - 1}$ $[\because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1]$

$$= \int \frac{1}{2\cos^2 x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}(\tan x) + c$$ $[\because \int \sec^2 x\, dx = \tan x]$ उत्तर

उदाहरण 5. मान निकालें :

(i) $\int \sin^3 x\, dx$ (ii) $\int \cos^3 x\, dx$ (iii) $\int \cos^4 x\, dx$

हल : (i) $\int \sin^3 x\, dx = \int \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}\, dx$ $[\because \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x]$

$$= \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$$
$$= \frac{3}{4}(-\cos x) - \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) + C$$
$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$ उत्तर

(ii) $\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}\, dx$ $[\because \cos 3x = 4\cos^3 x - 3 \cos x]$

$$= \frac{1}{4}\int \cos 3x\, dx + \frac{3}{4}\int \cos x\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\sin 3x}{3} + \frac{3}{4}\sin x + C = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$$ उत्तर

(iii) $\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \times \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + C$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{3}{8}x + C$$ उत्तर

उदाहरण 6. मान निकालें :

(i) $\int \frac{\sin x}{\sin (x-\alpha)}\, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2021]

(ii) $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$

हल : (i) $\int \frac{\sin x}{\sin (x-\alpha)}\, dx = \int \frac{\sin (x-\alpha+\alpha)}{\sin (x-\alpha)}\, dx$

$$= \int \frac{\sin (x-\alpha)\cos\alpha + \cos (x-\alpha)\sin\alpha}{\sin (x-\alpha)}\, dx$$

$$= \int \cos\alpha\, dx + \int \sin\alpha \cot (x-\alpha)\, dx$$

$$= \cos\alpha \int dx + \sin\alpha \int \cot (x-\alpha)\, dx$$

$$= \cos\alpha \times x + \sin\alpha \times \log \sin (x-\alpha) + C$$

$$= x\cos\alpha + \sin\alpha \log \sin (x-\alpha) + C$$

(ii) $\int \sin 4x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int 2 \sin 4x \cos 5x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin (4x+5x) + \sin (4x-5x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin 9x - \sin x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \sin 9x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 9x}{9} - (-\cos x)\right] + C$$

$$= -\frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

उदाहरण 7. मान निकालें :

$$\int \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right\} dx, \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

हल : $\int \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right\} dx = \int \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\right\} dx$

$$= \int \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2\sin^2\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right\}}{2\cos^2\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right\}}}\right\} dx$$

$$= \int \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right\} dx$$

$$= \int \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) dx \qquad [\because \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta]$$

$$= \frac{\pi}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

उदाहरण 8. मान निकालें :

(i) $\int \cos^{-1}(\sin x)\, dx$ (ii) $\int \tan^{-1}\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right) dx$

हल : (i) $\int \cos^{-1}(\sin x)\, dx = \int \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx \qquad \left[\because \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta\right]$

$$= \int \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int \frac{\pi}{2}\, dx - \int x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}(x) - \frac{x^2}{2} + c$$

उत्तर

(ii) $\int \tan^{-1}\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right) dx = \int \tan^{-1}\left(\frac{2\sin x\cos x}{1 + 2\cos^2 x - 1}\right) dx$

$$= \int \tan^{-1}\left(\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\right) dx$$

$$= \int \tan^{-1}(\tan x)\, dx$$

$$= \int x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + c$$

उत्तर

● चरघातांकी (Exponential) फलन के समाकलन पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 9. मान निकालें :

(i) $\int \{e^{x\log a} + e^{a\log x} + e^{a\log a}\}\, dx$ (ii) $\int \frac{2^x + 3^x}{5^x}\, dx$

(iii) $\int \frac{(a^x + b^x)^2}{a^x b^x}\, dx$

हल : (i) $\int \{e^{x\log a} + e^{a\log x} + e^{a\log a}\}\, dx$

$$= \int \{e^{\log a^x} + e^{\log x^a} + e^{\log a^a}\}\, dx$$

$$= \int (a^x + x^a + a^a)\, dx \qquad [\because e^{\log f(x)} = f(x)]$$

$$= \int a^x dx + \int x^a\, dx + a^a \int dx$$

$$= \frac{a^x}{\log_e a} + \frac{x^{a+1}}{a+1} + a^a x + C$$

(ii) $\int \frac{2^x + 3^x}{5^x}\, dx = \int \left(\frac{2^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x}\right) dx = \int \left(\frac{2}{5}\right)^x dx + \int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\log_e \frac{2}{5}} + \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\log_e \frac{3}{5}} + C \qquad \left[\because \int a^x = \frac{a^x}{\log_e a}\right]$$

(iii) $\int \frac{(a^x + b^x)^2}{a^x b^x}\, dx = \int \frac{a^{2x} + b^{2x} + 2a^x b^x}{a^x b^x}\, dx$

$$= \int \frac{a^{2x}}{a^x b^x}\, dx + \int \frac{b^{2x}}{a^x b^x} + 2\int \frac{a^x b^x}{a^x b^x} dx$$

$$= \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx + \int \left(\frac{b}{a}\right)^x dx + 2\int dx$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\log_e \left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\log_e \left(\frac{b}{a}\right)} + 2x + C$$

उदाहरण 10. यदि $f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$ तथा $f(1) = \frac{1}{2}$ तो $f(x)$ का मान बतायें।

हल : यहाँ $f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$ $\quad \therefore \quad \int f'(x)\, dx = \int \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$\Rightarrow \quad f(x) = \int x\, dx - \int x^{-2}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C \qquad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + C = \frac{3}{2} + C$ ...(1)

[$x = 1$ रखने पर

किन्तु प्रश्न से, $f(1) = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + C \quad \therefore \quad C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

(1) में C का मान रखने पर $\quad \therefore \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - 1$

प्रश्नावली 4.1

निम्नलिखित फलनों का समाकलन करें :

1. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$
2. (i) $\int (1 + 2x + x^2)\, dx$ (ii) $\int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\, dx$

(iii) $\int \frac{(1-x^2)^3}{x^2}\,dx$ (iv) $\int \frac{1-x^4}{1-x}\,dx$

(v) $\int [10^{2x} + 5e^{-7x} + \sin(7x+5)]\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

3. $\int (1+x)\sqrt{x}\,dx$

4. (i) $\int \frac{x^3+x^2+6x+7}{x^2}\,dx$ (ii) $\int \frac{(1-x^2)^2}{x^2}\,dx$

5. (i) $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 dx$ (ii) $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

6. $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ **7.** $\int [(x+2)^2 + \sec^2 x]\,dx$

8. (i) $\int (e^{ax} + \sin bx)\,dx$ (ii) $\int e^{3x+4}\,dx$

(iii) $\int e^{2x-3}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2021(S)]

9. $\int (e^x + ax^n + \sin x + \cos x)\,dx$

10. (i) $\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$ (ii) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$ (iii) $\int \frac{x+3}{x-2}\,dx$

11. $\int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)\,dx$ **12.** $\int \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

13. $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx$ **14.** $\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

15. (i) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$

16. (i) $\int \frac{4-5\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ (ii) $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

(iii) $\int \tan^2 x\,dx$

17. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$

18. (i) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$

(ii) (a) $\int \frac{5}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2022]

(b) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2021(S)]

(iii) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

19. $\int \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ **20.** $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}\,dx$

21. $\int \sin^4 x\,dx$ **22.** $\int \cos^4 x\,dx$

23. (i) $\int \cos^3 x\, dx$ (ii) $\int \cos^2 bx\, dx$

24. $\int \tan^{-1}\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right) dx$

25. $\int \tan^{-1}(\sec x + \tan x)\, dx$

26. $\int \frac{e^{6\log_e x} - e^{5\log_e x}}{e^{4\log_e x} - e^{3\log_e x}}\, dx$

[संकेत : $\frac{x^6 - x^5}{x^4 - x^3} = \frac{x^5}{x^3}\left[\frac{x-1}{x-1}\right] = x^2$]

27. (i) $\int e^x a^x\, dx$ (ii) $\int \frac{3^x + 5^x}{7^x}\, dx$

28. $\int \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} + x^m + m^x\right) dx$

29. यदि $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$ तथा $f(1) = 0$ तो $f(x)$ का मान बतायें।

30. यदि $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ तथा $f(2) = 0$ तो $f(x)$ का मान बतायें।

31. मान निकालें :

(i) $\int \cos 2x \cos 4x\, dx$

(ii) $\int \sin 4x \cos 3x\, dx$

(iii) $\int \sin 3x \cos 4x\, dx$

(iv) $\int \frac{\cos x}{\cos(x-\beta)}\, dx$

(v) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}\, dx$

32. निम्न का मान बतायें— [उ० प्र० डिप्लोमा 2021(

(i) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 7}{x^2}\, dx$

(ii) $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

(iii) $\int \tan^2 x\, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(

(iv) $\int \left(\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x}\right) dx$

(v) $\int \sin x \cos x\, dx$

(vi) $\int \frac{1}{1-\sin x}\, dx$

(vii) $\int \sec x (\sec x + \tan x)\, dx$

(viii) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

(ix) यदि $f'(x) = 4x^3 - 6$ तथा $f(0) = 3$ तो $f(x)$ का मान बतायें।

(x) $\int \sin^2 2x\, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. $\int 3^x\, dx$ का मान है—

(a) $3^x \log 3 + c$ (b) $3^x + c$ (c) $\frac{3^x}{\log 3} + c$ (d) कोई नहीं

$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\, dx$ का मान है—

(a) $\tan x + x + c$ (b) $\tan x - x + c$ (c) $-\tan x + x + c$ (d) कोई नहीं

3. $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$ का मान है—

(a) $\sqrt{2}\sin x + c$ (b) $\sqrt{2}\cos x + c$ (c) $-\sqrt{2}\sin x + c$ (d) कोई नहीं

4. $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$ का मान है—

(a) $-\sin x + \cos x + c$ (b) $\sin x + \cos x + c$

(c) $\sin x - \cos x + c$ (d) कोई नहीं

5. यदि $f'(x) = x^2 + 5$ तो $f(x)$ का मान है—

(a) $2x$ (b) $x^3 + 5x + c$ (c) $\frac{x^3}{3} + 5x + c$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + k$

2. (i) $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$ (ii) $\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c$ (iii) $-\frac{x^5}{5} + x^3 - 3x - \frac{1}{x} + c$

(iv) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$ (v) $\frac{1}{2}\frac{10^{2x}}{\log_e 10} - \frac{5}{7}e^{-7x} - \frac{\cos(7x+5)}{7}$

3. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + c$ **4.** (i) $\frac{x^2}{2} + x + 6\log x - \frac{7}{x} + c$ (ii) $\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}$

5. (i) $\frac{x^7}{7} - \frac{1}{5x^5} + x^3 - \frac{3}{x} + c$ (ii) $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + c$

6. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \log x - \frac{1}{2x^2} + c$ **7.** $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + \tan x + c$

8. (i) $\frac{e^{ax}}{a} - \frac{\cos bx}{b} + c$ (ii) (a) $\frac{e^{3x+4}}{3} + c$ (b) $\frac{e^{2x-3}}{2} + c$

9. $e^x + \frac{ax^{n+1}}{n+1} - \cos x + \sin x + c$

10. (i) $\log(x-1) - \frac{1}{x-1} + c$ (ii) $x - \tan^{-1} x + c$ (iii) $x + 5\log(x-2)$

11. $\tan x - \cot x + c$ **12.** $\sec x + \operatorname{cosec} x + c$

13. $\tan x - \cot x + c$ **14.** $\sqrt{2}\sin x + c$

15. (i) $\cos x + \sin x + c$ (ii) $2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) + c$

16. (i) $4\tan x - 5\sec x + c$ (ii) $2\tan x - x + c$ (iii) $\tan x - x + c$

17. $2(\operatorname{cosec} x - \cot x) - x + c$

18. (i) $-\operatorname{cosec} x + \cot x + x + c$ (ii) (a) $5\{\tan x - \cot x\} + c$ (b) $\tan x - \cot x + c$

(iii) $-\cot x - \tan x + c$

19. $\tan x + c$ **20.** $2(\sin x + x\cos\alpha) + c$

21. $\frac{1}{8}\left(3x - 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$ **22.** $\frac{1}{8}\left(3x + 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$

23. (i) $\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c$ (ii) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2bx}{2b}\right)$ **24.** $\frac{x}{4}(2\pi - x) + c$

25. $\frac{x}{4}(\pi + x) + c$ **26.** $\frac{x^3}{3} + c$

27. (i) $\frac{(ae)^x}{\log(ae)} + c$ (ii) $\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^x}{\log_e \frac{3}{7}} + \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^x}{\log_e \frac{5}{7}} + c$

28. $\frac{x^2}{2m} + m\log x + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{m^x}{\log m} + c$

29. $x^3 + \frac{1}{x^2} - 2$ **30.** $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$

31. (i) $\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2}\right\} + c$ (ii) $\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 7x}{7} - \cos x\right] + c$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 7x}{7} + \cos x\right] + c$ (iv) $x\cos\beta + \sin\beta \log\cos(x-\beta) + c$

(v) $x\cos\alpha + \sin\alpha \log\sin(x-\alpha) + C$

32. (i) $\frac{x^2}{2} + 3x - 2\log x - \frac{7}{x} + c$ (ii) $x + 2\log x - \frac{1}{x} + c$ (iii) $\tan x - x + c$

(iv) $-\cos x + \sin x + c$ (v) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$ (vi) $\tan x + \sec x + c$

(vii) $\tan x + \sec x + c$ (viii) $\frac{3}{5}x^{5/3} + c$

(ix) $x^4 - 6x + 3$ (x) $\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right] + c$

✍ बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (c) **2.** (b) **3.** (a) **4.** (c) **5.** (c)

अध्याय

5 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

5.1 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

हमने पिछले अध्याय में उन फलनों के समाकलन पर विचार किया है जो या तो मानक रूप में दिए गए हों या जिन्हें सरल करके मानक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। किंतु कुछ फलनों का समाकलन ज्ञात करने के लिए उन्हें उचित प्रतिस्थापन द्वारा मानक रूप में लाना पड़ता है। उचित प्रतिस्थापन द्वारा मानक रूप में लाकर समाकलन ज्ञात करने की यह विधि 'प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन' के नाम से जानी जाती है।

इस अध्याय में हम कुछ विशेष प्रकार के फलनों का प्रतिस्थापन द्वारा मानक फलनों में परिवर्तित कर समाकलन करना सीखेंगे।

नीचे कुछ फलनों को मानक रूप में बदलने की विधि पर विचार करेंगे।

5.1.1 Type I : जब फलन $f(ax \pm b)$ के रूप का हो

इस स्थिति में, $ax \pm b = t$ रखें,

जिससे $a\,dx = dt$ अर्थात् $dx = \frac{1}{a}dt$

जैसे : **1.** $\int \cos(ax + b)\,dx$ का मान ज्ञात करें।

हल : माना $ax + b = t$ तो $a\,dx = dt$ $\therefore$ $dx = \frac{1}{a}\,dt$

$$\therefore \quad \int \cos(ax+b)\,dx = \int \cos t \,\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a}\sin t + C$$

$$= \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$ उत्तर

2. $\int (ax+b)^n\,dx$

हल : माना $ax + b = t$ तो $a\,dx = dt$ $\therefore$ $dx = \frac{1}{a}\,dt$

$$\therefore \quad \int (ax+b)^n\,dx = \int t^n \times \frac{1}{a}\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\int t^n\,dt = \frac{1}{a}\,\frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$$

नोट :

- उपरोक्त उदाहरणों से सपष्ट है कि मानक सूत्रों में यदि x की जगह $(ax + b)$ का प्रयोग हो तो हम उसी मानक सूत्र का प्रयोग करते हैं किन्तु प्राप्त परिणाम में x के गुणांक से भाग दे देते हैं।

Type II : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ **के रूप के समाकलन**

यहाँ अंश (Numerator), हर (Denominator) का अवकल गुणांक है।

माना $f(x) = t$ तो $f'(x)\,dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$$

अर्थात् $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x) + C$$

दूसरे शब्दों में $\int \frac{\frac{d}{dx}(\text{हर})}{\text{हर}}\,dx = \log(\text{हर}) + C$

उदाहरण 1. मान निकालें—

(i) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (ii) $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

(ii) $\int \frac{\cot x}{\log \sin x}\,dx$

हल : (i) माना $1 + e^x = t$ तो $e^x dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log(1+e^x) + C$$

(ii) $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

[अब प्रश्न (i) की तरह हल करें]

(iii) माना $\log \sin x = t$ तो $\frac{1}{\sin x}\cos x\,dx = dt$

अर्थात् $\cot x\,dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{\cot x}{\log \sin x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$$

$$= \log\{\log \sin x\} + C$$

नोट :

- **यदि हर में $[f(x)]^n$ के रूप का फलन हो तथा अंश में $f'(x)$ हो तो $f(x) = t$ रखने से फलन $\int t^{-n}dt$ के रूप का जाएगा जिसे $\int x^n\,dx$ के सूत्र के प्रयोग से समाकलित किया जाता है।**
- यदि $\int x^{n-1} f(x^n)$ के रूप का फलन हो, तो $x^n = t$ रखें।

उदाहरण 2. $\int \frac{3x^2}{(x^3+5)^4}\,dx$ का मान निकालें।

हल : माना $(x^3 + 5) = t$ तो $3x^2 dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{3x^2}{(x^3+5)^4}\,dx = \int \frac{dt}{t^4} = \frac{t^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{t^{-3}}{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{(x^3+5)^3} + C$$

उपर्युक्त विधि से प्राप्त कुछ मानक परिणाम (Some Standard Results)

(i) $\int \tan x\,dx = -\log \cos x + C = \log \sec x + C$

(ii) $\int \cot x\,dx = \log \sin x + C$

(iii) $\int \sec x\,dx = \log(\sec x + \tan x) + C = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x) + C$

$= \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + C = \log \tan \frac{x}{2} + C$

(v) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

प्रमाण : (i) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

माना $\cos x = t$ तो $-\sin x\,dx = dt$

$\therefore \quad \int \tan x\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log t + C$

$= -\log(\cos x) + C = \log(\cos x)^{-1} + C$

अर्थात् $\int \tan x\,dx = \log \sec x + C \qquad \because (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ **प्रमाणित।**

(ii) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

माना $\sin x = t$ तो $\cos x\,dx = dt$

$\therefore \quad \int \cot x\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log \sin x + C$ **प्रमाणित।**

(iii) $\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\,dx$ [$(\sec x + \tan x)$ से गुणा तथा भाग करने पर]

माना $\sec x + \tan x = t$

तो $(\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x)\,dx = dt$

या $\sec x(\sec x + \tan x)\,dx = dt$

$\therefore \quad \int \sec x\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$

अर्थात् $\int \sec x\,dx = \log(\sec x + \tan x) + C$ **प्रमाणित।**

पुनः $\log(\sec x + \tan x) = \log\left[\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right] = \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

$$= \log\left[\frac{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) + 2\sin(x/2).\cos(x/2)}{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}\right]$$

$$\left[\because \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1\right]$$

$$= \log\left[\frac{\{\cos(x/2) + \sin(x/2)\}^2}{[\cos(x/2) + \sin(x/2)][\cos(x/2) - \sin(x/2)]}\right]$$

$$= \log\left[\frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)}\right]$$

$$= \log\left[\frac{1 + \tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)}\right]$$ [अंश तथा हर में $\cos(x/2)$ से भाग देने पर]

$$= \log\left[\frac{\tan(\pi/4) + \tan(x/2)}{1 - \tan(\pi/4).\tan(x/2)}\right] = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$\therefore$ $\int \sec x\,dx = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

अतः $\int \sec x\,dx = \log(\sec x + \tan x) + C$

$$= \log\tan\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right\} + C$$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec} x + \cot x)}{\operatorname{cosec} x + \cot x}$ ...(1)

माना $\operatorname{cosec} x + \cot x = t$

तो $(-\operatorname{cosec} x \cot x - \operatorname{cosec}^2 x)\,dx = dt$

या $\operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec} x + \cot x)\,dx = -dt$

$\therefore$ $\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\int \frac{dt}{t}$ [समीकरण (1) के प्रयोग से]

$$= -\log t + C$$

अर्थात् $\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x) + C$ प्रमाणित।

पुनः $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin(x/2).\cos(x/2)}\,dx$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos(x/2)}}{\frac{2\sin(x/2)\times\cos(x/2)}{\cos(x/2)}}$$ [हर तथा अंश में $\cos(x/2)$ से भाग देने पर]

i.e., $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{\sec^2(x/2)}{2\tan(x/2)}\,dx$ ...(2)

माना $\tan\frac{x}{2} = t \quad \Rightarrow \quad \sec^2\frac{x}{2} \times \frac{1}{2}\,dx = dt$

$\therefore$ $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dt}{t}$ [समीकरण (2) के प्रयोग से]

$$= \log t + C$$

अर्थात् $\int \text{cosec } x\, dx = \int \log \tan \frac{x}{2} + C$

टिप्पणी : (a) $\int \sec x\, dx = \int \text{cosec } (\pi/2) + x)\, dx$ ...(1)

$= \log \tan \left\{\frac{(\pi/2) + x}{2}\right\} + C$ [(1) से]

अर्थात् $\int \sec x\, dx = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

टिप्पणी : (b) $\int \textbf{cosec } x\, dx = \frac{\int \textbf{cosec } x\, (\textbf{cosec } x - \cot x)}{\textbf{cosec } x - \cot x} dx = \log (\text{cosec } x - \cot x) + C$

प्रमाण : (v) माना $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$

माना $x = a \tan \theta$ जिससे कि $dx = a \sec^2 \theta\, d\theta$ तथा $\tan \theta = \frac{x}{a}$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \tan^2 \theta + a^2} d\theta$$

$$= \int \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 (\tan^2 \theta + 1)} d\theta$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \frac{1}{a} \int d\theta$$

$$= \frac{1}{a} [\theta] + C = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \qquad \left[\because \tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{x}{a}\right]$$

5.1.2 Type III : $\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx$ के रूप के समाकलन

यदि समाकल्य ऐसे दो फलनों का गुणनखण्ड है जिसमें एक फलन दूसरे फलन का अवकल गुणांक हो, तो उस फलन को t मानें जिसका अवकल गुणांक दूसरा फलन है।

यदि $f(x) = t$ तो $f'(x)\, dx = dt$

तो $\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$

अर्थात् $\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

उदाहरण 1. $\int \frac{(1 + \log x)^2}{x} dx$ का मान निकालें।

हल : माना $1 + \log x = t$ तो $\frac{1}{x} dx = dt$

$\therefore \quad \int \frac{(1 + \log x)^2}{x} dx = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C$

$$= \frac{(1 + \log x)^3}{3} + C$$

उदाहरण 2. $\int \frac{(p + q \tan^{-1} x)^m}{1 + x^2} dx$ का मान निकालें।

हल : माना $p + q \tan^{-1} x = t$ $\Rightarrow$ $\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dt}{q}$

तो $q \frac{1}{1 + x^2} dx = dt$

$$\therefore \int \frac{(p + q \tan^{-1} x)^m}{1 + x^2} dx = \frac{1}{q} \int t^m \, dt = \frac{1}{q} \frac{t^{m+1}}{m + 1} + C$$

$$= \frac{1}{q(m + 1)} (p + q \tan^{-1} x)^{m+1} + C$$

उदाहरण 3. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2} dx$ का मान बतायें।

हल : माना $\tan^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{1 + x^2} dx = dt$

$$\therefore \int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2} dx = \int e^t \, dt = e^t + C$$

$$= e^{\tan^{-1} x} + C$$

5.1.3 Type IV : $\int \frac{1}{[(ax + b)^{1/m} \pm (ax + b)^{1/n}]} dx$ अथवा $\int \frac{ax^{1/m} + b}{ax^{1/n} + b} dx$ के रूप के

इस स्थिति में $(ax + b) = t^p$ लें, जहाँ p, संख्याओं m तथा n के लघुत्तम समापवर्त्य है।

उदाहरण : $\int \frac{dx}{(1 + x)^{1/2} + (1 + x)^{1/3}}$

हल : माना $I = \int \frac{dx}{(1 + x)^{1/2} + (1 + x)^{1/3}}$

यहाँ 2 तथा 3 का लघुत्तम समापवर्त्य = 6

$\therefore$ माना $1 + x = t^6$

या $dx = 6t^5 \, dt$ तथा $t = (1 + x)^{1/6}$

$$\therefore I = \int \frac{6t^5}{(t^6)^{1/2} + (t^6)^{1/3}} dt$$

$$= 6 \int \frac{t^5}{t^3 + t^2} dt$$

$$= 6 \int \frac{t^5}{t^2 (t + 1)} dt$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt$$

$$= 6\int \left[t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right] dt \qquad \text{[भाग देने पर]}$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log(t+1)\right] + C$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log(t+1) + C$$

$$= 2(1+x)^{1/2} - 3(1+x)^{1/3} + 6(1+x)^{1/6} - 6\log[(1+x)^{1/6} + 1] + C$$

[t का मान रखने पर]

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. मान बतायें :

(i) $\int e^{4x+5}\,dx$ (ii) $\int a^{3x+2}\,dx$

(iii) $\int \sec^2(7-4x)\,dx$ (iv) $\int \sin(ax+b)\cos(ax+b)\,dx$

हल : (i) $\int e^{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x+5} + C$ $\left[\because \int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C\right]$

(ii) $\int a^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\frac{a^{3x+2}}{\log_e a} + C$ $\left[\because \int a^{\alpha x+\beta}\,dx = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha} + C\right]$

(iii) $\int \sec^2(7-4x)\,dx = \frac{\tan(7-4x)}{-4} + C = -\frac{1}{4}\tan(7-4x) + C$

(iv) $\int \sin(ax+b)\cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sin(ax+b)\cos(ax+b)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2(ax+b)\,dx \qquad [\because \sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2(ax+b)}{2a}\right] + C$$

$$\left[\because \int \sin(Ax+B)\,dx = -\frac{\cos(Ax+B)}{A} + C\right]$$

$$= -\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b) + C$$ उत्तर

उदाहरण 2. मान निकालें :

(i) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx$ (ii) $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$

हल : (i) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1+2x-2x}{(x+1)^2}\,dx$ [अंश में $2x$ जोड़ने तथा घटाने पर]

$$= \int \frac{(x+1)^2 - 2x}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}\, dx - 2\int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= \int dx - 2\int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= \int dx - 2\left[\int \frac{x+1}{(x+1)^2}\, dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx\right]$$

$$= \int dx - 2\int \frac{1}{x+1}\, dx + 2\int (x+1)^{-2}\, dx$$

$$= x - 2\log(x+1) + 2 \times \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + C \qquad \left[\because \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \int \frac{1}{x} dx = \log x + C\right]$$

$$= x - 2\log(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$$

(ii) $\int \left(\frac{x^3}{x+2}\right) dx = \int \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}\right) dx$ [हर से अंश में भाग देने पर]

$$= \int x^2 dx - 2\int x\, dx + 4\int dx - 8\int \frac{1}{x+2}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x - 8\log(x+2) + C \qquad \left[\because \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \int \frac{1}{x} dx = \log x + C\right]$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\log(x+2) + C$$

उदाहरण 3. मान निकालें।

(i) $\int \cos^4 x\, dx$ (ii) $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$

हल : (i) $\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2\, dx$

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \qquad [\because\ 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x]$$

$$= \int \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\, dx \qquad [(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right] dx \qquad [\because\ \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1]$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}[3\int dx + 4\int \cos 2x\, dx + \int \cos 4x\, dx]$$

$$= \frac{1}{8}\left[3x + \frac{4\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4}\right] + C \qquad \left[\because \int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + C\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[3x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right] + C$$

(ii) $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x \cos x)^4\, dx$ [2^4 अर्थात् 16 से गुणा तथा भाग करने पर]

$$= \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4\, dx \qquad [\because \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x]$$

$$= \frac{1}{16}\int (\sin^2 2x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx \qquad [\because \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x]$$

$$= \frac{1}{64}\int [1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x]\, dx \qquad [\because (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$$

$$= \frac{1}{64}\left[\int dx - 2\int \cos 4x\, dx + \int \frac{1+\cos 8x}{2}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{64}\left[x - \frac{2\sin 4x}{4} + \frac{1}{2}\left\{x + \frac{\sin 8x}{8}\right\}\right] + C \qquad [\because \cos 8x = 2\cos^2 4x - 1]$$

$$\left[\because \int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + C\right]$$

$$= \frac{1}{64}\left[\frac{3}{2}x - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{1}{16}\sin 8x\right] + C$$

$$= \frac{1}{128}\left[3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right] + C$$

उत्तर

उदाहरण 4. मान निकालें :

(i) $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$

(ii) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{3 + 4\tan x}\, dx$

(iv) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(v) $\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx$

(vi) $\int \sec x \log(\sec x + \tan x)\, dx$

(vii) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

(viii) $\int \frac{e^x (1+x)}{\cos^2 (xe^x)}\, dx$

(ix) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]

(x) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x \times (\sin x)^{1/2}}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{(\sin x)^{3/2}}\,dx$$

माना $\sin x = t$ तो $\cos x\,dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t^{3/2}} = \int t^{-3/2}\,dt = \frac{t^{-3/2+1}}{-3/2+1} + C$

$$= \frac{t^{-1/2}}{-1/2} + C = \frac{-2}{t^{1/2}} + C = \frac{-2}{(\sin x)^{1/2}} + C$$ [t का मान रखने पर]

$\therefore \quad \int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + C$

(ii) $I = \int \sin^2 x \cos x\,dx$

माना $\sin x = t$ तो $\cos x\,dx = dt$

$$I = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$ [t का मान रखने पर]

अर्थात् $\quad \int \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

(iii) $I = \int \frac{\sec^2 x}{3+4\tan x}\,dx$

माना $3 + 4\tan x = t$ तो $0 + 4\sec^2 x\,dx = dt$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x\,dx = \frac{1}{4}\,dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\log t + C$

$$= \frac{1}{4}\log(3 + 4\tan x) + C$$ [t का मान रखने पर]

(iv) $I = \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

माना $\sin^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dt$

$\therefore \quad I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + C$ [t का मान रखने पर] उत्तर

(v) $I = \int \tan^3 x \,.\, \sec^5 x\, dx$

$= \int \sec^4 x \,.\, \tan^2 x \,.\, \sec x \,.\, \tan x\, dx$

$= \int \sec^4 x\, (\sec^2 x - 1) \,.\, \sec x \,.\, \tan x\, dx$ [$\because \tan^2 x = \sec^2 x - 1$]

$= \int (\sec^6 x - \sec^4 x) \sec x \,.\, \tan x\, dx$

माना $\sec x = t$ तो $\sec x \,.\, \tan x\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int (t^6 - t^4)\, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C$

$= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C$ [t का मान रखने पर] उत्तर

(vi) $I = \int \sec x \log (\sec x + \tan x)\, dx = \int \log (\sec x + \tan x) \sec x\, dx$

माना $\log (\sec x + \tan x) = t$

$\frac{1}{\sec x + \tan x} \times (\sec x \,.\, \tan x + \sec^2 x)\, dx = dt$

या $\frac{\sec x\, (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx = dt$

अर्थात् $\sec x\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{[\log (\sec x + \tan x)]^2}{2} + C$ [t का मान रखने पर] उत्तर

(vii) $I = \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

$= \int \frac{2 \sin x \cos x / \cos^4 x}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x}}\, dx = \int \frac{2 \tan x \sec^2 x}{1 + \tan^4 x}\, dx$

माना $\tan^2 x = t$ तो $2 \tan x \,.\, \sec^2 x\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \tan^{-1} t + C$

$= \tan^{-1} (\tan^2 x) + C$ [t का मान रखने पर] उत्तर

(viii) $I = \int \frac{e^x (1 + x)}{\cos^2 (xe^x)}\, dx$

माना $xe^x = t$ तो $(xe^x + e^x)\, dx = dt$

$\Rightarrow \quad e^x\, (1 + x)\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \sec^2 t\, dt$

$= \tan t + C = \tan (xe^x) + C$ [t का मान रखने पर] उत्तर

(ix) $I = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

माना $e^x + e^{-x} = t$

$\Rightarrow$ $(e^x - e^{-x})\, dx = dt$

$\therefore$ $I = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$

$= \log (e^x + e^{-x}) + C$ [t का मान रखने पर]

(x) $I = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\, dx = \int \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}\, dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$

माना $\cos x + \sin x = t$

$(-\sin x + \cos x)\, dx = dt$

अर्थात् $(\cos x - \sin x)\, dx = dt$

$\therefore$ $I = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$

$= \log (\cos x + \sin x) + C$ [t का मान रखने पर]

उदाहरण 5. (i) $\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}\, dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}\, dx$ (iii) $\int \frac{x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}\, dx$

हल : (i) $I = \int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}\, dx$

यहाँ $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ के हर 2 तथा 3 का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) 6 है। अतः भिन्नात्मक घातों से मुक्त होने के लिए हम समी० (1) में $x = t^6$ तथा $dx = 6t^5\, dt$ रखते हैं।

$$I = \int \frac{6t^5}{(t^6)^{1/2} + (t^6)^{1/3}}\, dt = 6 \int \frac{t^5}{t^3 + t^2}\, dt$$

$$= 6 \int \frac{t^5}{t^2 (t+1)}\, dt$$

$$= 6 \int \frac{t^3}{t+1}\, dt$$

$$= 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1}\, dt \qquad \text{[अंश में 1 जोड़ने तथा घटाने पर]}$$

$$= 6 \left[\int \frac{t^3 + 1}{t+1}\, dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt \right]$$

$$= 6 \left[\int \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{t+1}\, dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt \right]$$

$[\because a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2$

$$= 6\left[\int (t^2 - t + 1)\, dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt\right]$$

$$I = 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log(t+1)\right] + C$$

$$= 6\left[\frac{(x^{1/6})^3}{3} - \frac{(x^{1/6})^2}{2} + x^{1/6} - \log(x^{1/6}+1)\right] + C \qquad [\because\ t = x^{1/6}]$$

$$= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\log(x^{1/6}+1) + C \qquad [t \text{ का मान रखने पर}] \quad \text{उत्तर}$$

(ii) माना $\int \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}\, dx$

अतः हर के परिमेयीकरण से

$$I = \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})}\, dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{(\sqrt{x+a})^2 - (\sqrt{x+b})^2}\, dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{x+a-x-b}\, dx \qquad [\because\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{a-b}\, dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\int \sqrt{(x+a)}\, dx - \int \sqrt{x+b}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x+a)^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{(x+b)^{1/2+1}}{1/2+1}\right] + C \qquad \left[\because \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{2}{3}(x+a)^{3/2} - \frac{2}{3}(x+b)^{3/2}\right] + C$$

$$= \frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{3/2} - (x+b)^{3/2}\right] + C$$

(iii) माना $I = \int \frac{x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}\, dx = \int \frac{x\left[\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}\right]}{\left[\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right]\left[\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}\right]}\, dx$

$$= \int \frac{x\left[\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}\right]}{(x+a) - (x+b)}\, dx$$

$$= \int \frac{x\sqrt{x+a} - x\sqrt{x+b}}{a-b}\, dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[(x+a-a)(x+a)^{1/2} - (x+b-b)(x+b)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\int \left[(x+a)^{3/2} - a(x+a)^{1/2} - (x+b)^{3/2} + b(x+b)^{1/2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x+a)^{3/2+1}}{3/2+1} - \frac{a(x+a)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(x+b)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{b(x+b)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + C$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{2}{5}(x+a)^{\frac{5}{2}} - \frac{2a}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(x+b)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+b)^{\frac{3}{2}}b\right] + C$$

नोट :

• (iv) तथा (v) में समाकल $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\,dx$ रूप का फलन है। अतः ऐसे फलन में हर का परिमेयकीकरण (Rationalisation) किया जाता है।

महत्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log_e f(x) + C$

2. $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \tan x\,dx = \log_e \sec x + C$

4. $\int \cot x\,dx = \log \sin x + C$

5. $\int \sec x\,dx = \log(\sec x + \tan x) + C = \log \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

6. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + C = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x) + C = \log \tan(x/2) + C$

7. $\int \frac{1}{(ax+b)^{1/m} \pm (ax+b)^{1/mn}}\,dx$ के रूप के समाकलन में $ax + b = t^p$ लें, जहाँ p, m तथा n का लघुतम समापवर्त्य है।

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x+a} \pm \sqrt{x+b}}\,dx$ के रूप के समाकल में हर का परिमेयीकरण करें।

प्रश्नावली 5.1

मान ज्ञात करें—

1. $\int (3x+5)^7\,dx$ **2.** $\int \sqrt{5x+7}\,dx$ **3.** $\int \left(\sqrt{3x+2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

4. $\int \sin^2(2x+5)\,dx$ **5.** $\int \sin^3(2x+1)\,dx$ **6.** $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,dx$

7. $\int (e^x+1)^2 e^x\,dx$ **8.** $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx$ **9.** $\int x\sqrt{4x+3}\,dx$

10. $\int (x+2)\sqrt{3x+5}\,dx$ **11.** $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$ **12.** $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx$

13. $\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$ [संकेत : $x^4 = t$ रखें]

14. $\int \frac{x^7}{1+x^{16}}\,dx$

15. $\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx$

16. $\int \sec x \log(\sec x + \tan x)\,dx$

17. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2}\,dx$

18. $\int \frac{\sin 2x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}\,dx$

[संकेत : Put $a\cos^2 x + b\sin^2 x = t$]

19. $\int x e^{-x^2}\,dx$ **20.** $\int e^x \sin e^x\,dx$ **21.** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]

22. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\,dx$

(ii) $\int \sqrt{\cos x}\sin^3 x\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2021(S)]

23. (i) $\int (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})\,dx$

(ii) $\int e^{3x-4}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]

(iii) $\int e^{2x-3}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2021(S)]

24. (i) $\int \frac{a}{b+ce^x}\,dx$

[संकेत : e^{-x} से गुणा-भाग कर $be^{-x} + c = t$ रखें]

(ii) $\int \frac{dx}{1+e^x}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

25. (i) $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,dx$

(ii) $\int \frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

(iii) $\int \frac{1-\sin 3x}{3x-\cos 3x}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

[संकेत : Put $3x - \cos 3x = t$]

26. $\int \frac{\cos(a + b\log x)}{x}\,dx$

27. (i) $\int \frac{1}{x(1+\log x)}\,dx$

(ii) $\int \frac{1}{x\log x}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2021]

(iii) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2021]

28. $\int \frac{(p+q\tan^{-1}x)^m}{1+x^2}\,dx$

29. $\int \tan x \sec^2 x \sqrt{1-\tan^2 x}\,dx$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}$

[संकेत : $\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$]

31. $\int \sec^7 x \sin x\,dx$

32. $\int \frac{\tan x}{3+2\tan^2 x}\,dx$

[संकेत : $\int \frac{\sin x / \cos x}{3 + 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int \frac{\sin x \cos x}{3\cos^2 x + 2\sin^2 x}$, अब $3\cos^2 x + 2\sin^2 x = t$ लें]

33. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 199

[संकेत : $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\tan x\, dx}{\sqrt{\tan x} \sin x \cos x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\tan x} \sin x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}} dx$]

34. (i) $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$

[संकेत : $\int \frac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)} dx = \frac{1}{\sin(b-a)} \int \frac{\sin(b-a)}{\sin(x-a)\sin(x-b)} dx$
$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int \frac{\sin\{(x-a)-(x-b)\}}{\sin(x-a)\sin(x-b)} dx$]

(ii) $\int \frac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$ (iii) $\int \frac{\cos x}{\cos(x-\alpha)} dx$

(iv) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-\alpha)} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 202

(v) $\int \frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)} dx$ [संकेत : $x + \alpha = t$ रखें]

35. (i) $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/3}}$ (ii) $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/2} + (1+x)^{1/3}}$

36. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}} dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{3-2x}} dx$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}}$ (iv) $\int \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}} dx$

(v) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2023

(vi) $\int x\sqrt{\frac{9-x^2}{9+x^2}} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2023

37. निम्न का मान बतायें—

(i) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$ (ii) $\int \frac{7}{1+x} dx$

(iii) $\int e^x \cot(e^x) dx$ (iv) $\int \frac{\sec^2(\log x)}{x} dx$

(v) $\int \frac{1}{(2-3x)^4} dx$ (vi) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. $\int e^{x^3} x^2\, dx$ का मान बताये—

(a) $e^{x^3} + c$ (b) $\frac{1}{3} e^{x^3} + c$ (c) $\frac{1}{6} e^{x^3} + c$ (d) कोई नहीं

2. $\int \sqrt{\sin x} \cos x\, dx$ का मान है—

(a) $\frac{2}{3} (\cos x)^{3/2} + c$ (b) $\frac{3}{2} (\cos x)^{3/2} + c$ (c) $\frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} + c$ (d) कोई नहीं

3. $\int \frac{1}{x \cos^2 (1 + \log x)} dx$ का मान है—

(a) $\tan (1 + \log x) + c$ (b) $\cot(1 + x) + c$ (c) $\sec (1 + \log x) + c$ (d) कोई नहीं

4. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$ का मान है—

(a) $\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + c$ (b) $\log (x - \sin x) + c$ (c) $-\cot \frac{x}{2} + c$ (d) कोई नहीं

5. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ का मान है—

(a) $\cot^{-1}(e^x) + c$ (b) $\tan^{-1} (e^x) + c$ (c) $\log (e^x + 1)$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $\left[\frac{(3x + 5)^8}{24} + C\right]$ **2.** $\frac{2 (5x + 7)^{3/2}}{15} + C$ **3.** $\frac{2 (3x + 2)^{3/2}}{9} - \log (x + 2) + C$

4. $\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin (4x + 10) + C$ **5.** $-\frac{3}{8} \cos (2x + 1) + \frac{1}{24} \cos (6x + 3) + C$

6. $-2 \cot \frac{x}{2} - x + C$ **7.** $\frac{1}{3} (e^x + 1)^3 + C$ **8.** $\frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$

9. $\frac{1}{40} (4x + 3)^{5/2} - \frac{1}{8} (4x + 3)^{3/2} + C$ **10.** $\frac{2}{135} (9x + 20) (3x + 5)^{3/2}$

11. $\frac{2}{3} (x - 8) \sqrt{x + 4} + c$ **12.** $x - 2 \log (x + 1) - \frac{2}{x + 1} + C$

13. $\frac{1}{4} \tan^{-1} (x^4) + C$ **14.** $\frac{1}{8} \tan^{-1} x^8 + C$

15. $\frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C$ **16.** $\frac{[\log (\sec x + \tan x)]^2}{2} + C$

17. $\log (\sin x + \cos x) + C$ **18.** $\frac{1}{b - a} \log (a \cos^2 x + b \sin^2 x)$

19. $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$ **20.** $-\cos e^x + C$

21. $\log [e^x + \sqrt{1+e^{2x}}] + C$

22. (i) $2 \sin \sqrt{x} + C$ (ii) $\frac{2}{7}(\cos x)^{7/2} - \frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + C$

23. (i) $\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C$ (ii) $\frac{e^{3x+4}}{3} + C$ (iii) $\frac{e^{2x-3}}{2} + C$

24. (i) $-\frac{a}{b} \log (be^{-x}) + C$ (ii) $\log \frac{e^x}{1+e^x} + C$

25. (i) $e^{\tan^{-1} x} + C$ (ii) $-\cos (\tan^{-1} x) + c$ (iii) $\log(3x - \cos 3x) + c$

26. $\frac{1}{b} \sin (a + b \log x) + C$

27. (i) $\log [1 + \log x] + C$ (ii) $\log(\log x) + C$ (iii) $\log (e^x + e^{-x}) + C$

28. $\frac{(p+q+\tan^{-1} x)^{m+1}}{q(m+1)}$

29. $-\frac{1}{3}(1 - \tan^2 x)^{3/2} + C$

30. $\sqrt{2} \log \tan \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$

31. $\frac{1}{6} \sec^6 x + C$

32. $-\frac{1}{2} \log (3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x) + C$

33. $2\sqrt{\tan x} + C$

34. (i) $\operatorname{cosec} (b-a) \log \frac{\sin (x-b)}{\sin (x-a)}$ (ii) $\frac{1}{\sin (b-a)} \log \frac{\sec (x-a)}{\sec (x-b)} + C$

(iii) $x \cos \alpha - \sin \alpha \log \sec (x - \alpha) + C$ (iv) $x \cos \alpha + \sin \alpha \log \sin (x - \alpha) + C$

(v) $x \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \log \sin (x + \alpha) + C'$, जहाँ $C' = c + \alpha \cos 2\alpha$

35. (i) $2(1+x)^{1/2} + 3(1+x)^{1/3} + 6(1+x)^{1/6} + 6 \log [(1+x)^{1/6} - 1] + C$

(ii) $2(1+x)^{1/2} - 3(1+x)^{1/3} + 6(1+x)^6 - 6 \log [(1+x)^6 + 1]$

36. (i) $\frac{2}{3}\{(x+3)^{3/2} + (x+2)^{3/2}\} + C$ (ii) $\frac{1}{6}(1-2x)^{3/2} - \frac{1}{6}(3-2x)^{3/2} + C$

(iii) $\frac{1}{6}(2x+3)^{3/2} + \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} + C$ (iv) $\frac{2}{3(a-b)}[(x+a)^{3/2} - (x+b)^{3/2}] + C$

(v) $-2\sqrt{1-x} + \cos^{-1} \sqrt{x} + \sqrt{1-x}\sqrt{x} + c$ (vi) $\frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x^2}{9} + \frac{1}{2}(81 - x^4)^{1/2} + c$

37. (i) $\log (\cos x + \sin x) + c$ (ii) $7 \log (1+x) + c$

(iii) $\log \sin (e^x) + c$ (iv) $\tan (\log x) + c$ (v) $\frac{1}{9(2-3x)^3} + c$

(vi) $-\tan^{-1} (\cos x) + C$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (b) **2.** (c) **3.** (a) **4.** (c) **5.** (b)

अध्याय

6

खण्डशः समाकलन

(Integration by Parts)

6.1 परिभाषा (Definition)

दो फलनों के गुणनफल का समाकलन निम्न सूत्र से प्राप्त किया जाता है :

साध्य : यदि u तथा v चर राशि x के दो फलन हों, तो

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\}dx$$

अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = प्रथम फलन × द्वितीय फलन का समाकलन – {प्रथम फलन का अवकल × द्वितीय फलन का समाकलन} का समाकलन

अर्थात्
$$\int (\text{I}\times\text{II}) = \text{I}\int \text{II} - \int\{\text{I}'\int \text{II}\}$$

उदाहरण : $\int xe^x\,dx$ का मान निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2024]**

माना
$$I = \int \underset{\text{I}}{x}\ \underset{\text{II}}{e^x}\,dx$$

$$= x\int e^x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x\,.\int e^x\,dx\right\}dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C = e^x\,(x-1) + C$$

6.2 प्रथम एवं द्वितीय फलन का चयन (Selection of Ist and IInd Functions)

(A) खंडशः समाकलन से समाकलन ज्ञात करते समय प्रथम एवं द्वितीय फलन के चयन में निम्न बातों का ध्यान रखें—

(i) यदि दो फलनों में एक फलन ऐसा हो जिसका समाकलन हमें ज्ञात न हो तो उसे पहला फलन मानें तथा शेष को दूसरा फलन मानें। जैसे : $\int x\log x\,dx$ में पहला फलन $\log x$ तथा दूसरा फलन x होगा।

(ii) यदि केवल एक फलन है, तो '1' को द्वितीय फलन मानें।

जैसे : $\int \log x\,dx, \int \tan^{-1} x\,dx$ आदि में द्वितीय फलन '1' होगा। जैसे—

$$\int \log x\,dx = \int \log x\times 1\,dx$$

$$\int \tan^{-1} x\,dx = \int \tan^{-1} x\times 1\,dx$$

(B) हम 'ILATE' शब्द में पहले आने वाले फलन को प्रथम फलन तथा बाद में आने वाले फलन को द्वितीय फलन के रूप में चयन करके भी समाकलन कर सकते हैं, जहाँ

I–Inverse Trigonometric Function (प्रतिलोम वृत्तीय फलन) जैसे $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ इत्यादि।

L–Logarithmic Function (लघुगणकीय फलन) जैसे $\log x$, $\log(x+a)$ इत्यादि।

A–Algebraic Function (बीजीय फलन) जैसे : x^2, x^n इत्यादि।

T–Trigonometric Function (त्रिकोणमितीय फलन) जैसे $\sin x$, $\cos x$ आदि।

E–Exponential Function (चरघातांकी फलन) जैसे e^x, a^x इत्यादि।

जैसे : $\int x \sin^{-1} x\, dx$ में $\sin^{-1} x$ जो प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular function) है, को प्रथम फलन के रूप में होगा।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I : जब प्रथम व द्वितीय दोनों फलनों का समाकलन हमें पता हो :

उदाहरण 1. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int x \sec^2 x\, dx$ (ii) $\int x \sin 3x\, dx$ (iii) $\int x^2 \log x\, dx$

(iv) $\int x \cdot a^x\, dx$ (v) $\int x \cos x\, dx$ (vi) $\int x \cdot e^{ax}\, dx$

हल : (i) माना $I = \int \underset{\text{I}}{x}\ \underset{\text{II}}{\sec^2 x}\, dx$ [यहाँ दोनों फलनों का समाकलन आसान है, किंतु x का अंक गुणांक 1 है। अतः इसे प्रथम फलन के रूप में चुनने से सुविधा है, ILATE के अनुसार भी x (बीजीय फलन) को लिया जाएगा]

$$= x\int \sec^2 x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}x \cdot \int \sec^2 x\, dx\right\} dx$$

$$= x \tan x - \int 1 \times \tan x\, dx$$

$$= x \tan x - \log \sec x + C$$

(ii) माना $I = \int \underset{\text{I}}{x}\ \underset{\text{II}}{\sin 3x}\, dx$

$$= x \int \sin 3x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} x \int \sin 3x\, dx\right\} dx$$

$$= \frac{x(-\cos 3x)}{3} - \int 1 \times \left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) dx \qquad \left[\because \int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C\right]$$

$$= -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x\, dx$$

$$= -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{3} + C \qquad \left[\because \int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + C\right]$$

$$= \frac{-x \cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C$$

(iii) माना $I = \int \underset{\text{II}}{x^2} \underset{\text{I}}{\log x}\, dx$ [ILATE से $\log x$ (लघुगणकीय फलन) प्रथम फलन होगा]

$$= \log x \int x^2\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\log x) \int x^2\, dx\right\} dx$$

$$= \log x \times \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\, dx \qquad \left[\because \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \left(\log x - \frac{1}{3} \right) + C$$

(iv) माना $I = \int \underset{\text{I}}{x}\, \underset{\text{II}}{a^x}\, dx$ [ILATE से a^x (चाघातांकी फलन) द्वितीय फलन होगा]

$$= x \int a^x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int a^x \, dx \right\} dx$$

$$= x \frac{a^x}{\log_e a} - \int 1 \times \frac{a^x}{\log_e a} \, dx \qquad \left[\because \int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} \right]$$

$$= x \frac{a^x}{\log_e a} - \frac{a^x}{(\log a)^2} + C$$

(v) दिया है :

$$\int x \cos x \, dx = x \int \cos x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) . \int \cos x \, dx \right\} dx$$

$$\left[\because \int u \, . v \, dx = u . \int v \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} u \, . \int v \, dx \right\} dx \right]$$

$$= x (\sin x) - \int 1 \, . \sin x \, dx + C \qquad [\because \int \cos x \, dx = \sin x]$$

$$= x \sin x + \cos x + C \qquad [\because \int \sin x \, dx = -\cos x]$$ **उत्तर**

(vi) दिया है :

$$\int x . e^{ax} dx = x \, . \int e^{ax} dx - \int \left\{ \frac{dx}{dx} . \int e^{ax} \, dx \right\} dx$$

$$\left[\because \int u \, . v \, dx = u \int v \, dx - \int \left\{ \frac{du}{dx} . \int v \, dx \right\} dx \right]$$

$$= x \, . \left(\frac{e^{ax}}{a} \right) - \int 1 \, . \frac{e^{ax}}{a} dx + C \qquad \left[\because \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \right]$$

$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \int e^{ax} \, dx + C = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^{ax}}{a} \right) + C$$

$$= \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + C$$ **उत्तर**

Type II : जब खंडश: समाकलन एक से अधिक बार होता है :

उदाहरण 2. (i) $\int x^2 e^x \, dx$ (ii) $\int x^2 \cos x \, dx$

हल : (i) माना $I = \int \underset{\text{I}}{x^2}\, \underset{\text{II}}{e^x}\, dx$

$$= x^2 \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x^2 \times \int e^x \, dx \right\} dx$$

$$= x^2 e^x - \int 2x \, e^x \, dx \qquad [\because \int e^x \, dx = e^x]$$

$$= x^2 e^x - 2 \int \underset{\text{I}}{x}\, \underset{\text{II}}{e^x}\, dx$$

$$= x^2e^x - 2\left[x\int e^x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x\int e^x\,dx\right\}\right]dx$$

$$= x^2e^x - 2[xe^x - \int 1\times e^x\,dx] = x^2e^x - 2[xe^x - e^x] + C$$

(ii) $I = \int \underset{\text{I}}{x^2}\ \underset{\text{II}}{\cos x}\,dx$

$$= x^2\int\cos x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x^2\times\int\cos x\,dx\right\}dx$$

$$= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$$

$$= x^2\sin x - 2\int \underset{\text{I}}{x}\ \underset{\text{II}}{\sin x}\,dx$$

$$= x^2\sin x - 2\left[x\int\sin x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x\times\int\sin x\,dx\right\}dx\right]$$

$$= x^2\sin x - 2[-x\cos x - \int 1\times(-\cos x)\,dx$$

$$= x^2\sin x - 2[-x\cos x + \sin x] + C$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

Type III : जब खंडशः समाकलन के लिए '1' (इकाई) को द्वितीय फलन लिया जाता है :

उदाहरण 3. समाकलन कीजिए :

(i) $\int\tan^{-1}x\,dx$ (ii) $\int\log x\,dx$

(iii) $\int\sin^{-1}x\,dx$

हल : (i) माना $I = \int\tan^{-1}x\,dx = \int \underset{\text{I}}{\tan^{-1}x}\times\underset{\text{II}}{1}\,dx$

$$= \tan^{-1}x\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\tan^{-1}x\int dx\right\}dx$$

$$= x\tan^{-1}x - \int\frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad \left[\because \int 1\,dx = x,\ \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C \qquad \left[\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x)\right]$$

(ii) $I = \int\log x\,dx = \int \underset{\text{I}}{\log x}\times\underset{\text{II}}{1}\,dx$

$$= \log x\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\log x\int dx\right\}dx$$

$$= x\log x - \int\frac{1}{x}\times x\,dx \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}\right]$$

$$= x\log x - \int dx$$

$$= x\log x - x + C \qquad [\because \int 1\,dx = x]$$

(iii) दिया है :

$$\int \sin^{-1} x\, dx = \int \sin^{-1} x \cdot 1\, dx$$

यहाँ $\sin^{-1} x$ को प्रथम फलन तथा 1 को द्वितीय फलन मानने पर,

$$= \sin^{-1} x. \int 1\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x). \int 1\, dx \right\} dx$$

$$= \sin^{-1} x. x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . x\, dx \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]$$

$$= x \sin^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{V}} \left(-\frac{1}{2} dV \right)$$

माना $1 - x^2 = V \Rightarrow -2x\, dx = dV \Rightarrow x\, dx = -\frac{1}{2} V$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int V^{-\frac{1}{2}}\, dV$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \left(\frac{V^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C \qquad \left[\because \int V^n\, dV = \frac{V^{n+1}}{n+1} \right]$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$ [V का मान रखने पर] उत्तर

Type IV : जब प्रतिस्थापन से फलन ऐसे मानक फलन में परिवर्तित हो जाता है जिसका खंडशः समाकलन आसान होता है :

उदाहरण 4. (i) $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ (ii) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(iii) $\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ (iv) $\cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) dx$

(v) $\int \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx$

हल : (i) माना $\tan^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$ तथा $x = \tan t$

$$\therefore \int \frac{x^2 \tan^{-1} x}{1+x^2} dx = \int t \tan^2 t\, dt$$

$$= \int t (\sec^2 t - 1)\, dt$$

$$= \int t \sec^2 t\, dt - \int t\, dt$$

$$= t \int \sec^2 t\, dt - \int \left\{ \frac{d}{dt} t \int \sec^2 t\, dt \right\} dt - \frac{t^2}{2} + C_1$$ [खंडशः समाकलन से]

$$= t \tan t - \int 1 \times \tan t\, dt - \frac{t^2}{2} + C \qquad [\because \int \sec^2 t\, dt = \tan t]$$

$= t \tan t - \log \sec t - \frac{t^2}{2} + C$ [$\because \int \tan t \, dt = \log \sec t$]

$= x \tan^{-1} x - \log \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} (\tan^{-1} x)^2 + C$

[t का मान रखने पर $\because \sec t = \sqrt{1+\tan^2 t} = \sqrt{1+x^2}$]

(ii) माना $\sin^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$ तथा $x = \sin t$

$\therefore \int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t \sin t \, dt$

$= t \int \sin t \, dt - \int \left\{ \frac{dt}{dt} \times \int \sin t \, dt \right\} dt$ [खंडश: समाकलन से]

$= t(-\cos t) - \int 1 \times (-\cos t) \, dt + C$ [$\because \int \sin x \, dx = -\cos x$]

$= -t \cos t + \int \cos t \, dt + C$

$= -t \cos t + \sin t + C$ [$\because \int \cos x \, dx = \sin x$]

$= -t \sqrt{1-\sin^2 t} + \sin t + C$

$= -\sin^{-1} x \sqrt{1-x^2} + x + C$ [$\because t = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin t$]

$= x - \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + C$

(iii) माना $\tan^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$ तथा $x = \tan t$

$\therefore \int \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)(1+x^2)^{1/2}} dx$

$= \int \frac{t \tan t}{(1+\tan^2 t)^{1/2}} dt$

$= \int \frac{t \tan t}{\sec t} dt$ [$\because 1 + \tan^2 t = \sec^2 t$]

$= \int t \sin t \, dt$

$= t \int \sin t \, dt - \int \left\{ \frac{dt}{dt} \int \sin t \, dt \right\} dt$ [खंडश: समाकलन से]

$= t \times (-\cos t) - \int 1 \times (-\cos t) \, dt + C$ [$\because \int \sin x \, dx = -\cos x$]

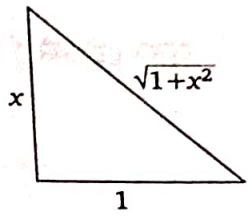
$= -t \cos t + \int \cos t \, dt + C$

$= -t \cos t + \sin t + C = -t \cos t + \sin t + C$ ...(I)

अब $\because \tan t = x = \frac{x}{1} = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}}$

$\therefore \sin t = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

तथा $\cos t = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



अतः (1) से $\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

$= -\tan^{-1} x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ $[\because t = \tan^{-1} x]$ **उत्तर**

(iv) माना $x = \tan t$ तो $dx = \sec^2 t\, dt$ तथा $t = \tan^{-1} x$

अतः $\int \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx = \int \cos^{-1} \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} \sec^2 t\, dt$

$= \int \cos^{-1} (\cos 2t) \cdot \sec^2 t\, dt$ $\left[\because \cos 2t = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\right]$

$= \int 2t \cdot \sec^2 t\, dt$ $[\because \cos^{-1} \cos \alpha = \alpha]$

$= 2\left[t \int \sec^2 t\, dt - \int \left\{\frac{dt}{dt} \int \sec^2 t\, dt\right\} dt\right]$ [खंडशः समाकलन से]

$= 2 \int [t \tan t - \int 1 \times \tan t\, dt] + C$ $[\because \int \sec^2 x\, dx = \tan x]$

$= 2 [t \tan t - \log \sec t] + C$ $[\because \int \tan x\, dx = \log \sec x]$

$= 2 [t \tan t - \log \sqrt{1+\tan^2 t}] + C$ $[\because \sec x = \sqrt{1+\tan^2 x}]$

$= 2[x \tan^{-1} x - \log \sqrt{1+x^2}] + C$ $[\because x = \tan t; t = \tan^{-1} x]$ **उत्तर**

(v) मान लिया $x = a \tan^2 \theta$ तो $dx = 2a \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta$

$\therefore \int \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \int \sin^{-1} \sqrt{\frac{a \tan^2 \theta}{a + a \tan^2 \theta}} \times 2a \tan \theta \sec^2 \theta\, a\theta$

$= \int \sin^{-1} \sqrt{\left[\frac{a \tan^2 \theta}{a(1+\tan^2 \theta)}\right]} 2a \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta$

$= 2a \int \sin^{-1} \sqrt{\frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta}} \times \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta$

$= 2a \int \sin^{-1} \sqrt{\sin^2 \theta} \times \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta$

$= 2a \int \theta \cdot \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta$

$= 2a \left[\theta \int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta - \int \left\{\frac{d\theta}{d\theta} \times \int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta\right\} d\theta\right]$ ...(1)

अब यदि $\tan \theta = t$ तो $\sec^2 \theta\, d\theta = dt$ [खंडशः समाकलन से]

$\therefore \int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\tan^2 \theta}{2} + C$ $[\because t = \tan \theta]$

अतः (1) से $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx = 2a\left[\frac{\theta\tan^2\theta}{2} - \int 1\times\frac{\tan^2\theta}{2}\,d\theta\right]$

$= a[\theta\tan^2\theta - \int(\sec^2\theta - 1)\,d\theta] + C$

$= a[\theta\tan^2\theta - \{\tan\theta - \theta\}] + C$

$= a[\theta\tan^2\theta - \tan\theta + \theta] + C$

$= a\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\cdot\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x}{a}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right] + C$

$= a\left[\left(\frac{x}{a}+1\right)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{x}{a}}\right] + C$ [∵

$= (a+x)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + C$

उदाहरण 5. मान ज्ञात करे—

(i) $\int \sin\sqrt{x}\,dx$ (ii) $\int x\tan^{-1}x\,dx$ (iii) $\int \sin^{-1}(3x - 4x^3)\,dx$

हल : (i) $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int\frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ ($\sqrt{x}$ से गुणा व भाग करने पर)

$\sqrt{x} = t$ रखने पर

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt \qquad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,dt$

$\therefore \quad \sqrt{\sin\sqrt{x}}\,dx = \int t\sin t\,2\,dt$

$= 2\int t\sin t\,dt$

गुणनफल के समाकलन नियम से,

$= 2\left[t\int\sin t\,dt - \int\left\{\frac{d}{dt}(t)\int\sin t\,dt\right\}dt\right] + c$

$= 2[t(-\cos t) - \int 1.(-\cos t)\,dt] + c$ [$\because \int\sin x\,dx = -\cos x$]

$= 2[-t\cos t + \int\cos t\,dt] + c$

$= 2[-t\cos t + \sin t] + c$ [$\because \int\cos x\,dx = \sin x$]

$= 2[-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}] + c$ [$\because t = \sqrt{x}$]

(ii) माना प्रथम फलन $= \tan^{-1}x$, द्वितीय फलन $= x$

खंडशः समाकलन से,

$$\int x\tan^{-1}x\,dx = (\tan^{-1}x)\int x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int x\,dx\right\}dx$$

$$= (\tan^{-1}x)\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)}\,dx \qquad \text{(अंश में 1 जोड़ने पर)}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c \qquad \text{उत्तर}$$

(iii) माना $I = \int \sin^{-1}(3x - 4x^3)\,dx$

$x = \sin\theta$ रखने पर $\Rightarrow$ $dx = \cos\theta\,d\theta$

$$I = \int \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \sin^{-1}(\sin 3\theta)\cos\theta\,d\theta \qquad [\because \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta]$$

$$= \int 3\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 3\int \theta\cos\theta\,d\theta = 3\left[\theta\int \cos\theta\,d\theta - \int \frac{d\theta}{d\theta}\int \cos\theta\,d\theta\right]$$

$$= 3[\theta\sin\theta + \cos\theta] + c$$

$$= 3[(\sin^{-1} x).\,x + \sqrt{1-x^2}] + c \qquad [\because \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}] \qquad \text{उत्तर}$$

Type V : त्रिकोणमितीय सूत्रों द्वारा मानक खंडशः रूप के प्रश्न :

उदाहरण 6. (i) $\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx$ (ii) $\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{x}{1+\cos x}\,dx$

$$= \int \frac{x}{2\cos^2(x/2)}\,dx \qquad \left[\because \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\int \sec^2\frac{x}{2}\,dx - \int\left\{\frac{dx}{dx}\times\int \sec^2\frac{x}{2}\,dx\right\}dx\right] \qquad \text{[खण्डशः समाकलन से]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x\tan(x/2)}{1/2} - \int 1\times\frac{\tan(x/2)}{1/2}\,dx\right] + C \qquad \left[\because \int \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} + C\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2x\tan\frac{x}{2} - 2\int \tan\frac{x}{2}\,dx\right] + C = x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\,dx + C$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \frac{\log\sec(x/2)}{1/2} + C$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - 2\log\sec\frac{x}{2} + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{x}{1+\sin x}\,dx$

$= \int \frac{x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$ [$(1-\sin x)$ से गुणा तथा भाग करने पर]

$= \int \frac{x - x\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$

$= \int \frac{x - x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ [$\because \cos^2 x = 1-\sin^2 x$]

$= \int x\sec^2 x\,dx - \int x\sec x\,.\tan x\,dx$

$= \left[x\int \sec^2 x\,dx - \int \left\{\frac{dx}{dx}\int \sec^2 x\,dx\right\}dx\right]$

$-\left[x\int \sec x\,.\tan x\,dx - \int \left\{\frac{dx}{dx}\int \sec x\,.\tan dx\right\}dx\right]$

$= [x\tan x - \int \tan x\,dx] - [x\sec x - \int 1\times \sec x\,dx]$

$= [x\tan x - \log \sec x] - [x\sec x - \log(\sec x + \tan x) + C$

$= x(\tan x - \sec x) - \log \sec x + \log(\sec x + \tan x) + C$

8.3 विशेष फलन (Special Functions)

(i) $\int e^x \{f(x) + f'(x)\}\,dx = e^x f(x) + C$

(ii) $\int \{xf'(x) + f(x)\}\,dx = xf(x) + C$

प्रमाण : (i) $\int e^x \{f(x) + f'(x)\}\,dx$

$= \int \underset{II}{e^x}\ \underset{I}{f(x)}\,dx + \int e^x f'(x)\,dx$

$= f(x)\int e^x\,dx - \int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\int e^x dx\right\}dx + \int e^x f'(x)\,dx$

$= e^x f(x) - \int e^x f'(x)\,dx + \int e^x f'(x)\,dx + C = e^x f(x) + C$

(ii) $\int \{x f'(x) + f(x)\}\,dx = \int xf'(x)\,dx + \int f(x)\,dx$

$= x\int f'(x)\,dx - \int \left\{\frac{dx}{dx}\int f'(x)\,dx\right\}dx + \int f(x)\,dx$

$= x f(x) - \int 1\times f(x)\,dx + \int f(x)\,dx + C$ [$\because \int f'(x)\,dx = f(x)$]

$= x f(x) + C$

स्पष्ट है कि इन दोनों रूपों के खण्डशः समाकलन के लिए पहले उन्हें दो समाकलनों के योग के रूप में प्रकट किया जाता है तथा केवल एक भाग (i) में $e^x f(x)$ का तथा (ii) $xf'(x)$ का समाकलन करने से दूसरा समाकलन स्वतः कट जाता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. (i) $\int e^x \{\sin x + \cos x\}\, dx$ (ii) $\int e^x \{\log \sin x + \cot x\}\, dx$
(iii) $\int \{\sin (\log x) + \cos (\log x)\}\, dx$

हल : (i) $\int e^x \{\sin x + \cos x\}\, dx = \int \underset{\text{II}}{e^x} \underset{\text{I}}{\sin x}\, dx + \int e^x \cos x\, dx$

$$= \sin x \int e^x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} \sin x \int e^x\, dx\right\} dx + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx + C$$

$$= e^x \sin x + C$$

(ii) $\int e^x \{\log \sin x + \cot x\}\, dx$

$$= \int \underset{\text{II}}{e^x} \underset{\text{I}}{\log \sin x}\, dx + \int e^x \cot x\, dx$$

$$= \log \sin x \int e^x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} \log \sin x \int e^x\, dx\right\} dx + \int e^x \cot x\, dx$$

$$= e^x \log \sin x - \int \frac{1}{\sin x} \cos x\, e^x\, dx + \int e^x \cot x\, dx + C$$

$$= e^x \log \sin x - \int e^x \cot x\, dx + \int e^x \cot x\, dx + C$$

$$= e^x \log \sin x + C$$

(iii) माना $\log x = t$ तो $e^t = x$ तथा $dx = e^t\, dt$

$\therefore \int \{\sin (\log x) + \cos (\log x)\}\, dx = \int e^t \{\sin t + \cos t\}\, dt$

$$= \int e^t \sin t\, dt + \int e^t \cos t\, dt$$

$$= e^t \sin t + C \qquad \text{[भाग (i) की भाँति]}$$

$$= x \sin (\log x) + C \qquad [t \text{ का मान रखने पर}]$$

उदाहरण 2. (i) $\int e^{2x} \frac{(1 + \sin 2x)}{1 + \cos 2x}\, dx$ (ii) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]**

(iii) $\int \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\right) dx$ (vi) $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}\, dx$

हल : (i) माना $I = \int e^{2x} \frac{(1 + \sin 2x)}{1 + \cos 2x}\, dx$

$$= \int \frac{e^{2x} + e^{2x} \sin 2x}{2\cos^2 x}\, dx \qquad [\because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1]$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{\cos^2 x}\, dx + \int e^{2x} \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x}\, dx \qquad [\because \sin 2x = 2\sin x \,.\, \cos x]$$

$$= \frac{1}{2}\int \underset{\text{I}}{e^{2x}} \underset{\text{II}}{\sec^2 x}\, dx + \int e^{2x} \tan x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2x} \int \sec^2 x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} e^{2x} \int \sec^2 x\, dx\right\} dx\right] + \int e^{2x} \tan x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}[e^{2x}\tan x - \int 2e^{2x}\tan x\,dx] + \int e^{2x}\tan x\,dx + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\tan x - \frac{1}{2}\times 2\int e^{2x}\tan x\,dx + \int e^{2x}\tan x\,dx + C \qquad [\because \int \sec^2 x\,dx = \tan$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\tan x + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}dx$ [अंश में 1 जोड़ने तथा घटाने पर]

$$= \int \frac{x+1}{(x+1)^2}e^x\,dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\times e^x\,dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{x+1}\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right)\int e^x\,dx\right\}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{e^x}{x+1} - \int\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}e^x\right\}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx + C$$

$$= \frac{e^x}{x+1} + \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx + C = \frac{e^x}{x+1} + C$$

(iii) माना $I = \int\left\{\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx$

माना $\log x = t$ तो $x = e^t$ तथा $dx = e^t\,dt$

$\therefore \quad I = \int\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right]e^t\,dt$

$$= \int \frac{1}{t}e^t\,dt - \int \frac{1}{t^2}e^t\,dt$$

$$= \frac{1}{t}\int e^t\,dt - \int\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\int e^t\,dt\right\}dt - \int \frac{1}{t^2}e^t\,dt$$

$$= \frac{1}{t}e^t - \int\left\{\left(-\frac{1}{t^2}e^t\right)\right\}dt - \int \frac{1}{t^2}e^t\,dt + C$$

$$= \frac{1}{t}e^t + \int \frac{1}{t^2}e^t\,dt - \int \frac{1}{t^2}e^t\,dt + C$$

$$= \frac{1}{t}e^t + C$$

$\therefore \quad I = \frac{x}{\log x} + C$ [$\because\ t = \log x$ तथा $x = e^t$]

(v) माना $I = \int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}\, dx = \int \frac{x}{1 - \cos x}\, dx - \int \frac{\sin x}{1 - \cos x}\, dx$

$= \int \frac{x}{2 \sin^2 (x/2)}\, dx - \int \frac{2 \sin (x/2) \cdot \cos (x/2)}{2 \sin^2 (x/2)}\, dx \quad [\because \cos x = 1 - 2\sin^2 (x/2)]$

$= \frac{1}{2} \int \underset{\text{I}}{x}\ \underset{\text{II}}{\operatorname{cosec}^2} (x/2)\, dx - \int \cot (x/2)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x \int \operatorname{cosec}^2 (x/2)\, dx - \int \left\{\frac{dx}{dx} \int \operatorname{cosec}^2 (x/2)\right\} dx\right] - \int \cot (x/2)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{-x \cot (x/2)}{1/2} - \int \frac{1 \times (-\cot (x/2))}{1/2}\, dx\right] - \int \cot (x/2)\, dx$

$\left[\because \int \operatorname{cosec}^2 (ax + b)\, dx = -\frac{\cot(ax + b)}{a} + C\right]$

$= -x \cot \frac{x}{2} + \int \cot \frac{x}{2}\, dx - \int \cot \frac{x}{2}\, dx + C$

$= -x \cot \frac{x}{2} + C$

6.2.1 $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ तथा $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ के रूप में समाकलन (महत्वपूर्ण)

उदाहरण 3. सिद्ध कीजिए :

(i) $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + C$

(ii) $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + C$

हल : (i) माना $I = \int \underset{\text{I}}{e^{ax}}\ \underset{\text{II}}{\sin bx}\, dx$ ...(1)

$= e^{ax} \int \sin bx\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} e^{ax} \int \sin bx\, dx\right\} dx$

$= -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} - \int a e^{ax} \frac{(-\cos bx)}{b}\, dx \quad \left[\because \int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a}\right]$

$= \frac{-e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int \underset{\text{I}}{e^{ax}}\ \underset{\text{II}}{\cos bx}\, dx$

$= -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left[e^{ax} \int \cos bx\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} e^{ax} \int \cos bx\, dx\right\} dx\right]$

$= -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left[\frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \int a e^{ax} \frac{\sin bx}{b}\, dx\right] \left[\because \int \cos bx\, dx = \frac{\sin bx}{b}\right]$

$= -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx\, dx$

$$\therefore \quad I = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I$$ [समीकरण (1) के प्रयोग से]

या $$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx$$

या $$\frac{(a^2+b^2)}{b^2}I = e^{ax}\frac{(-b\cos bx + a\sin bx]}{b^2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + C$$

(ii) माना $I = \int \underset{\text{I}}{e^{ax}}\ \underset{\text{II}}{\cos bx}\,dx$

$$= e^{ax}\int \cos bx\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}e^{ax}\int \cos bx\,dx\right\}dx$$

$$= e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \int ae^{ax}\frac{(\sin bx)}{b}\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int \underset{\text{I}}{e^{ax}}\ \underset{\text{II}}{\sin bx}\,dx$$

$$= e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\left[e^{ax}\int \sin bx\,dx - \left\{\int \frac{d}{dx}e^{ax}\int \sin bx\,dx\right\}dx\right]$$

$$= e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\left[\frac{e^{ax}(-\cos bx)}{b} - \int ae^{ax}\frac{(-\cos bx)}{b}\,dx\right]$$

$$= e^{ax}\frac{\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$\therefore \quad I = e^{ax}\frac{\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I$$ [समीकरण (1) के प्रयोग से]

या $$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = e^{ax}\left[\frac{\sin bx}{b} + \frac{a\cos bx}{b^2}\right]$$

या $$\frac{(a^2+b^2)}{b^2}I = e^{ax}\frac{(b\sin bx + a\cos bx]}{b^2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + C$$

नोट :

- स्पष्ट है कि इस रूप के फलनों में दो बार खंडश: समाकलन का प्रयोग होता है। इसके बाद पुन: मूल समाकलन पद के रूप में प्राप्त होता है जिसके पक्षांतरण से समाकलन का मान प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 4. मान निकालें :

(i) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ (ii) $\int \sin(\log x)\,dx$ (iii) $\int \sec^3 x\,dx$

(iv) $\int \text{cosec}^3 x\, dx$ (v) $\int \frac{\sin(\log_e x)}{x^3}\, dx$

हल : (i) माना $I = \int \underset{\text{I}}{e^{2x}} \underset{\text{II}}{\sin 3x}\, dx$ ...(1)

$$= e^{2x} \int \sin 3x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} e^{2x} \int \sin 3x\, dx \right\} dx + C$$

$$= e^{2x} \frac{(-\cos 3x)}{3} - \int 2e^{2x} \frac{(-\cos 3x)}{3}\, dx + C$$

$$= \frac{-e^{2x}}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x\, dx + C$$

$$= \frac{-e^{2x}}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \left[e^{2x} \int \cos 3x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} e^{2x} \int \cos 3x\, dx \right\} dx \right] + C$$

$$= \frac{-e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \left[\frac{e^{2x} \sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \frac{\sin 3x}{3}\, dx \right] + C$$

$$= \frac{-e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x\, dx + C$$

$$= \frac{-e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} I + C$$ [समीकरण (1) के प्रयोग से]

या $$\left(1 + \frac{4}{9}\right) I = \frac{e^{2x}}{3} \left[\frac{2 \sin 3x}{3} - \cos 3x \right] + C$$

या $$\frac{13}{9} I = \frac{e^{2x}}{9} [2 \sin 3x - 3 \cos 3x] + C$$

$\therefore$ $$I = \frac{e^{2x}}{13} [2 \sin 3x - 3 \cos 3x] + C$$

विकल्प : $\because$ $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx]$

यहाँ $a = 2, b = 3$

$\therefore$ $$\int e^{2x} \sin 3x\, dx = \frac{e^{2x}}{2^2 + 3^2} [2 \sin 3x - 3 \cos 3x] + C$$

$$= \frac{e^{2x}}{13} [2 \sin 3x - 3 \cos 3x] + C$$

(ii) माना $I = \int \sin(\log x)\, dx$

माना $\log x = t$ तो $e^t = x$ तथा $dx = e^t\, dt$

$\therefore$ $I = \int \underset{\text{II}}{\sin t} \times \underset{\text{I}}{e^t}\, dt$ ...(1)

$$= e^t \int \sin t\, dt - \int \left\{ \frac{d}{dt} e^t \int \sin t\, dt \right\} dt$$

$$= e^t (-\cos t) - \int e^t (-\cos t)\, dt$$

$$= -e^t \cot t + \int e^t \cos t \, dt$$

$$= -e^t \cos t + \left[e^t \int \cos t \, dt - \left\{ \int \frac{d}{dt} e^t \int \cos t \, dt \right\} dt \right]$$

$$= -e^t \cos t + [e^t \sin t - \int e^t \sin t \, dt] + C$$

$$= -e^t \cos t + e^t \sin t - I + C$$

या $I + I = e^t(\sin t - \cos t) + C$ [समीकरण (1) के प्रयोग से]

या $2I = e^t (\sin t - \cos t) + C$

$$= x \{\sin (\log x) - \cos (\log x)\} + C$$

$$\therefore \quad I = \frac{x}{2} \{\sin(\log x) - \cos(\log x)\} + C$$

(iii) माना $I = \int \sec^3 x \, dx$

$$= \int \underset{I}{\sec x} . \underset{II}{\sec^2 x} \, dx$$

$$= \sec x \int \sec^2 x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \sec x \int \sec^2 x \, dx \right\} dx$$

$$= \sec x . \tan x - \int \sec x . \tan x \tan x \, dx$$

$$= \sec x . \tan x - \int \sec x . \tan^2 x \, dx$$

$$= \sec x . \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \sec x . \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

$$= \sec x . \tan x - I + \log (\sec x + \tan x) + C$$

या $2I = \sec x . \tan x + \log (\sec x + \tan x) + C$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} [\sec x \tan x + \log (\sec + \tan x)] + C$$

(iv) माना $I = \int \text{cosec}^3 x \, dx$

$$I = \int \text{cosec } x . \ \text{cosec}^2 x \, dx$$

cosec x को प्रथम फलन मानते हुए खण्डशः समाकलन से,

$$= (\text{cosec } x) \int \text{cosec}^2 x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} (\text{cosec } x) . \int \text{cosec}^2 x \, dx \right] dx$$

$$= \text{cosec } x . (-\cot x) - \int -\cot x . \text{cosec } x . (-\cot x) \, dx,$$

using $\int \text{cosec}^2 dx = -\cot x$ and $\frac{d}{dx} (\text{cosec } x) = -\cot x \text{ cosec}$

$$I = -\cot x . \text{cosec } x - \int \cot^2 x . \text{cosec } x \, dx.$$

$$= -\cot x . \text{cosec } x - \int (\text{cosec}^2 x - 1) \text{ cosec } x \, dx \quad [\because \text{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta]$$

$$I = -\cot x . \text{cosec} x \, x - \int (\text{cosec}^3 x - \text{cosec } x) \, dx$$

$$I = -\cot x . \text{cosec } x - \int \text{cosec}^3 x \, dx + \int \text{cosec } x \, dx$$

$$I = -\cot x . \text{cosec } x - I + \log (\text{cosec } x - \cot x)$$

$$2I = -\cot x . \text{cosec } x + \log (\text{cosec } x - \cot x).$$

$$I = -\frac{1}{2} \cot x . \text{cosec } x + \frac{1}{2} \log (\text{cosec } x - \cot x) + C$$

(v) $\int \frac{\sin(\log_e x)}{x^3}\,dx = \int \frac{\sin(\log_e x)}{x^2} \cdot \frac{1}{x}\,dx.$

$\therefore \quad \log_e x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

The given integral becomes

$$I = \int \frac{\sin t}{e^{2t}}\,dt \qquad [\because \log_e x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow x^2 = e^{2t}]$$

$$I = \int e^{-2t} \sin t\,dt \qquad \ldots(1)$$

$$I = -\frac{1}{5} e^{-2t} (2\sin t + \cos t)$$

$$= -\frac{1}{5}(x^{-2})[2\sin(\log_e x) + \cos(\log_e x)] \qquad (\because e^{-2t} = x^{-2})$$

$$= -\frac{1}{5x^2}[2\sin(\log_e x) + \cos(\log_e x)]$$

महत्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

1. $\int u\,v\,dx = u\int v\,dx - \int \left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\} dx$, जहाँ u तथा v चर x के फलन हैं।

   या $\int f_1(x)\,f_2(x)\,dx = f_1(x)\int f_2(x)\,dx - \int \left\{\frac{d}{dx} f_1(x) \int f_2(x)\,dx\right\} dx$

   अर्थात् $\int (\text{I} \times \text{II}) = \text{I}\int \text{II} - \int \{\text{I}' \int \text{II}\}$

   प्रथम फलन का चयन धारा (6.2) के अनुसार करें।

2. $\int e^x \{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + C$
3. $\int \{x f'(x) + f(x)\}\,dx = x f(x) + C$
4. $\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + C$
5. $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + C$

प्रश्नावली 6.1

निम्न के मान ज्ञात करें—

1. (i) $\int x\cos x\,dx$ (ii) $\int x\sin x\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]**
2. (i) $\int x\sin x\cos x\,dx$ (ii) $\int x\sin 3x\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2021(S)]**
3. $\int x\log x\,dx$
4. (i) $\int x^2 e^{ax}\,dx$ (ii) $\int x\,e^{ax}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]**
5. $\int x^2\sin x\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]**
6. $\int \sin^{-1} x\,dx$
7. $\int \cos^{-1} x\,dx$

8. $\int (\log x)^2 \, dx$ **9.** $\int x \tan^{-1} x \, dx$

10. $\int \log (1 + x^2) \, dx$

11. $\int \sec^3 x \, dx$ [**संकेत** : $\int \sec^3 x \, dx = \int \underset{\text{I}}{\sec x} \cdot \underset{\text{II}}{\sec^2 x} \, dx$]

12. $\int \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}} \, dx$ **13.** $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

14. (i) $\int x \tan^2 x \, dx$ (ii) $\int x \cos^2 x \, dx$

15. $\int x \sin^2 x \, dx$ **16.** $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

17. (i) $\int \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx$ (ii) $\int \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) dx$

18. $\int \tan^{-1} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \, dx$ **19.** $\int e^x (1 + \tan x) \sec x \, dx$

20. $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ **21.** $e^x \{\log \sin x + \cot x\} \, dx$

22. $\int \frac{e^x}{x} (x \log x + 1) \, dx$

23. (i) $\int \frac{\log x}{(1 + \log x)^2} \, dx$ [**संकेत** : $\log x = t$ रखने से प्रश्न $\int \frac{te^t}{(t+1)^2} \, dt$ में परिवर्तित हो जाएगा]

(ii) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} \, dx$

24. $\int \sin (\log x) \, dx$ [**संकेत** : $\log x = t \Rightarrow x = e^t$ तथा $\int \sin (\log x) \, dx = \int e^t \sin t \, dt$] [उ० प्र० डिप्लोमा 2021]

25. $\int e^x \cos^2 x \, dx$ **26.** $\int x \sin^{-1} x \, dx$ **27.** $\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$

28. $\int x \log (1 + x) \, dx$ **29.** $\int x^3 \log 2x \, dx$ **30.** $\int \frac{e^x (x^2 + 1)}{(x+1)^2} \, dx$

31. $\int \frac{x}{1 + \cos x} \, dx$ **32.** $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ **33.** $\int e^x \sin x \, dx$

34. निम्न के मान बतायें—

(i) $\int x \sin x \, dx$

(ii) (a) $\int x e^x \, dx$ (b) $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2019]

(iii) $\int \sin x \cos x \, dx$

(iv) $\int \log x \, dx$

(v) दो फलनों के गुणनफल के समाकलन का सूत्र लिखिए।

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. $\int e^x \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right\} dx =$

(a) $e^x \left(\log x + \frac{1}{x}\right) + c$ (b) $\frac{e^x}{x} + c$

(c) $xe^x + e^x + c$ (d) कोई नहीं

2. $\int e^{ax} \sin bx \, dx =$

(a) $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx + b \cos bx] + c$ (b) $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + c$

(c) $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx + b \sin ax] + c$ (d) कोई नहीं

3. $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ का मान है—

(a) $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx - b \sin bx] + c$ (b) $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + c$

(c) $\frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + c$ (d) कोई नहीं

4. $\int 2x^3 e^{x^2} dx =$

(a) $e^{x^2} (x^2 - 1)$ (b) $e^{x^2} (x^2 + 2) + c$ (c) $e^{x^2} (x + 1) + c$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (i) $x \sin x + \cos x + C$ (ii) $\sin x - x \cos x + C$

2. (i) $\frac{1}{8} (\sin 2x - 2x \cos 2x)$ (ii) $\frac{1}{9} \sin 3x - \frac{1}{3} \cos x + C$

3. $\frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{4} x^2 + C$

4. (i) $\frac{e^{ax}}{a^3} (a^2x^2 - 2ax + 2)$ (ii) $\frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a} + c$

5. $2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C$ **6.** $x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$

7. $x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$ **8.** $x (\log x)^2 - 2 [x \log x - x] + C$

9. $\frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} [x - \tan^{-1} x] + C$ **10.** $x \log (x^2 + 1) - 2x + 2 \tan^{-1} x + C$

11. $\frac{1}{2} \sec x \, . \tan x + \frac{1}{2} \log (\sec x + \tan x) + C$

12. $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \log (1 - x^2) + C$ **13.** $2 [-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}] + C$

14. (i) $x\tan x - \log\sec x - \frac{x^2}{2} + C$

(ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C$

15. $\frac{1}{4}\left[x^2 - x\sin 2x - \frac{\cos 2x}{2}\right] + C$

16. $x - \sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x + C$

17. (i) $2x\tan^{-1} x - \log(1+x^2) + C$

(ii) $2x\tan^{-1} x - \log\sqrt{1+x^2} + C$

18. $3x\tan^{-1} x - \frac{3}{2}\log(x^2+1) + C$

19. $e^x \sec x + C$

20. $\frac{1}{x}e^x + C$

21. $e^x \log\sin x + C$

22. $e^x \log x + C$

23. (i) $\frac{x}{\log x + 1} + C$ (ii) $\frac{e^x}{x+1} + C$

24. $\frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + C$

25. $\frac{1}{2}e^x + \frac{e^x}{10}[\cos 2x + 2\sin 2x] + C$

26. $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1} x + C$

27. $\frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log(x^2+1) + C$

28. $\frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \log(x+1)\right] + C$

29. $\frac{x^4}{4}\log 2x - \frac{1}{16}x^4 + C$

30. $e^x - \frac{2e^x}{x+1} + C$

31. $x\tan\frac{x}{2} - 2\log\sec\frac{x}{2} + C$

32. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + C$

33. $\frac{e^x}{2}[\sin x - \cos x] + C$

34. (i) $-x\cos x + \sin x + C$

(ii) (a) $e^x(x-1) + C$ (b) $\sec x(x-1) + C$

(iii) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$

(iv) $x(\log x - 1) + C$

(v) $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\}dx$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (b) **2.** (b) **3.** (b) **4.** (a)

अध्याय

7

आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन
(Integration by Partial Fractions)

7.1 परिभाषा (Definition)

इस अध्याय में हम किसी परिमेय भिन्नात्मक फलन को आंशिक भिन्नों में तोड़कर समाकलन करना सीखेंगे। इस विधि में सर्वप्रथम दिए गए भिन्न को दो या दो से अधिक भिन्नों के योग अथवा अंतर के रूप में व्यक्त करते हैं। तत्पश्चात् पहले बताए गए विधियों का प्रयोग कर समाकलन निकालते हैं।

आंशिक भिन्नों में तोड़ते समय निम्न बातों का ध्यान रखें—

(i) सर्वप्रथम दिए गए भिन्न को सामान्य भिन्न (Proper fraction) के रूप में व्यक्त करें। इसका अर्थ यह है कि यदि भिन्न के अंश में चर राशि का घात हर की चर राशि के घात से ज्यादा या बराबर है तो भाग देकर उसे सामान्य भिन्न में परिवर्तित करें।

(ii) यदि हर की राशि का गुणनखंड संभव है तो उसका गुणनखंड प्राप्त कर लें।

तत्पश्चात् नीचे दिए गए तालिका के अनुसार दिए गए भिन्न को आंशिक भिन्नों में तोड़कर समाकलन ज्ञात करें।

क्रम संख्या	सामान्य भिन्न (Proper fraction) का रूप	आंशिक भिन्नों का रूप
1.	$\frac{f(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$	$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma}$
2.	$\frac{g(x)}{(x-\alpha)^2}$	$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}$
3.	$\frac{\phi(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}$	$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{x-\beta}$
4.	$\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$	$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$

जहाँ ax^2+bx+c का एकघातीय गुणनखंड सम्भव नहीं

तालिका में A, B, C वास्तविक संख्यायें हैं जिनका मान ज्ञात करना होगा।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I : जब भिन्न के हर में अपुनरावृत्त एक घातीय (Linear non-repeated) गुणनखंड हो या हर को अपुनरावृत्त गुणनखंड में तोड़ना संभव हो [$\frac{f(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ रूप]

उदाहरण 1. (i) $\int \frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)}\,dx$ (ii) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-4)}$

(iii) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

हल : (i) $\int \frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)}\,dx$

माना $\frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{3x-1} + \frac{C}{3x-2}$

या $x^2 = A(3x-1)(3x-2) + B(x-1)(3x-2) + C(x-1)(3x-1)$

(2) में $x-1=0$ अर्थात् $x=1$ रखने पर,

$1^2 = A(3\times 1-1)(3\times 1-2) + B\times 0 + C\times 0$

या $2A = 1 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{2}$

(2) में $3x-1=0$ अर्थात् $x=\frac{1}{3}$ रखने पर, $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = A\times 0 + B\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(3\times\frac{1}{3}-2\right) + C\times 0$

या $\frac{1}{9} = B\times\left(-\frac{2}{3}\right)(-1) \quad \therefore \quad B = \frac{3}{9\times 2} = \frac{1}{6}$

पुनः (2) में $3x-2=0$ अर्थात् $x=\frac{2}{3}$ रखने पर,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = A\times 0 + B\times 0 + C\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(3\times\frac{2}{3}-1\right)$$

या $\frac{4}{9} = C\left(-\frac{1}{3}\right)\times 1 \quad \therefore \quad C = -\frac{3\times 4}{9} = -\frac{4}{3}$

A, B तथा C के मान (1) में रखकर समाकलन करने पर

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)}\,dx = \int\left[\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{6(3x-1)} - \frac{4}{3(3x-2)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{3x-1}\,dx - \frac{4}{3}\int \frac{1}{3x-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{6}\frac{\log(3x-1)}{3} - \frac{4}{3}\frac{\log(3x-2)}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{18}\log(3x-1) - \frac{4}{9}\log(3x-2) + C$$

(ii) दिया गया समाकलन $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-4)}$

यहाँ $\frac{1}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-2)} \quad [\because a^2-b^2 = (a+b)(a-b)]$

माना $\frac{1}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$ ...(1)

$\Rightarrow$ $1 = A(x+2)(x-2) + (Bx-1)(x-2) + C(x-1)(x+2)$ ...(2)

समी० (2) में $x = 1$ रखने पर,

$1 = A(1+2)(1-2) + B \times 0 + C \times 0$

$-3A = 1$ $\quad \therefore \quad A = -\frac{1}{3}$

या

पुनः (2) में, $x = -2$ से

$1 = A \times 0 + B(-2-1)(-2-2) + C \times 0$

$1 = B(-3)(-4) \quad \therefore B = \frac{1}{12}$

या

पुनः (2) में, $x = 2$ से

$1 = A \times 0 + B \times 0 + C(2-1)(2+2)$

$1 = 4C \quad \therefore C = \frac{1}{4}$

या

समी० (1) में A, B, C का मान रखकर समाकलन करने पर

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(x-1) + \frac{1}{12}\log(x+2) + \frac{1}{4}\log(x-2) + C$$

(iii) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

यहाँ $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ [$\because$ यह असामान्य (Improper) भिन्न है अतः भाग देने पर]

$$= 1 + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

अब $\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ ...(1)

$\Rightarrow$ $2 = A(x-1) + B(x+1)$ ...(2)

समी० (2) में $x = -1$ तथा $+1$ रखने पर $A = -1, B = 1$

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int \left[1 + \frac{2}{(x+1)(x-1)}\right]dx$$

$$= \int \left[1 + \frac{(-1)}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right]dx \quad [A \text{ तथा } B \text{ का मान रखने पर}]$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= x - \log(x+1) + \log(x-1) + C$$

$$= x + \log \frac{x-1}{x+1} + C$$

नोट :

• $\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}$ के प्रयोग से भी इसका हल निकाला जा सकता है। यह विधि अगले अध्याय में स्पष्ट की जाएगी।

Type II : जब हर में एकघातीय गुणनखंड की आवृत्ति हुई हो $\left[\frac{\phi(x)}{(x-\alpha)^2} \text{ के रूप का}\right]$

उदाहरण 2. $\int \frac{x}{(x-2)(x-1)^2}\, dx$

हल : माना $\int \frac{x}{(x-2)(x-1)^2}\, dx$

माना $$\frac{x}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

या $$x = A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)$$

समी० (2) में $x = 2$ रखने से, $2 = A(2-1)^2 + B \times 0 + C \times 0$

या $A = 2$

समी० (2) में $x = 1$ रखने से, $1 = A \times 0 + B \times 0 + C(1-2)$

या $-C = 1$ $\quad \therefore C = -1$

समी० (2) में $x = 0$ रखने से $0 = A(0-1)^2 + B(0-2)(0-1) + C(0-2)$

या $A + 2B - 2C = 0$ या $2 + 2B - 2 \times (-1) = 0$

या $2B = -4$ $\quad \therefore B = -2$ $\quad [\because A = 2, C = -1]$

समी० (1) में A, B, C का मान रखकर समाकलन करने पर

$$I = \int \frac{x}{(x-2)(x-1)^2}\, dx = \int \left[\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x-2}\, dx - 2\int \frac{1}{x-1}\, dx - \int (x-1)^{-2}\, dx$$

$$= 2\log(x-2) - 2\log(x-1) - \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= 2\log \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x-1} + C$$

Type III : जब हर में द्विघात के ऐसे फलन हों जिनका गुणनखंड संभव न हो

3. मान निकालें।

(i) $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx$ $\qquad$ (ii) $\int \frac{1}{1-x^3}\, dx$

हल : माना $\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ ...(1)

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A \quad \text{...(2)}$$

या

दोनों ओर से x^2, x के गुणांक तथा अचर की तुलना करने पर

$$C = 1, \quad A = 1 \quad \text{तथा} \quad A + B = 0 \quad \text{या} \quad B = -A = -1$$

A, B तथा C के ये मान (1) में रखकर समाकलन करने पर

$$I = \int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int\left[\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right]dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \tan^{-1} x + C$$

(ii) $\because \quad \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1)^3 - (x)^3} = \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$ $[\because\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$

माना $$\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2} \quad \text{...(1)}$$

$$1 = A(1+x+x^2) + (Bx+C)(1-x) \quad \text{...(2)}$$

या

(2) में $x = 1$ रखने से, $1 = A(1+1+1) + (B+C)\times 0 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{3}$

पुन: (1) में x^2 के गुणांक तथा अचर की तुलना करने पर

$$A - B = 0 \implies A = B = \frac{1}{3} \qquad \text{तथा} \qquad A + C = 1 \implies C = 1 - A = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ (1) में A, B, C के मान रखकर समाकलन करने पर

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = \int\left[\frac{1}{3(1-x)} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{1+x+x^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{3\times 2}\int \frac{2x+4}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\int \frac{2x+1+3}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\left[\int \frac{2x+1}{1+x+x^2}\,dx + \int \frac{3}{1+x+x^2}\,dx\right.$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{3}{6}\int \frac{1}{x^2 + 2\times x\times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$\left[\because \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\right.$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Type IV : यदि परिमेय फलन के अंश तथा हर में चर राशि x के समघात हों तो आंशिक भिन्नों में तोड़ने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनाते हैं :

I. $x^2 = y$ रखें। II. आंशिक भिन्न में तोड़ें। III. पुनः y की जगह x^2 रखें। IV. समाकलन करें।

उदाहरण 4. (i) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ (ii) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

हल : (i) माना $x^2 = y$ तो $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$

अब माना $\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$

या $y = A(y+4) + B(y+1)$

(2) में $y+4=0$ या $y=-4$ रखने पर, $-4 = A\times 0 + B(-4+1)$

या $-4 = -3B$ $\therefore B = \frac{4}{3}$

(2) में, $y+1=0$ या $y=-1$ रखने पर, $-1 = A(-1+4) + B\times 0$

या $3A = -1$ $\therefore A = -\frac{1}{3}$

(1) में A तथा B का मान रखने पर

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = -\frac{1}{3(y+1)} + \frac{4}{3(y+4)}$$

y की जगह x^2 रखने पर,

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3}\frac{1}{x^2+4}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1} x + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1} x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

(ii) माना $x^2 = y$ तो $\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{y^2}{1+y} = \frac{y^2-1+1}{1+y}$ [अंश में 1 जोड़ने तथा घटाने पर]

$$= \frac{y^2-(1)^2}{1+y} + \frac{1}{1+y}$$

$$= \frac{(y+1)(y-1)}{1+y} + \frac{1}{1+y}$$

$$= y - 1 + \frac{1}{1+y}$$

$\therefore \quad \frac{y^2}{1+y} = y - 1 + \frac{1}{1+y}$

अब $y = x^2$ रखने पर $\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int\left[x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right]dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x + C$$

TYPE V : ऐसे भिन्न जिनको प्रतिस्थापन के बाद आंशिक भिन्नों में तोड़ा जाता है :

उदाहरण 5. (i) $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\,dx$ (ii) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

(iii) $\int \frac{(x^2+x+1)}{(x-1)^3}\,dx$ (iv) $\int \frac{1}{\sin x + \sin 2x}\,dx$

(v) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+6x^x+5}\,dx$ (vi) $\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$

(vii) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$

हल : (i) माना $I = \int \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\,dx$ ...(1)

पुनः माना $\sin x = t$ तो $\cos x\,dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{(1+t)(2+t)}$

अब माना $\quad \frac{1}{(1+t)(2+t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{2+t}$

या $\quad 1 = A(2+t) + B(1+t)$

(3) में $t = -1$ तथा -2 रखने पर $A = 1, B = -1$

(2) में A तथा B का मान रखकर समाकलन करने पर

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{(1+t)(2+t)} = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{(-1)}{2+t} dt$

$= \log(1+t) - \log(2+t) + C \quad \left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x)\right]$

$= \log\left(\frac{1+t}{2+t}\right) + C \quad [\because \log m - \log n = \log \frac{m}{n}]$

$\therefore$ (1) से $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)} dx = \log \frac{(1+\sin x)}{2+\sin x} + C$

(ii) $I = \int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$

माना $x^2 = t$ तो $2x\,dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$ [अब (1) की तरह हल करें] $\quad \frac{\log(1+x^2)}{(2+x^2)}$

(iii) माना $\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$

पुनः माना $x - 1 = t$ तो $dx = dt$ तथा $x = t + 1$

$$I = \int \frac{(t+1)^2 + (t+1) + 1}{t^3} dt$$

$$= \int \frac{t^2 + 2t + 1 + t + 1 + 1}{t^3} dt$$

$$= \int \frac{t^2 + 3t + 3}{t^3} dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^3} dt + 3\int \frac{t}{t^3} dt + \int \frac{3}{t^3} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} dt + 3\int t^{-2} dt + 3\int t^{-3} dt$$

$$= \log t + 3 \times \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + 3\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= \log t - \frac{3}{t} - \frac{3}{2t^{-2}} + C$$

t का मान रखने पर

$$I = \log (x-1) - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{2(x-1)^2} + C$$ उत्तर

(iv) माना $I = \int \frac{1}{\sin x + \sin 2x}\, dx$

$$= \int \frac{1}{\sin x + 2\sin x \cos x}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin x\,(1+2\sin x)}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x\,(1+2\cos x)}\, dx = \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)\,(1+2\cos x)}\, dx$$

माना $\cos x = t$ से $-\sin x\, dx = dt$ या $\sin x\, dx = -dt$

$$\therefore \int \frac{-dt}{(1-t^2)\,(1+2t)} = \int \frac{-1}{(1+t)(1-t)\,(1+2t)}\, dt$$

माना $\frac{-1}{(1+t)\,(1-t)\,(1+2t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+2t}$ ...(1)

या $-1 = A(1-t)(1+2t) + B(1+t)(1+2t) + C(1-t)(1+t)$ ...(2)

समी० (2) में क्रमशः $t = -1,\ 1$ तथा $-\frac{1}{2}$ रखने पर $A = +\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{6}, C = -\frac{4}{3}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{-1}{(1+t)\,(1-t)(1+2t)}\, dt$$

$$= +\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\, dt - \frac{1}{6}\int \frac{1}{1-t}\, dt - \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+2t}\, dt \qquad [A, B \text{ तथा } C \text{ का मान रखने पर}]$$

$$= +\frac{1}{2}\log (1+t) + \frac{1}{6}\log (1-t) - \frac{4}{3}\frac{1}{2}\log (1+2t) + C$$

$$= +\frac{1}{2}\log (1+t) + \frac{1}{6}\log (1-t) - \frac{2}{3}\log (1+2t) + C, \text{ जहाँ } t = \cos x$$ उत्तर

(v) दिया है :

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 6x^x + 5}\, dx$$ माना $e^x = t \Rightarrow e^x\, dx = dt$

अतः $$\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 5} = \int \frac{dt}{t^2 + 5t + t + 5}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)\,(t+5)}$$ ...(1)

अब हम इसे आंशिक भिन्नों में परिवर्तित करेंगे। अतः

$$\frac{1}{(t+1)(t+5)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+5}$$ ...(2)

$$1 = A(t+5) + B(t+1)$$

$\therefore$ समी० (3) में $t = -1$ रखने पर,

$$1 = A(-1+5) + 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 4A \qquad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$

पुनः समी० (3) में $t = -5$ रखने पर,

$$1 = 0 + B(-5+1)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = -4B \qquad \text{या} \quad B = -\frac{1}{4}$$

A तथा B के मान समी० (2) में रखने पर,

$$\frac{1}{(t+1)(t+5)} = \frac{1}{4(t+1)} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{(t+5)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+5}\right]$$

अतः (1) के प्रयोग से,

$$= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+5}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{t+1}\, dt - \int \frac{1}{t+5}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{4}[\log(t+1) - \log(t+5)] + C \qquad \left[\because \int \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \log f(t)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{t+1}{t+5}\right) + C \qquad \left[\because \log m - \log n = \log \frac{m}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{e^x+1}{e^x+5}\right) + C \qquad [\because\ t = e^x]$$

(vi) माना $I = \int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \int \frac{x^{n-1}}{x^{n-1}\, x\,(x^n+1)}\, dx = \int \frac{x^{n-1}}{x^n\,(x^n+1)}\, dx$

$x^n = t$ रखने पर $\quad \Rightarrow \quad x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n}\, dt$

$\therefore$

$$I = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{t\,(t+1)}$$

अब

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

या

$$1 = A(t+1) + Bt$$

(2) में $t = 0$ रखने पर

$$1 = A(0+1) + B \times 0 \quad \text{या} \quad A = 1$$

(2) में $t+1=0$ या $t=-1$ रखने पर

$$1 = A \times 0 + B(-1) \quad \text{या} \quad B = -1$$

(1) में A तथा B के मान रखकर समाकलन करने पर

$$I = \frac{1}{n}\left[\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{-1}{t+1}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{n}[\log t - \log(t+1)] + C \qquad \left[\because \int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \log f(t)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{t}{t+1} + C \qquad \left[\because \log m - \log n = \log\frac{m}{n}\right]$$

t का मान रखने पर

$$I = \frac{1}{n}\log\frac{x^n}{x^n+1} + C$$

(v) $I = \int \frac{x}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}\,dx$

माना $x^2 = t$ जिससे $2x\,dx = dt$ या $x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-a^2)(t-b^2)}$$

माना $\frac{1}{(t-a^2)(t-b^2)} = \frac{A}{t-a^2} + \frac{B}{t-b^2}$ ...(1)

या $1 = A(t-b^2) + B(t-a^2)$ ...(2)

(2) में $t-a^2=0$ या $t=a^2$ रखने पर

$$1 = A(a^2-b^2) + B \times 0$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{a^2-b^2}$$

तथा (2) में $t-b^2=0$ या $t=b^2$ रखने पर

$$1 = A \times 0 + B(b^2-a^2)$$

$$\therefore \quad B = \frac{1}{b^2-a^2} = -\frac{1}{a^2-b^2}$$

(1) में A तथा B के मान रखकर समाकलन करने पर

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t-a^2)(t-b^2)}\,dt = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{1}{t-a^2}\,dt - \frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{1}{t-b^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2(a^2-b^2)}[\log(t-a^2) - \log(t-b^2)] + C \qquad \left[\because \int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \log f(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2(a^2-b^2)}\log\frac{t-a^2}{t-b^2} + C \qquad \left[\because \log m - \log n = \log\frac{m}{n}\right]$$

$t = x^2$ रखने पर $I = \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \log \frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} + C$

महत्वपूर्ण तथ्य

समाकलन के लिए आंशिक भिन्नों में तोड़ने से पहले निम्न तथ्यों का ध्यान रखें—

1. यदि अंश में चर राशि का घात, हर की चर राशि के घात से अधिक है या बराबर है अर्थात् यह असामान्य भिन्न (Improper fraction) है, तो पहले वास्तविक विभाजन द्वारा इसे सामान्य भिन्न (Proper Fraction) में बदलें।
2. यदि हर का गुणनखंड संभव है, तो उसके संभव गुणनखंड निकालें।
3. अब भिन्न (सामान्य भिन्न) को आंशिक भिन्नों में तोड़ें। इसके बाद समाकलन की क्रिया करें।

प्रश्नावली 7.1

निम्न के मान ज्ञात करें—

Type I :

1. (i) $\int \frac{3x}{(x-2)(x+1)} dx$

(ii) $\int \frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)} dx$

(iii) (a) $\int \frac{dx}{6x - x^2 - 5}$

(b) $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2022, 19(S)]

(c) $\int \frac{x-1}{(x-2)(x+3)} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 202

(d) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 202

(e) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 202

(iv) $\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} dx$

(v) $\int \frac{x^3 + 2}{(x-1)(x-2)^3} dx$

(vi) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$

Type II :

2. (i) $\int \frac{(x-1)}{(x+1)^2 (x-2)} dx$

(ii) $\int \frac{x-1}{(x-3)(x-2)^2} dx$

(iii) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

(iv) $\int \frac{x}{(x-1)^2} dx$

(v) $\int \frac{3x+1}{(x-3)^2 (x+2)} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 202

Type III :

3. (i) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

(ii) $\int \frac{dx}{1+x^3}$

(iii) $\int \frac{dx}{1+x+x^2+x^3}$

(iv) $\int \frac{1}{1+x-x^2-x^3}\,dx$

(v) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

Type IV :

4. (i) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

(ii) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(3x^2+4)}\,dx$

(iii) $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$

(iv) $\int \frac{x}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}\,dx$

[संकेत : $x^2 = y$ लें]

(v) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

Type V :

5. (i) $\int \frac{\cos x}{(\sin x-1)(\sin x-3)}\,dx$

(ii) $\int \frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$

[संकेत : $\int \frac{dx}{\sin x+2\sin x\cos x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x(1+2\cos x)}$

$= \int \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x)(1-\cos x)(1+2\cos x)}$]

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)(2+\tan x)}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

(iv) $\int \frac{\sec x}{1+\operatorname{cosec} x}\,dx$

[संकेत : $\int \frac{\sec x}{1+\operatorname{cosec} x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)} \times \frac{\cos x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x\cos x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin x)}\,dx$]

(v) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx$

(vi) $\int \frac{dx}{1+3e^x+2e^{2x}}$

[संकेत : $\int \frac{dx}{1+3e^x+2e^{2x}} = \int \frac{e^x}{2e^{3x}+3e^{2x}+e^x}\,dx$ अब $e^x = t$ रखें]

(vii) $\int \frac{dx}{x\,(1+\log x)\,(3+\log x)}$

(viii) $\int \frac{1}{x\,[6\,(\log x)^2+7\log x+2]}\,dx$

(ix) $\int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx$

[संकेत : $\frac{1}{x(x^4+1)} = \frac{x^3}{x^4\,(x^4+1)}$] [उ० प्र० डिप्लोम

(x) $\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2

उत्तरमाला

1. (i) $\log (x-2)^2\,(x+1)+C$

(ii) $\frac{1}{2}\log(x-1)+\frac{1}{18}\log(3x-1)-\frac{4}{9}\log(3x-2)+C$

(iii) (a) $\frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x-5}+C$ (b) $\log\frac{x+2}{x+3}+C$ (c) $\frac{1}{5}\log(x-2)+\frac{4}{5}\log(x+3)$

(d) $\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+c$ (e) $\frac{1}{4}\log\frac{x-2}{x+2}+C$

(iv) $\log\frac{x^2-1}{x}+C$ (v) $\log\frac{(x-2)^4}{(x-1)^3}-\frac{2}{x-2}-\frac{5}{(x-2)^2}+C$

(vi) $x+\log\frac{x-1}{x+1}+C$

2. (i) $\frac{1}{9}\log\frac{x-2}{x+1}-\frac{2}{3(x+1)}+C$

(ii) $2\log(x-3)-2\log(x-2)+\frac{1}{x-2}+C$

(iii) $\left[\frac{1}{x+1}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]+C$ (iv) $\log(x-1)-\frac{1}{x-1}+C$

(v) $-\frac{1}{5}\log\frac{x-3}{x+2}-\frac{2}{x-3}+C$

3. (i) $\frac{1}{4}[2\log(x+1)+2\tan^{-1}x-\log(x^2+1)+C$

(ii) $\frac{1}{6}\log\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

(iii) (a) $\frac{1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{4}(1+x^2)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

(iv) $\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2(1+x)}+c$ (v) $\frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

4. (i) $\frac{1}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\tan^{-1}x+C$

(iii) $\frac{1}{b^2-a^2}\left(b\tan^{-1}\frac{x}{b}-a\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)+C$ (iv) $\frac{1}{2(a^2-b^2)}\log\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}+C$

(v) $\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x+C$

5. (i) $\frac{1}{2}\log\frac{\sin x-3}{\sin x-1}+C$

(ii) $\frac{1}{6}\log(1-\cos x)+\frac{1}{2}\log(1+\cos x)-\frac{2}{3}\log(1+2\cos x)$

(iii) $\log\frac{1+\tan x}{2+\tan x}+C$ (iv) $\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{1}{2(1+\sin x)}+C$

(v) $\frac{1}{2}\log\frac{1+e^x}{3+e^x}+C$ (vi) $\log\frac{e^x(1+e^x)}{(1+2e^x)^2}+C$

(vii) $\frac{1}{2}\log\frac{1+\log x}{3+\log x}+C$ (viii) $\log\frac{2\log x+1}{3\log x+2}+C$ (ix) $\frac{1}{4}\log\frac{x^4}{x^4+1}+C$

□□□

अध्याय

8

कुछ विशिष्ट समाकल

(Some Special Integrals)

8.1 कुछ महत्वपूर्ण प्रतिस्थापन

इस अध्याय में हम कुछ महत्वपूर्ण सूत्रों की स्थापना करेंगे तथा विभिन्न प्रकार के समाकलनों में उनका प्रयोग करना सीखेंगे। नीचे कुछ महत्वपूर्ण प्रतिस्थापनों की सूची दी गई है जो समाकलन के लिए उपयोगी हैं।

समाकलन का रूप	प्रतिस्थापन
$a^2 + x^2$	$x = a \tan\theta$ या $x = a \cot\theta$
$a^2 - x^2$	$x = a \sin\theta$ या $x = a \cos\theta$
$x^2 - a^2$	$x = a \sec\theta$ या $x = a \operatorname{cosec}\theta$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ या $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a \cos 2\theta$
$\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$	$x^2 = a^2 \cos 2\theta$
$\sqrt{(2ax - x^2)}$	$x = a(1 - \cos 2\theta)$

8.2 सूत्र (Formulae)

(i) $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

(ii) $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)

(iii) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2021

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(vi) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(vii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

(viii) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \log [x + \sqrt{x^2 + a^2}] + C$

(ix) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log [x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C$

(x) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + C$

प्रमाण : (i) माना $x = a \tan \theta$ जिससे कि $dx = a \sec^2 \theta\, d\theta$ तथा $\tan \theta = \frac{x}{a}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \tan^2 \theta + a^2}\, d\theta = \int \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 (\tan^2 \theta + 1)}\, d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta}\, d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}[\theta] + C = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \qquad \left[\because \tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{x}{a}\right]$$

नोट :

• यदि $x = a \cot \theta$ लिया जाए तो $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = -\frac{1}{a} \cot^{-1} \frac{x}{a} + C$

(ii) यहाँ $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x + a)(x - a)} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right]$ [आंशिक भिन्नीकरण से]

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right] dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x - a}\, dx - \int \frac{1}{x + a}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2a}[\log (x - a) - \log (x + a)] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a} + C$$

(iii) यहाँ $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a + x)(a - x)} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x}\right]$ [आंशिक भिन्नीकरण से]

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int \left[\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x}\right] dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{a + x}\, dx + \int \frac{1}{a - x}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2a}[\log (a + x) + \log (a - x)] + C = \frac{1}{2a} \log \frac{a + x}{a - x} + C$$

(iv) माना $x = a \sin \theta$ जिससे $dx = a \cos \theta\, d\theta$ तथा $\sin \theta = \frac{x}{a}$

$$\therefore I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{a \cos \theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta}}\, d\theta = \int \frac{a \cos \theta}{a\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}\, d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\cos \theta}\, d\theta = \int d\theta + C$$

$$= \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad \left[\because \sin\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\right.$$

नोट :

- $x = a\cos\theta$ से $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} + C$

(v) माना $x = a\tan\theta$, जिससे कि $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$ तथा $\tan\theta = \frac{x}{a}$.

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 + a^2\tan^2\theta}} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a\sqrt{1 + \tan^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \log[\sec\theta + \tan\theta] + C_1$$

$$= \log[\tan\theta + \sqrt{1 + \tan^2\theta}] + C_1 = \log\left[\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right] + C_1 \qquad \left[\because \tan\theta = \frac{x}{a}\right.$$

$$= \log\left[\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right] = \log[x + \sqrt{a^2 + x^2}] - \log a + C_1$$

$$= \log[x + \sqrt{a^2 + x^2}] + C, \quad \text{जहाँ } C = C_1 - \log a$$

(vi) माना $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx$ तथा $x = a\sec\theta$ जिससे कि $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ तथा $\sec\theta = \frac{x}{a}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}\,d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \log[\sec\theta + \tan\theta] + C_1$$

$$= \log[\sec\theta + \sqrt{\sec^2\theta - 1}] + C_1 = \log\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right] + C_1 \qquad \left[\because \sec\theta = \frac{x}{a}\right]$$

$$= \log\left[\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right] + C_1 = \log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] - \log a + C_1$$

$$= \log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C, \quad \text{जहाँ } C = C_1 - \log a$$

(vii) माना $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ तथा $x = a\sin\theta$ जिससे $dx = a\cos\theta\, d\theta$ तथा $\sin\theta = \frac{x}{a}$

$$\therefore \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \times a\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int a\sqrt{1 - \sin^2\theta} \times a\cos\theta\, d\theta = a^2 \int \cos\theta \times \cos\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \int \cos^2 \theta \, d\theta = a^2 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} [\int d\theta + \int \cos 2\theta \, d\theta] = \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} [\theta + \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

(viii) माना $x = a \tan \theta$ जिससे $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$

तो $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \int a \sec \theta \, . \, a \sec^2 \theta \, d\theta$

$$= a^2 \int \sec^3 \theta \, d\theta = \frac{a^2}{2} [\sec \theta \, . \, \tan \theta + \log (\sec \theta + \tan \theta)] + C_1$$

[$\int \sec^3 \theta \, d\theta$ का मान रखने पर, देखें **पृष्ठ 112, Q. 4(iii)**]

$$= \frac{a^2}{2} \left[\frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \log \left\{\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right\}\right] + C_1$$

$$\left[\because \tan \theta = \frac{x}{a} \text{ तथा } \sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}] + C_1, \quad \text{जहाँ } C = \log C_1 - \log a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log [x + \sqrt{x^2 + a^2}] + C}$$

नोट :

- $I = \int \underset{\text{I}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \times \underset{\text{II}}{1} \, dx$ के रूप में खंडशः समाकलन से यह मान प्राप्त किया जा सकता है।

(ix) माना $x = a \sec \theta$ से $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$ तथा $x^2 - a^2 = a^2 (\sec^2 \theta - 1)$

अब $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \int a \tan \theta \, . \, a \sec \theta \tan \theta$

$$= a^2 \int \sec\theta \tan^2\theta \, d\theta = a^2 \int \sec\theta (\sec^2\theta - 1) \, d\theta$$

$$= a^2 \int \sec^3\theta \, d\theta - a^2 \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} [\sec\theta \tan\theta + \log(\sec\theta + \tan\theta) - a^2 \log(\sec\theta + \tan\theta)] + C_1$$

[$\int \sec^3\theta \, d\theta$ तथा $\int \sec\theta \, d\theta$ का मान रखने पर, देखें पृष्ठ 112, Q. 9(iii)]

$$= \frac{a^2}{2} \sec\theta \tan\theta - \frac{a^2}{2} \log(\sec\theta + \tan\theta) + C_1$$

$$= \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{a^2}{2} \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) + C_1$$

$$\left[\because \sec\theta = \frac{x}{a} \text{ तथा } \tan\theta = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C, \quad \text{जहाँ } C = C_1 - \log a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C}$$

नोट :

• $I = \int \underset{\text{I}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \times \underset{\text{II}}{1} \, dx$ के रूप में खंडशः समाकलन से यह मान प्राप्त किया जा सकता है।

(x) माना $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx$ तथा $x = a \sec\theta$ से $dx = a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$ तथा $\sec\theta = \frac{x}{a}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{a \sec\theta \tan\theta}{a \sec\theta \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2}} d\theta = \int \frac{a \sec\theta \tan\theta}{a \sec\theta \cdot a\sqrt{\sec^2\theta - 1}} d\theta$$

$$= \int \frac{a \sec\theta \tan\theta}{a^2 \sec\theta \cdot \tan\theta} d\theta = \frac{1}{a} \int d\theta = \frac{1}{a} [\theta] + C = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + C \qquad \left[\because \sec\theta = \frac{x}{a}\right]$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$ तथा $\int \frac{1}{a^2 \pm x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ आदि के रूप में समाकलन

क्रिया विधि I. दिए गए समाकलन (Integral) में x^2 के गुणांक को इकाई बनायें तथा इसे $a^2 \pm x^2$ या $x^2 \pm a^2$ के रूप में लायें।

II. धारा 8.2 से उपयुक्त सूत्र का चयन कर समाकलन की क्रिया करें।

उदाहरण 1. निम्नलिखित के मान ज्ञात करें—

(i) $\int \frac{dx}{25 - 9x^2}$ (ii) $\int \frac{1}{4 + 9x^2}$ (iii) $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$

(iv) $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx$ (v) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{dx}{25-9x^2} = \int \frac{dx}{9\left(\frac{25}{9}-x^2\right)}$ [x^2 के गुणांक को इकाई बनाने पर]

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(5/3)^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{2\times(5/3)} \log \frac{(5/3)+x}{(5/3)-x} + C \qquad \left[\because \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C\right]$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{3}{2\times 5} \log \frac{5+3x}{5-3x} + C = \frac{1}{30}\log\frac{5+3x}{5-3x} + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{4}{9}+x^2\right)}\,dx$ [x^2 के गुणांक को इकाई बनाने पर]

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{(2/3)^2+x^2}\,dx = \frac{1}{9}\times\frac{1}{2/3}\tan^{-1}\frac{x}{2/3} + C \qquad \left[\because \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C\right]$$

$$= \frac{3}{9\times 2}\tan^{-1}\frac{3x}{2} + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x}{2} + C$$

(iii) माना $I = \int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx$

$$= \int \frac{(x^2)^2-(1)^2}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int (x^2-1)\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x + C$$

(iv) $I = \frac{x^4+1}{x^2+1} = \int \frac{x^4-1+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ [अब (iii) की भाँति हल करें]

(v) माना $I = \int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+2}{x^2-1}\,dx$

$$= \int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx = \int dx + 2\int \frac{1}{(x)^2-(1)^2}\,dx$$

$$= x + 2 \times \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} + C = x + \log \frac{x-1}{x+1} + C$$

उदहारण 2. निम्नलिखित के मान ज्ञात करें—

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$

हल : (i) माना $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25\left(\frac{9}{25} - x^2\right)}}$ [x^2 के गुणांक को इकाई बनाने पर]

$$= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{(3/5)^2 - (x)^2}} = \frac{1}{5} \sin^{-1} \frac{x}{(3/5)} + C = \frac{1}{5} \sin^{-1} \frac{5x}{3} + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4} + x^2\right)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1/2)^2 + x^2}}$

$$= \frac{1}{2} \log \left[x + \sqrt{x^2 + (1/2)^2} + C_1\right.$$

$$= \frac{1}{2} \log \left[2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right] + C, \quad \text{जहाँ } C = C_1 - \log 2$$

Type II. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ तथा $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$ के रूप में दिए गए समाकलन

इस रूप में समाकल के हल के लिए सर्वप्रथम $ax^2 + bx + c$ को निम्न विधि का प्रयोग कर दो वर्गों के योग या अंतर के रूप में व्यक्त करें :

I. x^2 का गुणांक यदि इकाई नहीं हो, तो इकाई बनाएँ। इसके लिए x^2 के गुणांक को उभयनिष्ठ के रूप में लें।

II. x वाले पदों में, x के गुणांक के आधे का वर्ग जोड़ और घटाकर $ax^2 + bx + c$ को निम्न रूप में परिवर्तित करें :

$$a(X^2 \pm A^2) \quad \text{या} \quad a(A^2 \mp X^2)$$

III. धारा (8.2) से उचित सूत्र का चयन कर समाकलन करें।

IV. यदि फलन उपयुक्त प्रतिस्थापन से $ax^2 + bx + c$ रूप में आ जाए तो आवश्यकतानुसार प्रतिस्थापन का प्रयोग करें।

क्रिया विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 3. निम्नलिखित के मान ज्ञात करें—

(i) $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$ (ii) $\int \frac{1}{x^2+4x+8}\, dx$

(iii) $\int \sqrt{2x^2-5x-1}\, dx$ (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}}$

(v) $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\, dx$ (vi) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+5}\, dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{dx}{2x^2 + x - 1} = \int \frac{dx}{2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 2\times\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}}$

[$\because$ x का गुणांक $\frac{1}{2}$ है, अत: पूर्ण वर्ग बनाने के लिए उसके आधे $\frac{1}{4}$ का वर्ग जोड़ा तथा घटाया गया है]

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\times\frac{3}{4}} \log \frac{x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} + C$$

$$\left[\because \int \frac{dx}{X^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \log \frac{X - A}{X + A}\right]$$

$$= \frac{4}{2\times 2\times 3} \log \frac{x - 1/2}{x + 1} + C = \frac{1}{3} \log \left[\frac{2x - 1}{2(x + 1)}\right] + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 8}\, dx$

$$= \int \frac{1}{(x + 2)^2 - 4 + 8}\, dx$$

[x के गुणांक का आधा $= 2$ अत: पूर्ण वर्ग के लिए $2^2 = 4$ जोड़ने तथा घटाने पर]

$$= \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 4}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{(x + 2)^2 + (2)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x + 2}{2} + C \qquad \left[\because \int \frac{1}{X^2 + A^2}\, dX = \frac{1}{A}\tan^{-1}\frac{X}{A} + C\right]$$

(iii) माना $I = \sqrt{2x^2 - 5x - 1}\, dx = \int \sqrt{2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right)}\, dx$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \times \left[\frac{x-\frac{5}{4}}{2} \sqrt{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{33}{16} \log \left\{ \left(x-\frac{5}{4}\right) + \sqrt{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2} \right\} \right]$$

$$\left[\because \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \log \{x + \sqrt{x^2-a^2}\} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left[\left(x-\frac{5}{4}\right) \sqrt{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}} - \frac{33}{16} \log \left\{ \left(x-\frac{5}{4}\right) + \sqrt{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}} \right\} \right] + C$$

(iv) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(3x^2-x)}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2-3\left(x^2-\frac{1}{3}x\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right]}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2-3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+3\times\frac{1}{36}-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{12}-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{36}-\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{6}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{x-(1/6)}{5/6} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{6x-1}{5} + C \quad \left[\because \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \right]$$

(v) समाकलन में $x^2 = t$ जिससे $2x\,dx = dt$ या $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$ रखने पर

$$\therefore \quad I = \int \frac{x}{x^4+x^2+1}\, dx = \int \frac{dt}{2(t^2+t+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}/2} \tan^{-1} \frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{(2x^2+1)}{\sqrt{3}} + C \qquad [\because \ t = x^2]$$

(vi) माना $e^x = t$ तो $e^x\,dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 6e^x + 5}\,dx = \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 5} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 3^2 + 5} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - (2)^2}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2} \log \frac{t + 3 - 2}{t + 3 + 2} + C = \frac{1}{4} \log \frac{t+1}{t+5} + C = \frac{1}{4} \log \frac{e^x + 1}{e^x + 5} + C$$ उत्तर

Type III. $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}\,dx$, $\int \frac{(px + q)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ तथा $\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}$ रूप के समाकलन

इन रूपों के समाकल का मान निकालने के लिए निम्न विधि अपनाते हैं—

I. $px + q = \alpha \left\{\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\right\} + \beta$

या $px + q = \alpha\,(2ax + b) + \beta$ के रूप में लिखें।

II. दोनों ओर से x के गुणांक तथा अचर की तुलना कर α तथा β का मान निकालें।

III. अब दिए गए प्रश्न में $px + q$ की जगह $\alpha(2ax + b) + \beta$ को रखें जिससे दिया गया समाकल्य दो समाकलों के योग या अंतर के रूप में परिवर्तित हो जाएगा।

एक भाग $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ या $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$ या $\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx$ के रूप का होगा जिसका मान $f(x) = t$ रखकर निकाला जा सकता है।

दूसरे भाग का समाकल धारा 8.2 के उपयुक्त सूत्र के प्रयोग से निकाला जाएगा।

उदाहरण 4. मान ज्ञात करें :

(i) $\int \frac{3x + 1}{2x^2 - 2x + 3}\,dx$ (ii) $\int (x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}\,dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{3x + 1}{2x^2 - 2x + 3}\,dx$

माना $3x + 1 = \alpha\left(\frac{d}{dx}(2x^2 - 2x + 3) + \beta\right) = \alpha\,(4x - 2) + \beta$ ...(1)

दोनों ओर से x के गुणांक तथा अचर की तुलना से

$$4\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4} \text{ तथा } -2\alpha + \beta = 1 \Rightarrow -2 \times \frac{3}{4} + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad 3x + 1 = \frac{3}{4}(4x - 2) + \frac{5}{2}$$

समी० (1) में यह मान रखने पर

$$I = \int \frac{\frac{3}{4}(4x - 2) + \frac{5}{2}}{2x^2 - 2x + 3}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x + 3}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{2x^2 - 2x + 3}\,dx$$

$$= \frac{3}{4} I_1 + \frac{5}{2} I_2 \qquad \text{...(2)}$$

जहाँ $I_1 = \int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3}\,dx$ तथा $I_2 = \int \frac{1}{2x^2-2x+3}\,dx$

माना $2x^2-2x+3 = t$ तथा $(4x-2)\,dx = dt$

$\therefore \quad I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log t + C_1 = \log(2x^2-2x+3) + C_1$

तथा $I_2 = \int \frac{1}{2x^2-2x+3}\,dx = \int \frac{1}{2\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}+\frac{3}{2}}\,dx$

[हर में x के गुणांक का आधा जोड़ने तथा घटा

$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}/2} \tan^{-1} \frac{(x-1/2)}{\sqrt{5}/2} + C_2$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C_2$

समी० (2) में I_1 तथा I_2 का मान रखने से

$I = \frac{3}{4}\log(2x^2-2x+3) + \frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$, जहाँ $C = C_1 + C_2$ $\left[\because \frac{5}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

(ii) $I = \int (x+1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$

माना $x+1 = \alpha\left\{\frac{d}{dx}(x^2-x+1)\right\} + \beta = \alpha(2x-1)+\beta$

दोनों ओर से x के गुणांक तथा अचर की तुलना से

$\beta - \alpha = 1$ तथा $\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}$ [दोनों समीकरणों को हल करने

समी० (1) में यह मान रखने पर

$$I = \int \left\{\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{2}\right\}\sqrt{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \sqrt{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}I_1 + \frac{3}{2}I_2$$

जहाँ $I_1 = \int (2x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$ तथा $I_2 = \int \sqrt{x^2-x+1}\,dx$

$x^2-x+1 = t$ से $(2x-1)\,dx = dt$

$\therefore \quad I_1 = \int t^{1/2}\,dt = \frac{t^{1/2+1}}{(1/2)+1} + C_1 = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C_1 = \frac{2}{3}t^{3/2} + C_1 = \frac{2}{3}(x^2-x+1)^{3/2} + C_1$

तथा $I_2 = \int \sqrt{x^2 - x + 1}\, dx = \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx = \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\, dx$

$$= \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2}\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \log\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \left(\frac{2x-1}{4}\right)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{8}\log\left[\frac{(2x-1) + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}{2}\right] + C_2$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{8}\log\left[(2x-1) + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right] + C_3,$$

जहाँ $C_3 = -\log 2 + C_2$

I_1 तथा I_2 का मान समी० (2) में रखने पर

$$I = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1)^{3/2} + \frac{3}{8}(2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{9}{16}\log\left[(2x-1) + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right] + C$$

जहाँ $C = C_1 + C_3$

Type IV. (a) $\int \frac{dx}{a + b\sin x}, \int \frac{dx}{a + b\cos x}, \int \frac{dx}{a + b\sin x + c\cos x}$

तथा $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$ **रूप के समाकल**

इन रूपों में समाकल का मान ज्ञात करने के लिए हम निम्न विधि अपनाते हैं :

I. $\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$, $\cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$ रखें।

II. अंश में $1 + \tan^2\frac{x}{2}$ की जगह $\sec^2\frac{x}{2}$ रखें।

III. $\tan\frac{x}{2} = t$ रखें जिससे $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dt$

IV. इससे समाकल $\frac{1}{at^2 + bt + c}$ रूप में परिवर्तित हो जाएगा। अब पहले बताई गई विधियों से समाकलन करें।

नीचे दिए गए उदाहरणों से क्रियाविधि स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 5. (i) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ (ii) $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$

(iii) $\int \frac{1}{5 + 4\cos x}\,dx$ (iv) $\int \frac{1}{5 + 4\sin x}\,dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\,dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1}{1 + \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} + \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}$$

$$= \int \frac{1+\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)+2\tan(x/2)+1-\tan^2(x/2)}$$

$$= \int \frac{\sec^2(x/2)}{2+2\tan(x/2)} = \int \frac{\sec^2(x/2)}{2[(1+\tan(x/2)]}\,dx$$

अब $\tan\frac{x}{2} = t$ रखने से, $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{1+t} = \log(1+t) + C = \log\left(1+\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2+\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}\,dx$

$$= \int \frac{1+\tan^2(x/2)}{2(1+\tan^2 x/2)+1-\tan^2(x/2)}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2(x/2)}{2+2\tan^2(x/2)+1-\tan^2(x/2)} = \int \frac{\sec^2(x/2)}{3+\tan^2(x/2)}\,dx$$

अब $\tan\frac{x}{2} = t$ जिससे $\sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dt$ रखने पर

$$I = \int \frac{2dt}{3+t^2} = 2\int \frac{dt}{3+t^2}\,dt = 2\times\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2} = 2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\tan\frac{x/2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(iii) $\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$

$$\int \frac{1}{5+4\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)}\,dx \qquad \left[\because \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \int \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{5\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+4\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{9 + \tan^2 \frac{x}{2}} dx \qquad \left[\because \sec^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}\right]$$

$\tan \frac{x}{2} = V$ रखने पर $\Rightarrow \sec^2 \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\right) dx = dV \Rightarrow \sec^2 \frac{x}{2} dx = 2\, dV$

$$= \int \frac{2dV}{3^2 + V^2}$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{V}{3}\right] + c, \qquad \left[\text{सूत्र} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \text{से}\right]$$

$$= \frac{2}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{3}\right) + c$$ उत्तर

(iv) $\int \frac{1}{5 + 4 \sin x} dx = \int \frac{1}{5 + 4\left(\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}\right)} dx \qquad \left[\because \sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}\right]$

$$= \int \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right)}{5 + 5 \tan^2 \frac{x}{2} + 8 \tan \frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{5\left[\tan^2 \frac{x}{2} + \frac{8}{5} \tan \frac{x}{2} + 1\right]} dx$$

$\tan \frac{x}{2} = V$ रखने पर $\Rightarrow \sec^2 \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\right) dx = dV \Rightarrow \sec^2 \frac{x}{2} dx = 2\, dV$

$$\int \frac{2dV}{5\left(V^2 + \frac{8}{5}V + 1\right)} = \frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(V^2 + \frac{8}{5} V + 1 + \frac{16}{25} - \frac{16}{25}\right)} dV$$

$\left(V \text{ का गुणांक} = \frac{8}{5} \Rightarrow V \text{ का गुणांक का } \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \text{ तथा } \frac{4}{5} \text{ का वर्ग} = \frac{16}{25}\right)$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(V^2 + \frac{8}{5} V + \frac{16}{25}\right) + \left(\frac{9}{25}\right)} dV$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(V + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} dV$$

$V + \frac{4}{5} = z$ रखने पर $\Rightarrow dV = dz$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{1}{z^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}\, dz = \frac{2}{5}\left[\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)} \tan^{-1}\left(\frac{z}{\frac{3}{5}}\right)\right] + c$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5z}{3}\right) + c$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left[\frac{5\left(V + \frac{4}{5}\right)}{3}\right] + c$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5V + 4}{3}\right) + c \qquad \left[\because z = V + \frac{4}{5}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left[\frac{5\tan\frac{x}{2} + 4}{3}\right] + c$$

Type IV. (b) $\int \frac{dx}{a\sin x \pm b\cos x}$ को हल करने का दूसरा तरीका

I. $a = r\cos\theta$ तथा $b = r\sin\theta$ रखें जिससे $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ तथा $\tan\theta = \frac{b}{a}$

II. $\int \frac{1}{a\sin x \pm b\cos x}\, dx$ को $r\int \frac{1}{\sin(x \pm \theta)}\, dx$ के रूप में लिखें।

III. दिया गया समाकल $\text{cosec}\,(x \pm \theta)$ के रूप का हो जाएगा।

IV. अब इसे सूत्र की सहायता से समाकलन करें।

उदाहरण : मान ज्ञात करें : $\int \frac{1}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\, dx$

हल : माना $1 = r\cos\theta$, $\sqrt{3} = r\sin\theta$ जिससे $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ तथा $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

माना $I = \int \frac{1}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\, dx$

$$= \frac{1}{r}\int \frac{1}{(\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta)}\, d\theta = \frac{1}{r}\int \frac{dx}{\sin(x + \theta)} = \frac{1}{r}\int \text{cosec}\,(x + \theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{r}\log\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + C \qquad \text{तथा } \theta = \frac{\pi}{3},\ r = 2.$$

Type V. $\int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}, \int \frac{dx}{a+b\sin^2 x}, \int \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x}$

$\int \frac{1}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}dx$ तथा $\int \frac{1}{a+b\sin^2 x + c\cos^2 x}dx$ रूप के समाकलन :

ऐसे समाकल को निम्न रूप में ज्ञात करते हैं :

I. हर तथा अंश को $\cos^2 x$ से भाग दें।

II. यदि हर में $\sec^2 x$ आए तो उसे $1+\tan^2 x$ के रूप में लिखें।

III. अब $\tan x = t$ रखें जिससे $\sec^2 x\,dx = dt$

प्रतिस्थापन से समाकल $\int \frac{1}{at^2+bt+c}dt$ के रूप का हो जाएगा।

IV. अब पहले बताई गई विधियों से समाकलन करें।

उदाहरण : निम्नलिखित के मान निकाले—

(i) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ (ii) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

(iii) $\int \frac{\sin x}{\sin 3x}dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{1}{4\sin^2 x + 5\cos^2 x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x + 5}dx$

[अंश तथा हर को $\cos^2 x$ से भाग देने पर]

$\tan x = t$ रखने पर, $\Rightarrow \sec^2 x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{4t^2+5} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+(5/4)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(t)^2+(\sqrt{5}/2)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{5}/2}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{5}/2} + C$$

$$= \frac{2}{4}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2\tan x}{\sqrt{5}} + C$$ **उत्तर**

(ii) $I = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 1}dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x + 1}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 2}dx$$

$\tan x = t$ रखने पर, $\Rightarrow \sec^2 x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{t^2+2} = \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

(iii) माना $I = \int \frac{\sin x}{\sin 3x}\,dx = \int \frac{\sin x}{3\sin x - 4\sin^3 x}\,dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin x\,(3 - 4\sin^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{3 - 4\sin^2 x}\,dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3 - 4\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{3\sec^2 x - 4\tan^2 x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{3(1 + \tan^2 x) - 4\tan^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{3 + 3\tan^2 x - 4\tan^2 x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{3 - \tan^2 x}\,dx$$

$\tan x = t$ रखने पर, $\Rightarrow \sec^2 x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{3 - t^2} = \int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 - (t)^2} = \frac{1}{2\times\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} - t}{\sqrt{3} + t} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} + \tan x}{\sqrt{3} - \tan x} + C$$

Type VI. $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}\,dx$ **रूप का समाकल**

इस रूप के समाकल को निम्न विधि से समाकलित करते हैं :

I. $a\sin x + b\cos x = \alpha \times$ हर का अवकल गुणांक $+ \beta \times$ हर

$$= \alpha\left\{\frac{d}{dx}(c\sin x + d\cos x)\right\} + \beta\{c\sin x + d\cos x\}$$ के रूप में लिखें।

II. दोनों ओर $\sin x$ तथा $\cos x$ के गुणांकों की तुलना कर a तथा β का मान प्राप्त करें।

III. अब समाकल को निम्न रूप में लिखें :

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}\,dx = \alpha\int \frac{c\cos x - d\sin x}{c\sin x + d\cos x}\,dx + \beta\int \frac{c\sin x + d\cos x}{c\sin x + d\cos x}\,dx$$

$$= \alpha\log(c\sin x + d\cos x) + \beta x + C$$

क्रिया विधि नीचे दिए गए उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण : (i) $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$ (ii) $\int \frac{1}{1 + \cot x}\,dx$

हल : (i) $I = \int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$

माना $2\sin x + 3\cos x = \alpha\left[\frac{d}{dx}(3\sin x + 4\cos x)\right] + \beta[3\sin x + 4\cos x]$

या $2\sin x + 3\cos x = \alpha[3\cos x - 4\sin x] + \beta[3\sin x + 4\cos x]$

$$= (3\beta - 4\alpha)\sin x + (3\alpha + 4\beta)\cos x$$

दोनों तरफ से $\sin x$ तथा $\cos x$ के गुणांकों की तुलना कर प्राप्त समीकरण को हल करने पर

$\therefore$ $$\alpha = \frac{1}{25},\ \beta = \frac{18}{25}$$

अब (1) से, $2\sin x + 3\cos x = \frac{1}{25}[3\cos\alpha - 4\sin x] + \frac{18}{25}[3\sin x + 4\cos x]$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\frac{1}{25}[3\cos x - 4\sin x] + \frac{18}{25}[3\sin x + 4\cos x]}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{3\cos x - 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx + \frac{18}{25}\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{25}\log[3\sin x + 4\cos x] + \frac{18}{25}\int dx = \frac{1}{25}\log[3\sin x + 4\cos x] + \frac{18}{25}x + C$$

(ii) $I = \int \frac{1}{1+\cot x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$ ...(1)

माना $\sin x = \alpha\left[\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x)\right] + \beta[\sin x + \cos x]$

या $\sin x = \alpha(\cos x - \sin x) + \beta(\sin x + \cos x) = (\beta - \alpha)\sin x + (\beta + \alpha)\cos x$

दोनों तरफ $\sin x$ तथा $\cos x$ के गुणांक बराबर करने पर

$$\beta - \alpha = 1,\ \beta + \alpha = 0 \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2},\quad \beta = \frac{1}{2}$$ (हल करने पर)

अब, (1) से $I = \int \frac{-\frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}\int dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}x + C$$

Type VII. $\int \frac{x^2+1}{x^4+Kx^2+1}\,dx$ तथा $\int \frac{x^2-1}{x^4+Kx^2+1}\,dx$ रूप के समाकल जहाँ K धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य के बराबर अथवा अचर है।

इसे निम्न विधि से करें :

I. हर तथा अंश को x^2 से भाग दें।

II. हर को $\left(x \pm \frac{1}{x}\right)^2 \pm K^2$ के रूप में लिखें। अब $x - \frac{1}{x}$ या $x + \frac{1}{x}$ को t के बराबर रखें जिससे समाकल में अंश की जगह dt आ जाएगा।

III. इससे समाकल मानक रूप $\frac{1}{t^2+a^2}$ या $\frac{1}{t^2-a^2}$ के रूप में आ जाता है, जिसे आसानी से समाकलित किया जा सकता है।

क्रिया विधि नीचे के उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 1. $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx$ का मान ज्ञात करें।

हल : (i) माना $I = \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x^4-x^2+1}{x^2}}\,dx$ [हर तथा अंश को x^2 से भाग देने पर]

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-2\times x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+(1)^2}\,dx$$

$x-\frac{1}{x}=t$ रखने पर, जिससे $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t^2+1^2} = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C$$

उदाहरण 2. निम्नलिखित मान ज्ञात करें—

(i) $\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ (iii) $\int \{\sqrt{\tan\theta}+\sqrt{\cot\theta}\}\,d\theta$

(iv) $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$ (v) $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$

हल : (i) $I = \int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx + \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-2+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+2-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(\sqrt{2})^2}\,dx$$

माना प्रथम समाकल में $x-\frac{1}{x}=u$, जिससे $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = du$

तथा द्वितीय समाकल में $x+\frac{1}{x}=v$, जिससे $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dv$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\times\sqrt{2}}\log\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}+C$$

(ii) माना $I=\int\sqrt{\tan\theta}\,d\theta$

माना $\tan\theta=t^2$ जिससे कि $\sec^2\theta\,d\theta=2t\,dt$

या $d\theta=2t\times\frac{1}{\sec^2\theta}dt=2t\times\frac{1}{1+\tan^2\theta}dt=\frac{2t}{1+t^4}dt$

$\therefore\quad I=\int\sqrt{t^2}\times\frac{2t}{1+t^4}dt=\int\frac{t\times 2t}{1+t^4}dt$

अब (i) की तरह हल करें।

(iii) माना $I=\int\{\sqrt{\tan\theta}+\sqrt{\cot\theta}\}\,d\theta=\int\left\{\sqrt{\tan\theta}+\frac{1}{\sqrt{\tan\theta}}\right\}d\theta=\int\frac{\tan\theta+1}{\sqrt{\tan\theta}}d\theta$

माना $\tan\theta=x^2$ जिससे $\sec^2\theta\,d\theta=2x\,dx$

या $d\theta=\frac{2x}{\sec^2\theta}dx=\frac{2x}{1+\tan^2\theta}dx=\frac{2x}{1+x^4}dx$

$\therefore\quad I=\int\frac{1+x^2}{x}\times\frac{2x}{1+x^4}dx=2\int\frac{x^2+1}{1+x^4}dx$

$$I=2\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=2\int\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x^4+1}{x^2}}dx$$

$$=2\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=2\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx$$

अब $x-\frac{1}{x}=y$ रखने पर, $\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=dy$

$$I=2\int\frac{dy}{y^2+(\sqrt{2})^2}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}}+C=\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$$

$$= \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{\tan\theta - 1}{\sqrt{2\tan\theta}} + C$$

दूसरी विधि : $I = \int (\sqrt{\tan\theta} + \sqrt{\cot\theta})\, d\theta = \sqrt{2}\int \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2\sin\theta \cdot \cos\theta}}\, d\theta$

$$= \sqrt{2}\int \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{1-(\sin\theta - \cos\theta)^2}}\, d\theta = \sqrt{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \text{ जहाँ } z = \sin x - \cos x$$

$$= \sqrt{2}\sin^{-1} z + c = \sqrt{2}\sin^{-1}(\sin\theta - \cos\theta) + c$$

(iv) $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\, dx$

अंश और हर को x^2 से भाग देने पर

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) + 2 + 1}\, dx, \qquad \text{(हर में 2 जोड़ने व घटाने प}$$

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3}\, dx$$

माना $\quad x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$

तब उपरोक्त समाकल निम्न रूप में प्राप्त होता है—

$$= \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c \qquad \left[\because \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}\right) + c$$

(v) $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$

अंश और हर को x^2 से भाग देने पर

$$=\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)}dx$$

$$=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+2.\,x.\,\frac{1}{x}-2+1}, \qquad \text{(हर में 2 जोड़ने व घटाने पर)}$$

$$=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\,dx$$

माना $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$

$$=\int \frac{dt}{t^2-1^2}$$

$$=\frac{1}{2(1)}\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+c \qquad \left[\text{सूत्र } \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right) \text{से}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1-x}{x^2+1+x}\right)+c$$

उत्तर

Type VIII. $\frac{1}{X\sqrt{Y}}$ के रूप के समाकल :

क्रियाविधि : (i) यदि X तथा Y दोनों प्रथम घात के हों, तो $Y=t^2$ रखें।

(ii) यदि X द्विघातीय तथा Y एक घातीय हो तो $\sqrt{Y}=t$ रखें।

(iii) यदि X एक घातीय तथा Y द्विघातीय हो, तो $X=\frac{1}{t}$ रखें।

(iv) यदि X तथा Y दोनों द्विघातीय हों तो $\sqrt{\frac{Y}{X}}=t$ या $X=\frac{1}{t}$ रखें।

उदाहरण 1. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}}$

हल : माना $I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}}$

माना $x+3=t^2$ तो $dx = 2t\,dt$ तथा $x+2 = t^2-3+2 = t^2-1$ तथा $t=\sqrt{x+3}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)\,t} = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int \frac{2}{(t+1)(t-1)}\,dt = \int\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right]dt$$

$$= \log(t-1) - \log(t+1) + C = \log\frac{t-1}{t+1} + C = \log\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1} + C$$

उदाहरण 2. $\int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x+1}}$

हल : माना $I = \int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x+1}}$

अब $x+1=t^2$ से $dx = 2t\,dt$ तथा $x^2-4 = (t^2-1)^2 - 4 = t^4 - 2t^2 + 1 - 4 = t^4 - 2t^2 - 3$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2t}{(t^4-2t^2-3)\,t}\,dt = \int \frac{2}{t^4-2t^2-3}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t^4-3t^2+t^2-3}\,dt = 2\int \frac{1}{(t^2-3)(t^2+1)}\,dt$$

$$= 2\left[\int \frac{1}{4(t^2-3)} - \frac{1}{4(t^2+1)}\right]dt \qquad \text{(आंशिक भिन्नीकरण से)}$$

$$= 2\times\frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{t^2-(\sqrt{3})^2}\,dt - \int \frac{1}{t^2+1^2}\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} - \tan^{-1}t\right] + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\tan(\sqrt{x+1}) + C$$

उदाहरण 3. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}$

हल : माना $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}$

माना $1+x = \frac{1}{t}$ तो $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-1}} \times\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{1-2t}}\,dt = -\int (1-2t)^{-1/2}\,dt$$

$$= -\frac{(1-2t)^{-(1/2)+1}}{(-2)\left(-\frac{1}{2}+1\right)} = -\frac{(1-2t)^{1/2}}{-2\times\frac{1}{2}} = \sqrt{1-2t}+C$$

$$= \sqrt{1-\frac{2}{x+1}}+C = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$$

उदाहरण 4. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$

हल : $x=\frac{1}{t}$ से $t=\frac{1}{x}$ तथा $\therefore\ dt=-\frac{1}{x^2}\,dx$

$$\therefore\quad I=\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int \frac{-dt}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

पुनः $t^2+1=z^2$ से $2t\,dt=2z\,dz \Rightarrow t\,dt=z\,dz$

$$\therefore\quad I=-\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2}}=-\int \frac{z}{z}\,dz=-\int dz=-z+C$$

$$=-\sqrt{t^2+1}+C=-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$ उत्तर

महत्वपूर्ण सूत्र

(i) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$

(ii) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+C$

(iii) $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+C$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$

(vi) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$

(vii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$

(viii) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right]+C$

(ix) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log [x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C$

(x) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + C$

प्रश्नावली 8.1

निम्नलिखित के मान ज्ञात करें—

1. (i) $\int \frac{dx}{4 - x^2}$ (ii) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

2. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 - 4}$

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 202

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(\log x)^2 + 10}}$

6. $\int \frac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\, dx$ [संकेत : $x = a \sin \theta$]

7. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}}$ [संकेत : हर $= (1 - x - x^2) = -(x^2 + x - 1) = -\left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$]

(ii) $\int x \sqrt{\frac{9 - x^2}{9 + x^2}}\, dx$

[संकेत : माना $x^2 = 9t \Rightarrow 2x\, dx = 9\, dt$] [उ० प्र० डिप्लोमा 202

8. (i) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ (ii) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 3}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 202

9. $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 1}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 202

10. $\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 8x - 3x^2}}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}$

13. $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 3x - 18}\, dx$

14. $\int \frac{x + 1}{x^2 + x + 3}\, dx$

15. $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}\, dx$

16. $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}\, dx$

17. $\int (x+1)\sqrt{1+x^2}\,dx$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}\,dx$

19. $\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$

20. $\int \frac{1}{5-4\sin x}\,dx$

21. $\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx$

22. $\int \frac{1}{1+\tan x}\,dx$

23. $\int \frac{1}{1+\cot x}\,dx$

24. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 5\cos^2 x}$

25. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

26. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$

27. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$

28. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

29. $\int \sqrt{\cot\theta}\,d\theta$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

31. (i) $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x+5}}$

(ii) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x+2}}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

32. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+4}}$

33. $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

34. $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}$

[संकेत : $\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx\right]$

35. मान निकालें :

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(iii) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

(iv) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

(v) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$

(vi) $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$

(vii) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

(viii) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

(ix) $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2021(S)]

(x) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

(xi) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

36. निम्न के मान ज्ञात करें— [उ० प्र० डिप्लोमा 201

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 4x^2}}$

(ii) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{9 - 16x^6}}\, dx$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}}$

(iv) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{16 + \tan^2 x}}\, dx$

(v) $\int \sqrt{x^2 - 16}\, dx$

(vi) $\int \frac{dx}{4 + x^2}$

(vii) $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

(viii) $\int \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)}\, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2023, 19(

(ix) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$

(x) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\, dx$

(xi) $\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018, 19(

(xii) $\int \frac{\text{cosec}^2 x}{1 - \cot^2 x}\, dx$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

• $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ का मान है—

(a) $\tan^{-1}(e^x) + c$ (b) $\tan^{-1}(e^{-x}) + c$ (c) $\cot^{-1}(e^x) + c$ (d) कोई नहीं

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ का मान है—

(a) $\sin^{-1} \frac{x}{a}$

(b) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

(c) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2} + c$

(d) कोई नहीं

$\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx$ का मान है—

(a) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2 \log [x + \sqrt{x^2 - 4}] + c$

(b) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} + 2 \log [x + \sqrt{x^2 - 4}] + c$

(c) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} + c$

(d) $\log [x + \sqrt{x^2 - 4}] + c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$ का मान है—

(a) $\sin^{-1}\frac{x}{5}+c$ (b) $\log[x+\sqrt{x^2-25}]+c$

(c) $\log[x-\sqrt{x^2-25}]+c$ (d) कोई नहीं

5. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ का मान है—

(a) $\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+c$ (b) $\frac{1}{2a}\log\frac{x+a}{x-a}+c$ (c) $\log\frac{x-a}{x+a}+c$ (d) $\log\frac{x+a}{x-a}+c$

उत्तरमाला

1. (i) $\frac{1}{4}\log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)+C$ (ii) $\frac{1}{4}\log\frac{x-2}{x+2}+C$ **2.** $\frac{1}{4}\log_e\frac{x-1}{x+3}+C$

3. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$ **4.** $\log(x+\sqrt{x^2-9})+C$ **5.** $\log\{\log x+\sqrt{(\log x)^2+10}\}+C$

6. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$ **7.** (i) $\sin^{-1}\frac{(2x+1)}{\sqrt{5}}+C$ (ii) $\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x^2}{9}+\frac{1}{2}(9-x^4)^{1/2}+C$

8. (i) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$ (ii) $\frac{1}{2\sqrt{7}}\log\left[\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right]$ **9.** $\frac{1}{3}\log\frac{2x-1}{2(x+1)}+C$

10. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x-2}{3}+C$

11. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\frac{3x-4}{5}\right)+C$ **12.** $[\log\{(x-2)+\sqrt{x^2-4x+2}]+C$

13. $\log(x^2+3x-18)-\frac{2}{3}\log\frac{x-3}{x+6}+C$ **14.** $\frac{1}{2}\log(x^2+x+3)+\frac{1}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C$

15. $2\sqrt{x^2+4x+3}-3\log\{x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\}+C$

16. $2\sqrt{x^2+4x+5}-\log(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}+C$

17. $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log[x+\sqrt{x^2+1}]+C$

18. $\frac{1}{2}\log\left\{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right\}+C$ **19.** $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(x/2)}{3}\right)+C$

20. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan(x/2)-4}{3}\right)+C$ **21.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C$

22. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log(\sin x+\cos x)+C$ **23.** $-\frac{1}{2}\log(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}x+C$

24. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{5}}\right)+C$ **25.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right)+C$

26. $\left[\frac{1}{2}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right]+C$ **27.** $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)\right]+C$

28. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left[\frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right]+C$

29. $\frac{1}{\sqrt{2}}[\sin^{-1}(\sin x-\cos x)]+\log[\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}]+C$

30. $\log\left\{\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right\}+C$

31. (i) $\frac{1}{\sqrt{14}}\log\left[\frac{\sqrt{2x+10}-\sqrt{7}}{\sqrt{2x+10}+\sqrt{7}}\right]+C$ (ii) $\log\left[\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}\right]$

32. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{3}\,(x+1)}\right]+C$ **33.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}+C$

34. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left[\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}}\right]+C$

35. (i) $\log[x+\sqrt{a^2+x^2}]+c$ (ii) $\log[x+\sqrt{x^2-a^2}]+c$

(iii) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log[x+\sqrt{a^2+x^2}]+c$

(iv) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log[x+\sqrt{x^2-a^2}]+c$

(v) $a\sin^{-1}\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+c$ (vi) $a\sin^{-1}\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+c$

(vii) $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$ (viii) $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$

(ix) $\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+C$ (x) $\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+C$

(xi) $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$

36. (i) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}+c$ (ii) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{4x^3}{3}\right)+c$

(iii) $\log(x+\sqrt{x^2-16})+c$ (iv) $\log[\tan x+\sqrt{16+\tan^2 x}]+c$

(v) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\log(x+\sqrt{x^2-16})+c$

(vi) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$ (vii) $-\tan^{-1}(\cos x)+c$ (viii) $\tan^{-1}(e^x)+c$ (ix) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)+c$

(x) $\log(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})+c$ (xi) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x}{2}+c$ (xii) $-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)+c$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

(a) **2.** (b) **3.** (a) **4.** (b) **5.** (a)

अध्याय

9

निश्चित समाकलन
(Definite Integration)

9.1 परिचय (Introduction)

हम पिछले अध्यायों में चर्चा कर चुके हैं कि यदि समाकलन के लिए कोई सीमा नहीं दी गई हो तो किसी फलन का समाकलन करने के बाद एक स्थिरांक जोड़ दिया जाता है, अर्थात्

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ जहाँ } f(x) \text{ का समाकलन } F(x) \text{ है।}$$

चूँकि स्थिरांक का मान निश्चित नहीं होता अतः इसे अनिश्चित समाकलन कहते हैं।
इस अध्याय में हम निश्चित सीमाओं के अधीन समाकलन पर विचार करेंगे।

9.1.1 परिभाषा (Definition)

[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]

यदि $f(x)$ किसी बन्द अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित सतत फलन हो, तो $\int_a^b f(x)\,dx$ को $x = a$ से $x = b$ सीमा के बीच निश्चित समाकलन कहते हैं।
इसे निम्न रूप में व्यक्त करते हैं—

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \text{ जहाँ } \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

यह स्पष्ट है कि निश्चित समाकलन अद्वितीय होता है। यहाँ a तथा b समाकलन की सीमायें हैं।

9.2 समाकलन की सीमायें (Limits of Integration)

$\int_a^b f(x)\,dx$ में $x = a$ को जो समाकलन चिह्न में नीचे लिखा जाता है, समाकलन की **निम्न सीमा (Lower Limit)** तथा $x = b$ को, जो ऊपर लिखा जाता है, समाकलन की **उच्च सीमा (Upper Limit)** कहते हैं।

9.3 निश्चित समाकलन ज्ञात करने की विधि (Integration)

I. सर्वप्रथम पहले बताई गई विधियों से समाकलन करें। समाकलन नियतांक नहीं लिखें।

II. इस राशि को बड़े कोष्ठक में रखकर कोष्ठक के दाहिनी ओर निम्न तथा उच्च सीमा लिखें।

III. अब समाकलन की चर राशि की जगह उच्च सीमा तथा निम्न सीमा रखकर, उच्च सीमा से प्राप्त राशि से निम्न सीमा से प्राप्त राशि का अन्तर निकाल लें।

नोट :

• $\int_a^b f(x)\,dx$, $y = f(x)$, x-अक्ष तथा भुज $x = a$, कोटि $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निरूपित करता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$

हल : $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_a^b = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}$

उदाहरण 2. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

हल : $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\,dx = [\tan x - x]_0^{\pi/4}$

$$= \left[\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right) - \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)\right] = \left[1 - 0 - \frac{\pi}{4} + 0\right] = \frac{4-\pi}{4}$$

उदाहरण 3. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$

हल : $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x}\,dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx - \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/4} - [-\cos x]_0^{\pi/4} = [\sin x]_0^{\pi/4} + [\cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right] + \left[\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

प्रतिस्थापन पर आधारित प्रश्न

चूँकि प्रतिस्थापन से समाकलन करते समय नये चर t (माना) को x की जगह रखना होता है, अतः नया t का फलन होता है। अतः हमें (i) dx तथा (ii) निम्न तथा उच्च सीमा में भी परिवर्तन करना होता है। क्रियाविधि नीचे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

उदाहरण 4. $\int_0^1 e^x \cos e^x\,dx$

हल : माना $I = \int_0^1 e^x \cos e^x\,dx$

$e^x = t$ लेने पर, $\Rightarrow e^x\,dx = dt$;

जब $x = 0$, $t = e^0 = 1$ तथा जब $x = 1$, $t = e^1 = e$

$\therefore$ $I = \int_1^e \cos t\,dt = [\sin t]_1^e = \sin(e) - \sin(1)$

उदाहरण 5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

हल : माना $\cos x = t$ जिससे $-\sin x\, dx = dt$

जहाँ $x = 0,\ t = \cos 0 = 1$ जब $x = \frac{\pi}{2},\ t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_1^0 \frac{-dt}{1+t^2} = -\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -[\tan^{-1} t]_1^0 = -[\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1] = -\left[0 - \frac{\pi}{4}\right] \quad \therefore \ I = \frac{\pi}{4}$$ उत्तर

उदाहरण 6. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

हल : माना $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x}\, dx$$ [हर तथा अंश को $\cos^2 x$ से भाग देने पर]

माना $\tan x = t \Rightarrow \sec^2 x\, dx = dt$

तथा जब $x = 0,\ t = \tan 0 = 0$ जब $x = \frac{\pi}{2},\ t = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{b^2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{b^2} \times \frac{1}{\frac{a}{b}} \times \left[\tan^{-1} \frac{t}{\frac{a}{b}}\right]_0^{\infty} \qquad \left[\because \int \frac{dX}{X^2 + A^2} = \frac{1}{A}\tan^{-1}\frac{X}{A}\right]$$

$$= \frac{1}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{ab}[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0]$$

$$= \frac{1}{ab} \times \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2ab}$$ उत्तर

उदाहरण 7. $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}\, dx$

अब माना $\tan^{-1} x = t$ जिससे $\frac{1}{(1+x^2)}\, dx = dt$

जब $x = 0, t = \tan^{-1} 0 = 0$ तथा जब $x = 1, t = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad I = \int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - 0\right] = \frac{\pi^3}{192}$$

उदाहरण 8. $\int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\cos x}\, dx$

हल : माना $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\cos x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\, dx$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{5+5\tan^2\frac{x}{2}+4-4\tan^2\frac{x}{2}} = \int_0^{\pi} \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+9}\, dx$$

अब माना $\tan\frac{x}{2} = t$ जिससे $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\, dx = dt$ या $\sec^2\frac{x}{2}\, dx = 2\, dt$

जब $x = 0, t = \tan\frac{0}{2} = 0$ तथा जब $x = \pi, t = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$

$$\therefore \quad I = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+3^2} = 2\times\frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\frac{t}{3}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{3}[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{3}$$

उदाहरण 9. $\int_0^{\pi/2} (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\, dx$

हल : माना $I = \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\, dx$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\frac{1}{2}\, 2\sin x \cos x}}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1-1+2\sin x\cos x}}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1-(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x)}}\, dx$$

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}\,dx \qquad \ldots(1)$$

अर्थात्

अब (1) में $\sin x - \cos x = t$ से $(\cos x + \sin x)\,dx = dt$

जब $x = 0, t = -1$ तथा जब $x = \frac{\pi}{2}, t = 1$

$$I = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2} \times 2 \times \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\sqrt{2}\,[\sin^{-1} t]_0^1$$

$\therefore$

$$= 2\sqrt{2}\,[\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0] = 2\sqrt{2}\,[\frac{\pi}{2} - 0] = 2\sqrt{2} \times \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\,\pi$$ उत्तर

प्रश्नावली 9.1

निम्न का समाकलन ज्ञात करें—

1. (i) (a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ (ii) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]**

(iii) $\int_1^2 x^2\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]**

(b) यदि $\int_0^1 (3x^2 + 2x + k)\,dx = 0$, तो k का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]**

2. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

3. (a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]**

4. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$ **5.** $\int_1^2 x \log x\,dx$ **6.** $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x\,dx$

7. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ **8.** $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$

9. (i) $\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx$ (ii) सिद्ध करें $\int_0^1 \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

10. $\int_1^3 \frac{\log x}{x}\,dx$

11. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]**

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta} \sin^3\theta\,d\theta$

12. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\,dx$ (ii) $\int_1^2 \frac{1}{(x+4)(x+5)}\,dx$ **13.** $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\,dx$

14. $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,dx$ [संकेत : $I = \int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

15. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\,dx$ **16.** $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\sin x}$

17. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$ **18.** $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^x}\,dx$

उत्तरमाला

1. (a) (i) $\frac{\pi}{12}$ (ii) 1 (iii) $\frac{7}{3}$ (b) -2 **2.** $\sqrt{2}$ **3.** (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$ **4.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

5. $2\log 2 - \frac{3}{4}$ **6.** $\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$ **7.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} - \log(\sqrt{2}+1)\right]$

8. $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}+1)$ **9.** 1 **10.** $\frac{(\log 3)^2}{2}$ **11.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{8}{21}$

12. (i) $\log\frac{4}{3}$ (ii) $\log\frac{36}{35}$ **13.** $\frac{1}{4}\log\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ **14.** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ **15.** $\frac{\pi}{2}$

16. $\frac{1}{3}\log 2$ **17.** $\frac{\pi}{2ab}$ **18.** $\log(1+e) - \frac{1}{e} - \log 2$

9.4 निश्चित समाकलन के गुण (Properties of Definite Integration)

यदि $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, तो [उ० प्र० डिप्लोमा 2018]

गुण (1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

प्रमाण : माना $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

तथा $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+c]_a^b = F(b) - F(a)$

तथा $\int_a^b f(t)\,dt = [f(t)+c]_a^b = F(b) - F(a)$

$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

गुण (2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

प्रमाण : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$

गुण (3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, जहाँ $a < c < b$

प्रमाण : R.H.S. $= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)]$

$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx =$ L.H.S.

गुण (4) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

प्रमाण : माना $a-x=t$ जिससे जब $x=a, t=0$ तथा जब $x=0, t=a$ और $dx=-dt$

$\therefore \int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$ [गुण 2]

$= \int_0^a f(x)\,dx$ [गुण 1]

गुण (5) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ **यदि** $f(-x) = -f(x)$, **अर्थात् यदि** $f(x)$ **विषम फलन है।**

तथा $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ **यदि** $f(-x) = f(x)$, **अर्थात् यदि** $f(x)$ **सम फलन है।**

प्रमाण : यहाँ $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$ [$\because 0 < 0 < a$]

$= I_1 + I_2$ (माना) ...(1)

अब $I_1 = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$ तथा $I_2 = \int_0^a f(x)\,dx$

अब $I_1 = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$

$x = -t$ से $dx = -dt$ तथा जब $x = -a, t = a$ तथा जब $x = 0, t = 0$

$\therefore I_1 = \int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt$ [गुण (2)]

$= \int_0^a f(-x)\,dx$ [गुण (1)] ...(2)

Case I : जब $f(x)$ विषम फलन है, अर्थात् $f(-x) = -f(x)$

(1) तथा (2) से $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$ [$\because f(-x) = -f(x)$]

$= 0$ सिद्ध हुआ।

Case II : जब $f(x)$ सम फलन है, अर्थात् $f(-x) = f(x)$

(1) तथा (2) से $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$ [$\because f(-x) = f(x)$]

$= 2\int_0^a f(x)\,dx$ सिद्ध हुआ।

गुण (6) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, **यदि** $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$, **यदि** $f(2a-x) = -f(x)$

प्रमाण : यहाँ $I = \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$ [$\because 0 < a < 2a$] ...(1)

$= I_1 + I_2$ (माना)

जहाँ $I_1 = \int_0^a f(x)\,dx$ तथा $I_2 = \int_a^{2a} f(x)\,dx$

अब $I_2 = \int_a^{2a} f(x)\,dx$

$x = 2a - t$ रखने पर $dx = -dt$ तथा जब $x = a, t = a$ एवं जब $x = 2a, t = 0$

$I_2 = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx$ ...(2)

Case I : जब $f(2a-x) = f(x)$

$$I_2 = \int_0^a f(x)\,dx$$

$\therefore$ (1) से $\quad I = \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Case II : जब $f(2a-x) = -f(x)$

$$I_2 = -\int_0^a f(x)\,dx$$

$\therefore$ (1) से $\quad I = \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$

नोट :

- (i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ (ii) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cot x}\,dx$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx$

हल : (i) माना $\quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\,dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$$

(1) + (2) से

$$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx \qquad \Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\pi/2} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = [x]_0^{\pi/2} = \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] \qquad \Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$$

(ii) माना $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cot x}\,dx$ $\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}\,dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$

[अब प्रश्न (i) की भाँति करें]

(iii) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ ...(1)

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\,dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$ ...(2)

(1) + (2) से

$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$

$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ $\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} 1\,dx$

$\Rightarrow 2I = [x]_0^{\pi/2} = \left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$ $\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2}$ $\therefore I = \frac{\pi}{4}$ उत्तर

उदाहरण 2. $\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \cos x}\,dx$

हल : माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \cos x}\,dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\tan(\pi - x)}{\sec(\pi - x) + \cos(\pi - x)}\,dx$ $\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)(-\tan x)}{(-\sec x) + (-\cos x)}\,dx$ $\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\tan x}{\sec x + \cos x}\,dx$

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \cos x}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \cos x}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} + \cos x}\,dx - I \qquad \Rightarrow I + I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \times 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad \left[\because \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx \text{ यदि } f(2a-x) = f(x)\right]$$

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

अब माना $\cos x = t$ जिससे $-\sin x\,dx = dt$ या $\sin x\,dx = -dt$

जहाँ $x = 0,\ t = \cos 0 = 1$ तथा जब $x = \frac{\pi}{2},\ t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\therefore \quad I = -\pi\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} = \pi\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \qquad \left[\because -\int_b^a f(a)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\right]$$

$$= \pi[\tan^{-1} t]_0^1 = \pi[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \pi \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

उदाहरण 3. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

हल : माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

तथा $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\,dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$

i.e., $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ...(2)

$\therefore$ (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$ [उदाहरण (2) देखें]

उदाहरण 4. सिद्ध करें कि $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

हल : माना $I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$ ...(1)

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\} dx = \int_0^{\pi/4} \log\left\{1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan x}\right\} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\,dx \qquad \left[\because \tan\frac{\pi}{4}=1\right]$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\frac{2}{1+\tan x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \log 2\,dx - \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$$

$$= \log 2 \int_0^{\pi/4} dx - I \qquad [(1) \text{ से}]$$

$$I + I = \log 2\,[x]_0^{\pi/4}$$

या $\quad 2I = \log 2\left[\frac{\pi}{4}-0\right] = \frac{\pi}{4}\log 2 \qquad \therefore \quad I = \frac{\pi}{8}\log 2$

उदाहरण 5. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$

हल : माना $I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ ...(1)

(1) में $x = \tan\theta$ रखने पर $\Rightarrow dx = \sec^2\theta\,d\theta$; जहाँ $x=0$ तो $\theta=0$ तथा जब $x=1$ तो $\theta=\pi/4$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta \qquad \text{...(1)}$$

या $\quad I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\,d\theta$ ...(2)

[अब उदाहरण (4) की भाँति हल करें।]

उदाहरण 6. (i) $\int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$ या $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \log\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$

हल : (i) माना $I = \int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx$ ...(1)

या $\quad I = \int_0^{\pi/2} \log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \log\cos x\,dx$ ...(2)

इसी तरह (iii) $\Gamma\frac{7}{2}=\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

9.5.1 $\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx$ के रूप में समाकल का मान :

(i) यदि दिया गया फलन $\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx$ के रूप का हो, तो गामा फलन (Gamma function) की सहायता से इसका मान आसानी से निकाला जा सकता है। सूत्र निम्न है—

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$

जहाँ m तथा n धनात्मक पूर्णांक हैं।

(ii) **अपचयन सूत्र (Reduction Formula) :** इसका मान निम्नांकित अपचयन सूत्रों की सहायता से भी निकाला जा सकता है—

(i) $\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{[(m-1)(m-3)\ldots 2\text{ या }1]\,[(n-1)(n-3)\ldots 2\text{ या }1]}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots 2\text{ या }1}\cdot k$

जहाँ $k=\pi/2$ यदि m तथा n दोनों सम हैं, $k=1$ यदि दोनों में कोई एक विषम है।

(ii) $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 2\text{ या }1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2\text{ या }1}\cdot k$

जहाँ $k=1$, यदि n विषम है, $k=\frac{\pi}{2}$, यदि n सम है।

(iii) $\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2\text{ या }1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2\text{ या }1}\cdot k$

जहाँ $k=1$, यदि n विषम है, $k=\pi/2$, यदि n सम है।

नोट :

- इसे वाली सूत्र के नाम से जाना जाता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

मान ज्ञात करें—

उदाहरण 1. $\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin^4 x\,dx$

हल : माना $\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin^4 x\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5+4+2}{2}\right)}$ [सूत्र के प्रयोग से]

[यहाँ $n=4, m=5$]

$$=\frac{\Gamma(3)\times\Gamma(5/2)}{2\times\Gamma(11/2)}=\frac{2\times 1\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}{2\times\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}=\frac{8}{315}$$ उत्तर

उदाहरण 2. $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 \times \cos^8 x\, dx$

हल : $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 \times \cos^8 x\, dx = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{0+1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{8+1}{2}\right)}{2 \times \Gamma\left(\dfrac{0+8+2}{2}\right)}$ [यहाँ $m = 0, n = 8$]

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{2 \times \Gamma(5)} = \frac{\sqrt{\pi} \times \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{35}{256}\pi$$ उत्तर

विकल्प : $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \dfrac{(8-1)(8-3)(8-5)(8-7)}{8(8-2)(8-4)(8-6)} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{7 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{35}{256}\pi$

[$\because n = 8 =$ सम संख्या अपचयन सूत्र से]

उदाहरण 3. $\int_0^a \dfrac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$

हल : माना $I = \int_0^a \dfrac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$

माना $x = a \sin\theta$ लेने पर, $dx = a\cos\theta\, d\theta$ तथा जब $x = 0$, तो $\theta = 0$ तथा जब $x = a$, तो $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{a^4 \sin^4\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}} a\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{a^4 \sin^4\theta}{a\cos\theta} \times a\cos\theta\, d\theta$$

$$= a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta (\cos\theta)^0\, d\theta$$

$$= a^4 \frac{\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{4+0+2}{2}\right)}$$

$$= \frac{a^4 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{a^4 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi}}{2 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{3}{16}\pi a^4$$ उत्तर

नोट :

• प्रश्न (1), (2) तथा (3) अपचयन सूत्र से भी हल कर सकते है। देखें प्रश्न 4।

उदाहरण 4. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^3 x\, dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^2 x\, dx$ (iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x\, dx$

अपचयन सूत्र :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{[(m-1)(m-3)\ldots(n-1)(n-3)\ldots]}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots} \cdot k \text{ से}$$

हल : (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^3 x\, dx = \frac{(6-1)(6-3)(6-5)\times(3-1)}{(6+3)(6+3-2)(6+3-4)(6+3-6)(6+3-8)}\times 1$

$= \frac{5\times 3\times 1\times 2}{9\times 7\times 5\times 3\times 1}\times 1 = \frac{2}{63}$ [$\because$ $n=3$ विषम है अतः $k=1$]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^2 x\, dx = \frac{(8-1)(8-3)(8-5)(8-7)(2-1)}{(8+2)(8+2-2)(8+2-4)(8+2-6)(8+2-8)}\times \frac{\pi}{2}$

$= \frac{7\times 5\times 3\times 1\times 1}{10\times 8\times 6\times 4\times 2}\times \frac{\pi}{2}$ [$\because$ m तथा n दोनों सम हैं अतः $k=\pi/2$]

$= \frac{7}{512}\pi$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x\, dx$

$\frac{(5-1)(5-3)(4-1)(4-3)}{(5+4)(5+4-2)(5+4-4)(5+4-6)(5+4-8)}\times 1 = \frac{4\times 2\times 3\times 1}{9\times 7\times 5\times 3\times 1}\times 1 = \frac{8}{315}$

[$\because \cos x$ की घात *i.e.*, m विषम है अतः $k=$

महत्वपूर्ण गुण एवं सूत्र

गामा फलन (Gamma Function)

(A) (i) गुण $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma n$ तथा $\Gamma(n+1) = n!$, जहाँ $n > 0$

(ii) $\Gamma 1 = 1$

(iii) $\Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

(B) $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$

जहाँ m तथा n धनात्मक पूर्णांक हैं।

(i) अपचयन सूत्र :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{[\{(m-1)(m-3)\ldots 2 \text{ या } 1\}\{(n-1)(n-3)\ldots 2 \text{ या } 1\}]}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots 2 \text{ या } 1}\cdot k$$

जहाँ $k = \frac{\pi}{2}$ यदि m तथा n दोनों सम हैं, तथा $k=1$ यदि दोनों में कोई एक विषम है।

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)(n-4)\ldots 2 \text{ या } 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2 \text{ या } 1}\cdot k$

जहाँ $k=1$, यदि n विषम है तथा $k=\frac{\pi}{2}$, यदि n सम है।

(iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2 \text{ या } 1}{n(n-2)(n-5)\ldots 2 \text{ या } 1}\cdot k$

जहाँ $k=1$ यदि n विषम है, तथा $k=\frac{\pi}{2}$ यदि n सम है।

प्रश्नावली 9.2

निम्नलिखित के समाकलों का मान ज्ञात करें—

1. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan x}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}}\, dx$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x}{\sin^{3/2} x + \cos^{3/2} x}\, dx$

(v) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$

(vi) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\, dx$

(vii) $\int_0^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+e^{-\cos x}}\, dx$

2. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx$

3. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

4. (i) $\int_0^{\pi} \frac{x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

5. $\int_0^{\pi/2} \log \tan x\, dx$ **6.** $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \tan x\, dx$ **7.** $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x}-1\right) dx$

8. (i) $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\cos^2 x}$

(ii) $\int_0^{\pi} x \log \sin x\, dx$

9. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\cos\alpha \sin x}$

10. $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{(1+x)(1+x^2)}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2023, 19(S)]**

11. $\int_0^{\pi} \log_e (1+\cos x)\, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}\, dx$

13. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx$

14. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\, dx$

(iii) $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$

(iv) $\int_0^{\pi} \sin^5 x\, dx$

15. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x\, dx$

16. $\int_0^2 x^{3/2}(2-x)^{1/2}\, dx$ **[संकेत :** $x = 2\sin^2 t$ रखें**]** **17.** $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x\, dx$

18. $\int_0^{\pi} \theta \sin^6 \theta \cos^4 \theta \, d\theta$

19. $\int_0^{\pi} \theta \sin^4 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$

20. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x \, dx$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x \, dx$

22. $\int_0^2 x^{3/2} (2-x)^{1/2} \, dx$ [संकेत : $x = 2\sin^2 t$]

23. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x \, dx$

24. $\int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$

25. $\int_0^{\pi/6} \sin^8 3\theta \, d\theta$

[संकेत : माना $3\theta = x$]

26. $\int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{x}{4} \, dx$

27. $\int_0^{3\pi/2} \cos^5 \frac{\theta}{3} \, dx$

28. मान बताये—

(i) $\int_1^2 \sqrt{1+x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SS)]

(ii) $\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)^{1/2} \, d\theta$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin 2x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

(iv) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$

(v) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(vi) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx$

(vii) $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx$

(viii) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x} \, dx$

(ix) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

(x) निश्चित समाकलन के कोई दो गुण लिखें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2018 (S)]

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \, dx$ का मान है—

(a) $\log 2$ (b) $2\log 2$ (c) $\frac{1}{2}\log 2$ (d) कोई नहीं

2. $\int_{-2}^{2} |x| \, dx$ का मान है—

(a) 4 (b) 3.5 (c) 2 (d) 0

3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^5 x}{\sec^5 x + \operatorname{cosec}^5 x} \, dx$ का मान है—

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) π

4. $\int_{-1}^{+1} x^3 (1-x^2)\, dx$ का मान है—
(a) $-\frac{40}{3}$ (b) $\frac{40}{3}$ (c) 0 (d) कोई नहीं

5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$ का मान है—
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) कोई नहीं

6. $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^{63} x + x^{125})\, dx$ का मान है—
(a) 2π (b) 0 (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) कोई नहीं

7. $\int_{-\pi}^{\pi} \tan x\, dx$ का मान है—
(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) कोई नहीं

8. $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx$ का मान है—
(a) $\int_0^a \{f(x) + f(-x)\}\, dx$ (b) $2\int_0^a f(x)\, dx$
(c) 0 (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{4}$ (v) $\frac{\pi}{4}$ (vi) $\frac{\pi}{4}$ (vii) $\frac{\pi}{2}$

2. π **3.** $\frac{\pi^2}{4}$ **4.** (i) $\frac{\pi^2}{2ab}$ (ii) $\frac{\pi}{2ab}$ **5.** 0 **6.** 0 **7.** 0

8. (i) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$ (ii) $-\frac{\pi^2}{2}\log 2$ **9.** $\frac{\pi\alpha}{\sin\alpha}$ **10.** $\frac{\pi}{4}$ **11.** $-\pi \log_e 2$

12. $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ **13.** $\frac{\pi}{8}\log_e 2$ **14.** (i) $\frac{16}{35}$ (ii) $\frac{16}{35}$ (iii) $\frac{3\pi}{8}$ (iv) $\frac{16}{15}$

15. $\frac{8}{315}$ **16.** $\frac{\pi}{2}$ **17.** $\frac{8}{693}$ **18.** $\frac{3\pi^2}{512}$ **19.** $\frac{\pi^2}{32}$ **20.** (i) $\frac{16}{35}$ (ii) $\frac{16}{35}$ (iii) $\frac{35\pi}{256}$

21. $\frac{8}{315}$ **22.** $\frac{\pi}{2}$ **23.** $\frac{8}{693}$ **24.** 3π **25.** $\frac{35\pi}{368}$ **26.** $\frac{64}{35}$ **27.** $\frac{8}{5}$

28. (i) $\frac{2}{3}(3^{3/2}-2^{3/2})$ (ii) 1 (iii) 2 (iv) $\frac{\pi}{4}$ (v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $1-\frac{\pi}{4}$ (vii) $e-1$
(viii) 1 (ix) $\frac{\pi}{4}$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (c) **2.** (a) **3.** (c) **4.** (c) **5.** (c) **6.** (b) **7.** (c) **8.** (a)

अध्याय

10

निश्चित समाकलन के अनुप्रयोग (Applications of Definite Integration)

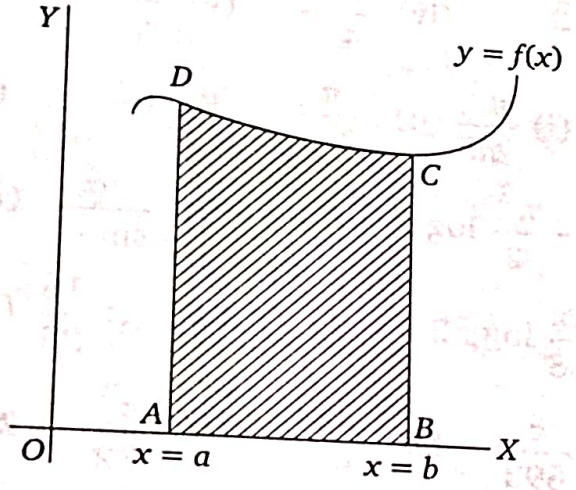
10.1 परिचय (Introduction)

निश्चित समाकलन का प्रयोग विज्ञान एवं अभियांत्रिकी समस्याओं के हल में व्यापक रूप में किया जाता है। इस अध्याय में हम इसके प्रयोग से वक्रों की लम्बाई (Length of Curves), समतलीय वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल (Area under Plane Curves) तथा परिभ्रमण ठोसों के आयतन (Volume of solid of revolution) ज्ञात करना सीखेंगे।

10.2 निश्चित समाकलन से क्षेत्रफल ज्ञात करना

वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = a$ और $x = b$ से घिरा हुआ क्षेत्र $ABCD$ का क्षेत्रफल निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं :

$$A = \int_{x=a}^{x=b} y\,dx$$



बाँये सिरे A पर x का मान $(x = a)$ समाकलन की निम्न सीमा तथा दाँये सिरे B पर x का मान $(x = b)$ समाकलन की उच्च सीमा मानी जाती है।

इसी प्रकार $x = f(y)$ वक्र द्वारा y-अक्ष तथा रेखाओं $y = a$ व $y = b$ से घिरा क्षेत्रफल निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं :

$$A = \int_{y=a}^{y=b} x\,dy$$

इस दशा में समाकलन की सीमायें नीचे से ऊपर की ओर ली जाती हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदा 1. वक्र $y = mx$, x-अक्ष तथा कोटि $x = 2$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट क्षेत्रफल OAB

$$= \int_0^2 y\,dx$$

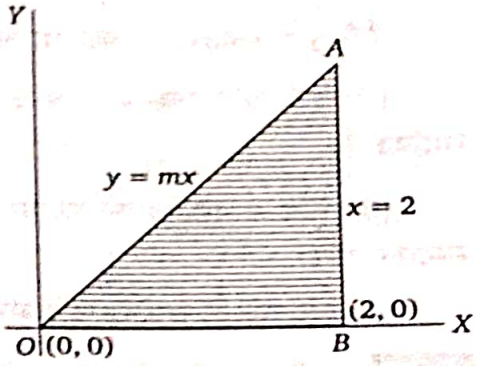
$$= \int_0^2 m x\,dx$$

$$= m\int_0^2 x^1\,dx$$

$$= m\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^2 \qquad \left[\because \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$= \frac{m}{2}(2^2 - 0)$$

$= 2m$ वर्ग इकाई।



उत्तर

उदाहरण 2. वक्र $y = x\sin x$ तथा x-अक्ष व $x = 0$, $x = 2\pi$ से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{x=0}^{x=2\pi} y\,dx$

$$= \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

$$= \{x(-\cos x)\}_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1.(-\cos x)\,dx \qquad \text{[खण्डशः समाकलन के सूत्र से]}$$

$$= (-2\pi\cos 2\pi - 0) + \int_0^{2\pi} \cos x\,dx = -2\pi + (\sin x)_0^{2\pi} \qquad [\because \cos 2\pi = 1]$$

$$= -2\pi + (\sin 2\pi - \sin 0)$$

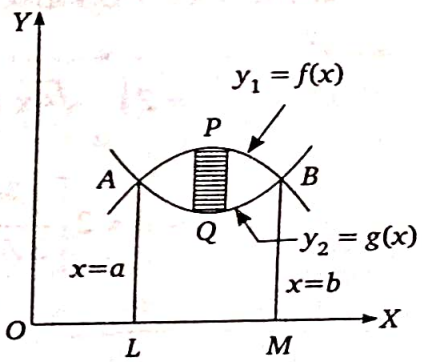
$= -2\pi = 2\pi$ वर्ग इकाई

10.3 दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल (Area Included Between Two Curves)

माना $y_1 = f(x)$ तथा $y_2 = g(x)$ दो वक्र हैं जो बिन्दुओं $x = a$ तथा $x = b$ पर एक-दूसरे को काटते हैं। उनके बीच घिरा हुआ क्षेत्र $APBA$ है। माना A तथा B से x-अक्ष पर लम्ब क्रमशः AL तथा BM खींचें गए हैं।

क्षेत्रफल $APBQA$ = क्षेत्रफल $APBML$ − क्षेत्रफल $AQBML$

अर्थात् $$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$



इसी तरह वक्र $x_1 = f_1(y)$

तथा $x_2 = g_1(y)$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$\boxed{A = \int_c^d \{f_1(y) - g_1(y)\}\,dy}$$

जहाँ वक्र एक दूसरे को $y = c$ तथा $y = d$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

10.4 वक्रों का चित्रण (Tracing of Curves)

समाकलन द्वारा क्षेत्रफल निकालने के लिए हमें समकालन की सीमाओं का ज्ञान होना आवश्यक है। यह तभी सम्भव है जब हमें वक्रों की आकृति का अनुमान हो। अतः इस सम्बन्ध में कुछ बिन्दु नीचे दिए जा रहे हैं—

(1) यदि वक्र के समीकरण में y की जगह $-y$ रखने से फलन के मान में परिवर्तन नहीं हो, तो यह x-अक्ष के परितः सममित होगा। यह तभी सम्भव है जब y की घात सम हो।

जैसे $y^2 = 4ax$, x-अक्ष के परित: सममित है।

(2) इसी तरह वक्र y-अक्ष के परित: सममित होगा यदि x की घात सम हो। जैसे $x^2 = 4ay$, y-अक्ष के ... सममित है।

(3) यदि x तथा y को परस्पर प्रतिस्थापित करने पर फलन के मान में परिवर्तन नहीं हो तो वक्र $y = x$ के ... सममित होगा।

(4) यदि वक्र के समीकरण में अचर पद न हो तो वक्र मूल बिन्दु से गुजरेगा। जैसे $y = mx$ मूल बिन्दु से गुजरता है।

10.5 अक्षों पर प्रतिच्छेद बिन्दु निकालना (To obtain intersecting points of a curve with the axis)

वक्र के समीकरण में $y = 0$ रखने पर इसके द्वारा x-अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु का x-नियामक प्राप्त होगा। ... तरह समीकरण में $x = 0$ रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु का y-नियामक प्राप्त होगा।

जैसे, $x^2 + y^2 = a^2$ में $y = 0$ रखने से $x = \pm a$ तथा $y = 0$ रखने से $y = \pm a$

अत: x-अक्ष पर वक्र के प्रतिच्छेद बिन्दु के नियामक $(a, 0)$ तथा $(-a, 0)$ हैं एवं y-अक्ष पर $(0, a)$ तथा $(0, -a)$ हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. परवलय $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $x = 4$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल : $y^2 = 4x$ एक परवलय है, जो x-अक्ष के परित: सममित है तथा जिसका शीर्ष $O(0, 0)$ है, जैसा चित्र में दिखाया गया है।

माना सरल रेखा AB, $x = 4$ द्वारा दी जाती है। हमें $y^2 = 4x$, तथा $x = 0$, $x = 4$ से घिरे क्षेत्र $OASBO$ का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। चित्र से

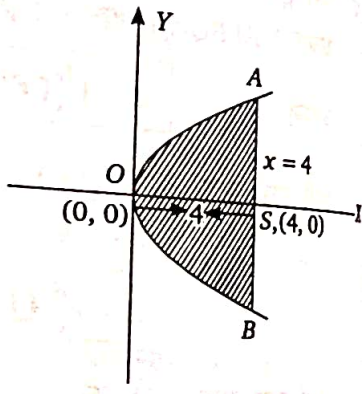
अभीष्ट क्षेत्रफल $OASBO = 2 \times$ क्षेत्रफल $OASO = 2\int_0^4 y\,dx$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{4x}\,dx = 2 \times 2\int_0^4 x^{1/2}\,dx$$

$$= 2 \times 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \frac{8}{3}[4^{3/2} - 0] = \frac{8}{3} \times (2^2)^{3/2}$$

$$= \frac{8}{3} \times 2^3 = \frac{8 \times 8}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= \frac{64}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$



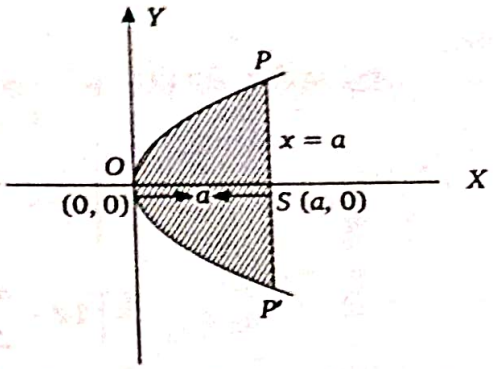
उदाहरण 2. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा इसके नाभिलम्ब के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

हल : $\because y^2 = 4ax \Rightarrow y = 2\sqrt{a}x^{1/2}$

यह परवलय x-अक्ष के परित: सममित है तथा शीर्ष A के नियामक $(0, 0)$ हैं। मान PSP' इसका नाभिलम्ब है जिसका समीकरण $x = a$ है।

अब अभीष्ट क्षेत्रफल $POP' = 2 \times$ क्षेत्रफल $POS = 2\int_0^a y\,dx$



$$= 2\int_0^a (2\sqrt{a}\, x^{1/2})\,dx$$

$$= 2 \times 2\sqrt{a}\int_0^a x^{1/2}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a} \times \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^a$$

$$= 4a^{1/2} \times [a^{3/2} - 0] \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$ **उत्तर**

उदाहरण 3. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल निकालें।

हल : स्पष्ट है कि दीर्घवृत्त दोनों ही अक्षों के परितः सममित है। [∵ x तथा y दोनों के घात सम हैं]

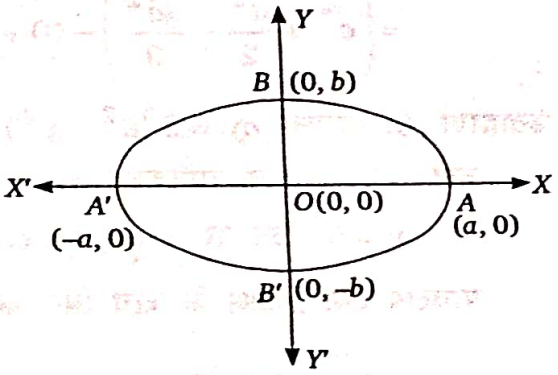
अतः दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल $= 4 \times$ क्षेत्रफल OAB

अब $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ...(1)

(1) में अब $y = 0$ रखने से $x = \pm a$

अतः वक्र x-अक्ष को $(a, 0)$ तथा $(-a, 0)$ पर काटता है।



$$\therefore \quad \text{क्षेत्रफल} = 4 \times \int_0^a y\,dx = 4 \times \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 4 \times \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 4 \times \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

[सूत्र से]

$$= \frac{4b}{a} \times \frac{1}{2}[\{a \times 0 + a^2 \sin^{-1} 1\} - \{0 - 0\}] = \frac{4b}{a} \times \frac{1}{2}a^2 \times \sin^{-1} 1 = 2ab \times \frac{\pi}{2}$$

$= \pi ab \qquad [\because \sin^{-1} 1 = \pi/2]$ **उत्तर**

उदाहरण 4. परवलय $y = 6 - x - x^2$ तथा x-अक्ष के बीच घिरे स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

यहाँ $y = 6 - x - x^2$, ∵ x-अक्ष पर $y = 0$

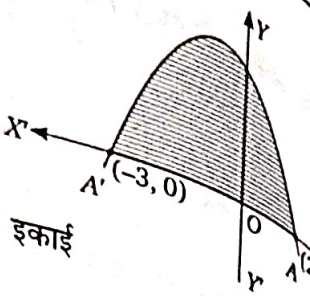
$\therefore \quad 0 = 6 - x - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ या $x = -3$

$\Rightarrow$ वक्र x-अक्ष को $x = -3$ तथा $x = 2$ बिन्दुओं पर काटता है।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{-3}^{2} y\,dx = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx$

$$= \left| 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^{2}$$

$$= \left(12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ वर्ग इकाई}$$



उदाहरण 5. वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ और अक्षों से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र के समीकरण $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ में $y = 0$ रखने पर $x = a$

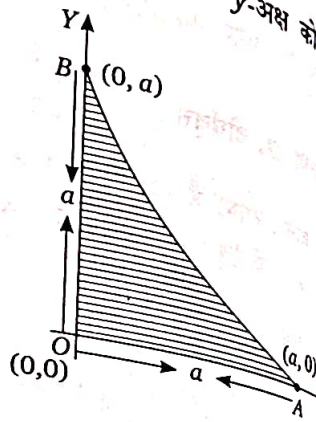
अतः वक्र x-अक्ष को बिन्दु $A(a, 0)$ पर काटता है। $x = 0$ रखने पर, $y = a$ अतः वक्र y-अक्ष को बिन्दु $B(0, a)$ पर काटता है।

अभीष्ट क्षेत्रफल $AOB = \int_0^a y\,dx = \int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx$

$$= \int_0^a (a + x - 2\sqrt{a}\,\sqrt{x})\,dx \qquad [\because \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}]$$

$$= \left[ax + \frac{x^2}{2} - \frac{2a^{1/2}\,x^{3/2}}{3/2} \right]_0^a$$

$$= \left(a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{3} \right) - (0 + 0 - 0) = \frac{a^2}{6}$$



उदाहरण 6. परवलय $ay = 3(a^2 - x^2)$ तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल : परवलय के समीकरण $ay = 3(a^2 - x^2)$ में

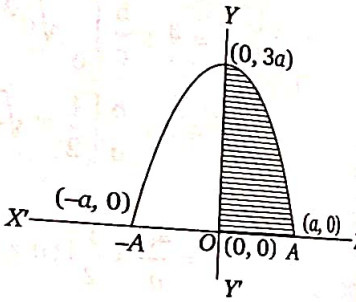
$y = 0$ रखने पर $x = \pm a$; $x = 0$ रखने पर $y = 3a$

परवलय तथा x-अक्ष के बीच घिरा क्षेत्रफल

$$= 2\int_0^a y \,.\, dx = 2\int_0^a \frac{3}{a}(a^2 - x^2)\,.\,dx$$

$$= \frac{6}{a}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{6}{a}\left[a^3 - \frac{a^3}{3} - 0 + 0 \right]$$

$$= \frac{6}{a} \times \frac{2a^3}{3} = 4a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$



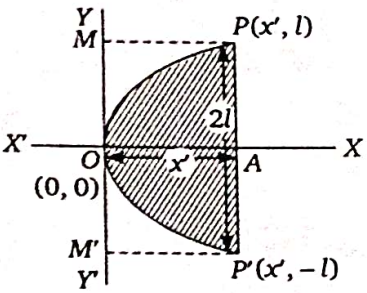
उदाहरण 7. सिद्ध करो कि किसी परवलय में शीर्ष की स्पर्श रेखा के समानान्तर रेखा (द्विकोटि) द्वारा काटे गये हिस्से का क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल का दो-तिहाई होता है जिसकी दो भुजायें क्रमशः रेखा की लम्बाई एवं रेखा की शीर्ष से दूरी के बराबर होती हैं।

हल : माना परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(i)

माना परवलय की द्विकोटि PAP' है जिसकी लम्बाई $2l$ है तथा जो परवलय के शीर्ष से x' दूरी पर है। अत: द्विकोटि के शीर्ष $P(x', l)$ तथा $P'(x', -l)$ तथा परवलय का शीर्ष $(0, 0)$ है।

(i) में $x = x'$ तथा $y = l$ रखने पर

$$l^2 = 4a \cdot x' \Rightarrow x' = \frac{l^2}{4a}$$



अभीष्ट क्षेत्रफल $OPAP'O = A_1 = 2 \times$ क्षेत्रफल OAP

क्षेत्रफल $A_1 = 2\int_0^{x'} y \cdot dx = 2\int_0^{l^2/4a} 2\sqrt{ax}\, dx$

$$= 4\sqrt{a}\int_0^{l^2/4a} x^{1/2}\, dx = 4\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{l^2/4a} = \frac{8}{3}\sqrt{a}\left[\left(\frac{l^2}{4a}\right)^{3/2} - (0)\right] = \frac{8}{3}\sqrt{a} \cdot \frac{l^3}{8a\sqrt{a}} = \frac{l^3}{3a} \quad ...(ii)$$

अब द्विकोटि PAP' तथा इसकी शीर्ष से दूरी OA द्वारा बने आयत $PMM'P'$ का क्षेत्रफल,

$$A_2 = PP' \times PM = 2l \cdot x' = 2l \cdot \frac{l^2}{4a} = \frac{l^3}{2a} \quad ...(iii)$$

समीकरण (ii) तथा (iii) से

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{l^3/3a}{l^3/2a} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3}A_2$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 8. वक्रों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वक्रों के समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(i)

तथा $x^2 = 4ay$ ...(ii)

समी० (i) से, $x = \frac{y^2}{4a}$ समी० (ii) में रखने पर

$$\left(\frac{y^2}{4a}\right)^2 = 4ay \quad \text{या} \quad y^4 = 64a^3y \quad \text{या} \quad y^4 - 64a^3y = 0$$

या $y(y^3 - 64a^3) = 0 \Rightarrow y = 0, 4a$

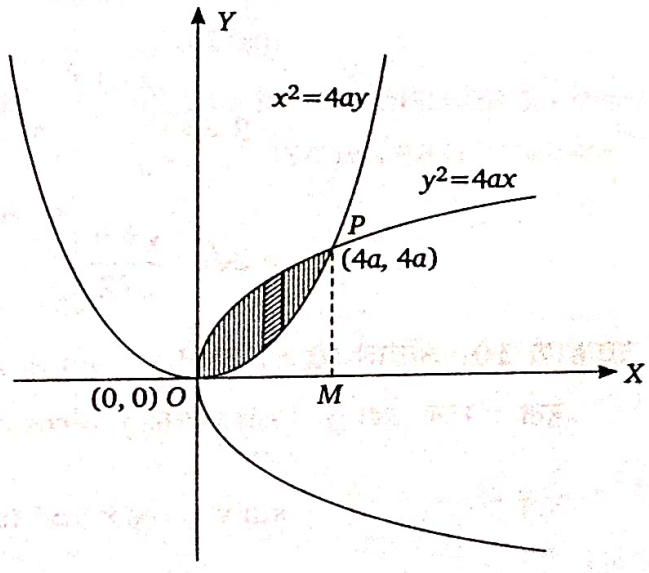
y के उक्त मान समी० (i) में रखने पर,

जब $y = 0$, तब $x = 0$

और जब $y = 4a$, तब $x = 4a$

∴ वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु $O(0, 0)$ और $P(4a, 4a)$ हैं।

यहाँ हमें रेखांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।



$$\left[\because y^2 = 4ax \Rightarrow y = \sqrt{4ax} = y_1 \text{ (माना)}, \quad x^2 = 4ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{4a} = y_2 \text{ (माना)}\right]$$

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{4a} (y_1 - y_2)\, dx$

$$= \int_0^{4a} \sqrt{4ax}\, dx - \int_0^{4a} \left(\frac{x^2}{4a}\right) dx$$

$$= 2\sqrt{a} \int_0^{4a} x^{1/2}\, dx - \frac{1}{4a} \int_0^{4a} x^2\, dx$$

$$= 2\sqrt{a} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{4a} - \frac{1}{4a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a} \cdot [(4a)^{3/2} - 0] - \frac{1}{12a}[(4a)^3 - 0]$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a} \cdot (8a\sqrt{a}) - \frac{1}{12a} \cdot (64a^3) = \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}.$$

उदाहरण 9. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा सरल रेखा $y = mx$ के अन्तर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

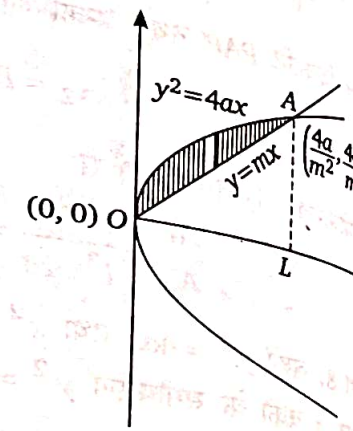
हल : परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(1)

तथा सरल रेखा का समीकरण $y = mx$ ...(2)

समीकरण (2) से $y = mx$ समीकरण (1) में रखने पर

$$(mx)^2 = 4ax \Rightarrow x(m^2x - 4a) = 0$$

$\therefore$ $x = 0$ या $x = \frac{4a}{m^2}$



पुनः जब $x = 0$ तो $y = 0$ तथा जब $x = \frac{4a}{m^2}$ तो $y = \frac{4a}{m}$

अतः उभयनिष्ठ बिन्दुओं के निर्देशांक $(0, 0)$ तथा $\left(\frac{4a}{m^2}, \frac{4a}{m}\right)$ हैं।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{4a/m^2} (y_1 - y_2)\, dx$

$$= \int_0^{4a/m^2} (\sqrt{4ax} - mx)\, dx \qquad \begin{bmatrix} \text{(i) से } y = \sqrt{4ax} = y_1 \text{ (माना)} \\ \text{(ii) से } y = mx = y_2 \text{ (माना)} \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{a} \int_0^{4a/m^2} x^{1/2}\, dx - \int_0^{4a/m^2} mx\, dx$$

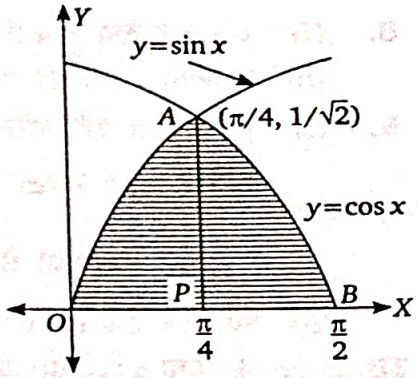
$$= 2\sqrt{a} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{4a/m^2} - m\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4a/m^2} = \frac{8}{3}\frac{a^2}{m^3} \text{ (सरल करने पर)}$$

उदाहरण 10. अंतराल $(0, \pi/2)$ में $y = \sin x$, $y = \cos x$ तथा x-अक्ष के बीच घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना वक्र $y = \sin x$ तथा $y = \cos x$ अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में एक-दूसरे को A बिन्दु पर काटते हैं।

यहाँ $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अतः बिन्दु A पर $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (समीकरणों को हल करने पर)



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल OAP + क्षेत्रफल APB

$$= \int_0^{\pi/4} \sin x\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\, dx$$

$$= -|\cos x|_0^{\pi/4} + |\sin x|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}} + 2 = (2 - \sqrt{2}) \text{ वर्ग इकाई}$$

महत्वपूर्ण सूत्र

1. वक्र $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $A = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$
2. वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष या कोटियों, $y = c$ तथा $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $A = \int_c^d x\, dy = \int_c^d f(y)\, dy$
3. (i) दो वक्रों $y_1 = f(x)$ तथा $y_2 = g(x)$ तथा $x = a$ एवं $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$, जहाँ a तथा b प्रतिच्छेद बिन्दु के x नियामक हैं।

   (ii) इसी तरह वक्र $x_1 = f_1(y)$, $x_2 = g_1(y)$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $A = \int_c^d \{f_1(y) - g_1(y)\}\, dy$

   जहाँ $y = c$ या $y = d$ प्रतिच्छेद बिन्दु की कोटियाँ हैं।

प्रश्नावली 10.1

1. सरल रेखा $2y - 7 = 5x$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 2$ व $x = 8$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. सरल रेखा $2y = 8 - x$, x-अक्ष तथा $x = 2$ व $x = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. परवलय $y^2 = 9x$, $x = 2$, $x = 4$ व x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. (i) (a) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल समाकलन विधि से निकालें। **[उ०प्र० डिप्लोमा 2018(SB),18(S)]**

   (b) वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ का क्षेत्रफल समाकलन विधि से निकालें। **[उ०प्र० डिप्लोमा 2019(S)]**

   (ii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

   (iii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल निकालें।
5. प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ तथा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।
6. $y = \cos x$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = 0$ तथा $x = \frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।
7. $y = x^2$ के शीर्ष तथा नाभिलम्ब जीवा के बीच क्षेत्रफल ज्ञात करें।

[संकेत : नाभि के निर्देशांक $= \left(0, \frac{1}{4}\right)$, शीर्ष के निर्देशांक $= (0, 0)$ ∴ क्षेत्रफल $= 2\int_0^{1/4} x\,dy$]

8. (i) $y = x^2$ तथा $y = 2$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
(ii) परवलय $y^2 = 8x$ तथा रेखा $x = 2$ से घिरे हुये भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

9. (i) $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = 2ax$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 202

[संकेत : $y^2 = 4ax$ तथा $y = 2ax$ को हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु $(0, 0)$ तथा $\left(\frac{1}{a}, 2\right)$ हैं।]

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल $A = \int_0^{1/a} (\sqrt{4ax} - 2ax)$]

(ii) वक्र $y = 2 + x - x^2$ तथा x-अक्ष द्वारा घिरे हुये भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

10. $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4y$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।

11. किसी परवलय $y^2 = 4ax$ के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जो जीवा $y = 2a$ तथा y-अक्ष के बीच परिब

12. वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ तथा परवलय $y^2 = x$ के बीच परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

13. (i) परवलय $y = 4x^2$ और रेखा $4x - y + 3 = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बतायें।
(ii) परवलय $y = 2x^2$ और सरल रेखा $x - y + 3 = 0$ से मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. परवलय $y^2 = 9x$ तथा $x^2 = 9y$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बतायें।

उत्तरमाला

1. 96 वर्ग इकाई **2.** 5 वर्ग इकाई **3.** $4(4 - \sqrt{2})$ वर्ग इकाई

4. (i) (a) πa^2 वर्ग इकाई (b) 16π वर्ग इकाई (ii) 6π वर्ग इकाई (iii) πab

5. $\frac{7}{3}$ वर्ग इकाई **6.** 1 वर्ग इकाई **7.** $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई

8. (i) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ वर्ग इकाई (ii) $\frac{32}{3}$ वर्ग इकाई

9. (i) $\frac{1}{3a}$ वर्ग इकाई (ii) $4\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई **10.** $\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई **11.** $\frac{2a^2}{3}$ वर्ग इकाई

12. $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ वर्ग इकाई **13.** (i) $5\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई (ii) $5\frac{5}{24}$ वर्ग इकाई

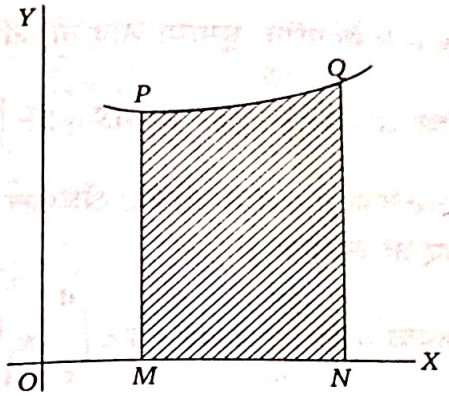
14. 27 वर्ग इकाई

समाकलन द्वारा आयतन एवं वक्रपृष्ठ
(Volume and Surface Area by Integration)

10.6 ठोसों का आयतन (Volume of Solids)

● परिक्रमण द्वारा जनित ठोस का आयतन एवं पृष्ठ

माना PQ, किसी वक्र का एक चाप है और OX एक स्थिर ऋजु रेखा है। P और Q से OX पर PM तथा QN डाले। इस प्रकार हमें चाप PQ तथा रेखाओं PM, QN और MN से घिरा हुआ क्षेत्र $PMNQ$ प्राप्त होता है। इस रेखा OX के परित: परिक्रमण (Revolution) करने पर एक ठोस प्राप्त होता है, जिसे परिक्रमण ठोस (Solid of Revolution) कहते हैं।



स्थिर रेखा OX को, जिसके परित: वक्र परिक्रमण करता है, परिक्रमण अक्ष (Axis of revolution) कहते हैं और जिस वक्र रूप द्वारा परिक्रमण किया जाता है, उसे जनन वक्र (Generating curve) कहते हैं।

व्यावहारिक जीवन में प्रयोग किए जाने वाले कुछ परिक्रमण ठोस निम्नांकित हैं—

1. गोला (Sphere) : गोला किसी अर्द्धवृत्त को उसके व्यास के परित: घुमाने से जनित होता है। अत: अर्द्धवृत्त (या वृत्त) गोले का जनन वक्र है तथा व्यास उसका परिभ्रमण अक्ष है।

2. शंकु (Cone): यदि किसी समकोण त्रिभुज को उसकी समकोण बनाने वाली भुजाओं में से किसी एक भुजा को अक्ष मानकर उसके चारों ओर घुमाया जाए तो उसके घूर्णन से जब वह एक चक्कर पूरा कर लेता है, जनित ठोस को शंकु (Cone) कहते हैं। अत: शंकु के लिए जनन रेखा एक सरल रेखा होती है, जो परिभ्रमण अक्ष (दूसरी सरल रेखा) को एक निश्चित कोण पर काटती है। इसे शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण (Semi-vertical angle) कहते हैं। जनन वक्र तथा परिक्रमण अक्ष का परिच्छेद बिन्दु उसका शीर्ष कहलाता है।

3. बेलन (Cylinder) : यदि किसी आयत को उसकी एक भुजा को अक्ष मानकर उसके परित: घुमाया जाए, तो घूर्णन से, जब एक चक्कर पूर्ण हो जाता है, जनित ठोस को बेलन कहते हैं। अत: बेलन का जनन रेखा एक सरल रेखा तथा परिक्रमण अक्ष उसके समानान्तर एक निश्चित दूरी पर दूसरी सरल रेखा होगी।

4. शंकु का छिन्नक (Frustum of a Cone) : किसी शंकु को आधार के समानान्तर किसी समतल से काटने पर आधार तथा समतल के बीच कटे भाग को शंकु का छिन्नक कहा जाता है।

(a) गोले का छिन्नक (Frustum of a Sphere) : दो समानान्तर समतलों से कटे हुए गोले का भाग गोले का छिन्नक कहलाता है।

(b) गोलीय खण्ड (Spherical Segment) : किसी समतल द्वारा गोले का कटा हुआ भाग गोलीय खण्ड कहलाता है।

10.7 आयतन तथा वक्रपृष्ठ (Volume and Surface Area)

(A) यदि $y = f(x)$, x-अक्ष, $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्रफल को

(i) x-अक्ष के परित: घुमाया जाए तो जनित ठोस का आयतन

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

तथा वक्रपृष्ठ $S = 2\pi \int_a^b y \, dS = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$

(ii) x-अक्ष के समानान्तर रेखा $y = k$ के परितः घुमाया जाए तो जनित ठोस का आयतन

$$V = \pi\int_a^b (y-k)^2\,dx \text{ तथा } S = 2\pi\int_a^b (y-k)\,dS = 2\pi\int_a^b (y-k)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

(B) यदि वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष, $y = c$ तथा $y = d$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को

(i) y-अक्ष के परितः घुमाया जाए तो आयतन

$$V = \pi\int_c^d x^2\,dy \text{ तथा वक्रपृष्ठ} = 2\pi\int_c^d x\,dS = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

(ii) y-अक्ष के समानान्तर रेखा $x = h$ के परितः घुमाया जाए तो आयतन $V = \pi\int_c^d (x-h)^2\,dy$

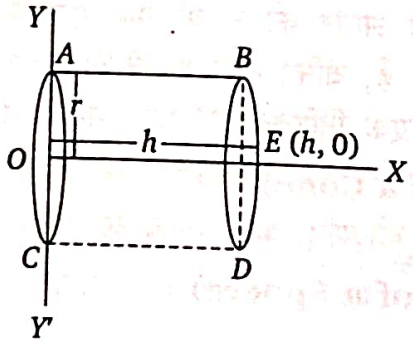
तथा वक्रपृष्ठ $S = 2\pi\int (x-h)\,dS = 2\pi\int_c^d (x-h)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

10.8 बेलन, शंकु एवं गोले के आयतन (Volume and Surface of a Cylinder, Cone and Sphere)

बेलन का आयतन तथा वक्र पृष्ठ (Volume and Surface Area of Cylinder) :

माना, बेलन की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है।

माना एक आयत $ABEO$ है, जिसमें $AB = EO = h$ तथा $OA = EB = r$.



भुजा AB को x-अक्ष के परितः घुमाने पर हमें अभीष्ट बेलन $ABDC$ प्राप्त होता है।

जनन रेखा AB का समीकरण $y = r$ ...(1)

अतः आयतन $V = \int_0^h \pi y^2 dx$ [∵ 0 पर $x = 0$ तथा E पर $x = h$]

$= \pi\int_0^h r^2\,dx$ [∵ $y = r$ समीकरण (1) से]

$= \pi r^2\int_0^h 1\,dx$

$= \pi r^2 (x)_0^h$

$\boxed{V = \pi r^2 h}$

...न का वक्र पृष्ठ :

$$S = \int_0^h 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^h r\sqrt{1+0}\, dx \qquad \left[\because y = r \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0\right]$$

$$= 2\pi r \int_0^h 1\, dx$$

$$= 2\pi r (x)_0^h$$

$$\boxed{S = 2\pi rh}$$

शंकु का आयतन तथा वक्र पृष्ठ (Volume and Surface Area of Cone) :

माना, शंकु की ऊँचाई h तथा आधार की त्रिज्या r है।

माना, एक समकोण त्रिभुज OBA है, जहाँ $OB = h$, $AB = r$

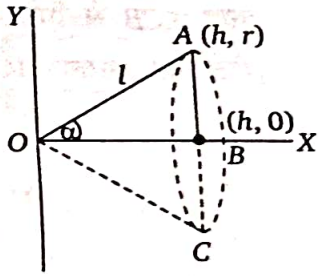
माना $\angle AOB = \alpha$

$$\Delta ABO \text{ में, } \tan\alpha = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{r}{h} \qquad ...(1)$$

तथा कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$$OA^2 = r^2 + h^2$$

$$OA = \sqrt{r^2+h^2} = l \qquad \text{(तिर्यक ऊँचाई)}$$



रेखा OA को x-अक्ष के परित: घुमाने पर अभीष्ट शंकु OAC प्राप्त होता है।

जनन रेखा OA का समीकरण $y = mx$

$$y = \tan\alpha . x$$

$\Rightarrow$

$$y = \frac{r}{h}x \qquad \text{(समीकरण (1) के प्रयोग से)} \qquad ...(2)$$

शंकु का आयतन $= \int_{x=0}^h \pi y^2 dx$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \qquad \text{(समीकरण (2) के प्रयोग से)}$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\, dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

शंकु का वक्र पृष्ठ $S = \int_0^h 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$$= 2\pi \int_0^h \frac{rx}{h}\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\, dx \qquad \left[\because y = \frac{rx}{h} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{r}{h}\right]$$

$$= \frac{2\pi r}{h}\int_0^y x\sqrt{\frac{h^2+r^2}{h^2}}\,dx$$

$$= \frac{2\pi r}{h}\int_0^h \frac{x.l}{h}\,dx$$

$$= \frac{2\pi rl}{h}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^h \qquad [\because \sqrt{r^2+h^2} = l]$$

$$= \frac{\pi rl}{h^2}h^2 = \pi rl$$

$\therefore$ $\boxed{S = \pi rl}$

● गोले का आयतन तथा वक्र पृष्ठ (Volume and Surface Area of Sphere) :

माना, गोले की त्रिज्या r है। मूलबिन्दु O को केन्द्र मानकर r त्रिज्या का एक वृत्त खींचा जो x-अक्ष को बिन्दुओं A तथा B पर तथा y-अक्ष को बिन्दुओं C और D पर काटता है।

r त्रिज्या के वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 = r^2$$

चाप ACB से घिरे अर्द्धवृत्त के क्षेत्र को x-अक्ष के परितः घुमाने पर हमें अभीष्ट गोला प्राप्त होता है।

गोले का आयतन $V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx$ ...(1)

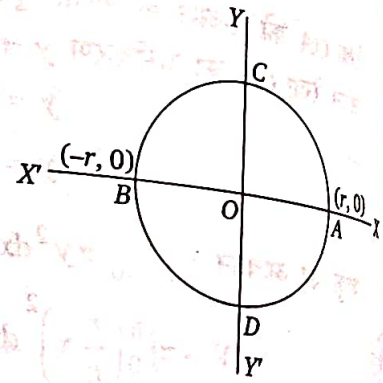
$$= \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{[समीकरण (1) के प्रयोग से]}$$

$$= \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right]$$

$$= \pi\left[2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right]$$

$$V = \pi\left(\frac{4}{3}r^3\right)$$



$\therefore$ आयतन $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

गोले का वक्र पृष्ठ

$$S = \int_{-r}^{r} 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx$$

$[\because x^2 + y^2 = r^2, x$ के सापेक्ष अवकलन से, $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}]$

$$= 2\pi\int_{-r}^{r} \frac{y\sqrt{y^2+x^2}}{y}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2}\,dx \qquad [\because\ x^2+y^2=r^2]$$

$$= 2\pi r(x)_{-r}^{r}$$

$$= 2\pi r\,(r+r) = 2\pi r \times 2r$$

$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

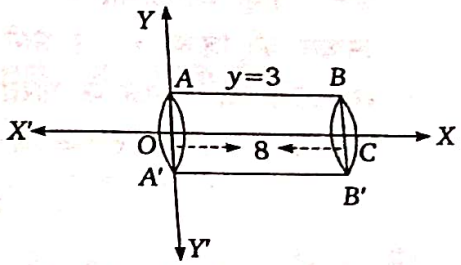
साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक बेलन की ऊँचाई 8 सेमी तथा सिरे की त्रिज्या 3 सेमी है। निश्चित समाकल द्वारा उसका आयतन और वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : माना $AA'BB'$ अभीष्ट बेलन है, जो जनन रेखा AB को X-अक्ष के परित: घुमाने से प्राप्त होता है। माना मूलबिन्दु $O\,(0,0)$ है।

यहाँ त्रिज्या $OA = CB = 3$ सेमी; ऊँचाई $OC = 8$ सेमी

तथा जनन रेखा AB का समीकरण $y = 3$



$$\therefore \quad \text{अभीष्ट आयतन} = \pi\int_0^8 y^2\,dx = \pi\int_0^8 (3)^2\,dx = \pi\times 9\int_0^8 dx$$

$$= \pi\times 9\,[x]_0^8 = \pi\times 9\,(8-0) = 72\pi \text{ घन सेमी}$$

पुन: $\because \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट वक्रपृष्ठ} = 2\pi\int_0^8 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^8 3\times 1\,dx = 6\pi\int_0^8 dx$$

$$= 6\pi\,[x]_0^8 = 6\pi\,[8-0] = 48\pi \text{ वर्ग सेमी}$$

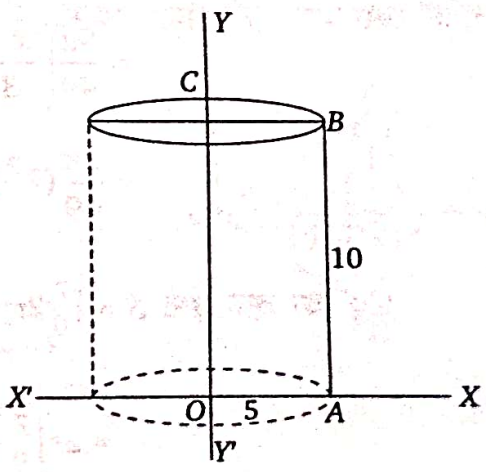
उदाहरण 2. एक आयत जिसकी लम्बाई 10 सेमी और चौड़ाई 5 सेमी है, अपनी लम्बी भुजा जो y-अक्ष के अनुदिश है, के परित: घूमता है। इस प्रकार जनित ठोस का आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात करो।

हल : माना आयत $OABC$ है,

जिसमें, $OA = 5$ सेमी

$AB = 10$ सेमी

भुजा AB (लम्बी भुजा) को y-अक्ष के परित: घुमाने पर अभीष्ट बेलन बनता है।



जनन रेखा AB का समीकरण $x = 5$ ...(1)

$\therefore$ बेलन का आयतन $V = \int_{y=0}^{10} \pi x^2\,dy$

$$V = \pi\int_0^{10} 5^2\,dy \qquad [\because\ x = 5]$$

$$= 25\pi\int_0^{10} dy$$

$$= 25\pi (y)_0^{10}$$

$$V = 250\pi \text{ सेमी}^3$$

बेलन का वक्र पृष्ठ $S = \int_0^{10} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

$$= 2\pi \int_0^{10} 5\sqrt{1+0}\, dy$$

$$= 10\pi \int_0^{10} dy \qquad \left[\because x = 5 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 0\right]$$

$$= 10\pi (y)_0^{10}$$

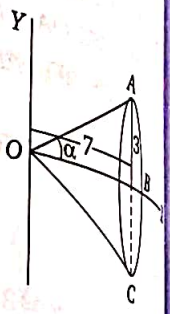
$$\boxed{S = 100\pi \text{ सेमी}^2}$$

उदाहरण 3. एक सम शंकु की ऊँचाई 7 सेमी एवं आधार की त्रिज्या 3 सेमी है। निश्चित समाकलन द्वारा उसका वक्र पृ
आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : शंकु की ऊँचाई $h = 7$ सेमी

आधार की त्रिज्या $r = 3$ सेमी

रेखा OA को x-अक्ष के परित: घुमाने पर अभीष्ट शंकु बनता है।



माना कर्ण OA का x-अक्ष से झुकाव α है, तो

$$\tan\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{3}{7}$$

जनन रेखा OA का समीकरण, $y = mx$

$\therefore \quad y = x\tan\alpha \qquad [\because \ m = \tan\alpha]$

$$y = \frac{3}{7}x \qquad \left[\because \tan a = \frac{3}{7}\right]$$

शंकु का आयतन $V = \int_0^7 \pi y^2 dx$

$$= \pi \int_0^7 \left(\frac{3}{7}x\right)^2 dx \qquad \text{[समीकरण (1) के प्रयोग से]}$$

$$= \frac{9\pi}{49}\int_0^7 x^2\, dx$$

$$= \frac{9\pi}{49}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^7$$

$$= \frac{3\pi}{49}(7^3) = 3\pi \times 7 = 21\pi \text{ सेमी}^3$$

शंकु का वक्र पृष्ठ $S = \int_0^7 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$$= 2\pi \int_0^7 \frac{3}{7}x \sqrt{1 + \left(\frac{3}{7}\right)^2}\, dx \qquad \left[\because y = \frac{3}{7}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} =\right.$$

$$= \frac{6\pi}{7}\int_0^7 x\sqrt{1+\frac{9}{49}}\,dx$$

$$= \frac{6\pi}{7}\frac{\sqrt{58}}{7}\int_0^7 x\,dx$$

$$= \frac{6\pi\sqrt{58}}{49}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^7$$

$$= \frac{3\pi\sqrt{58}}{49}.49$$

$$\boldsymbol{S = 3\pi\sqrt{58}\text{ सेमी}^2}$$ **उत्तर**

उदाहरण 4. बिन्दुओं (0, 0) तथा (4, 3) के बीच सीधी रेखा $4y = 3x$ के भाग को x-अक्ष के परित: घुमाया जाता हैं। जनित ठोस का वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा का समीकरण

$$4y = 3x \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) से निरूपित रेखा OA को x-अक्ष के परित: घुमाने पर अभीष्ट शंकु बनता है।

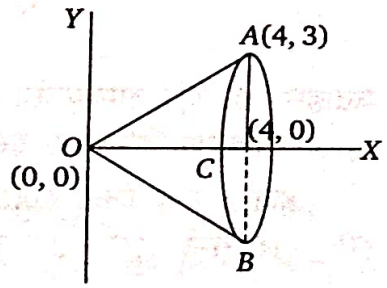
शंकु का वक्र पृष्ठ $S = \int_0^4 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$$= 2\pi\int_0^4 \frac{3}{4}x\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx \qquad \left[\because y = \frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\right]$$

$$= \frac{3\pi}{2}\int_0^4 x\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx$$

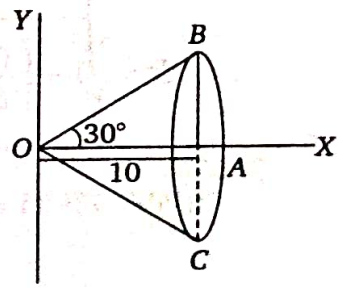
$$= \frac{5}{4}.\frac{3\pi}{2}\int_0^4 x\,dx$$

$$= \frac{15\pi}{8}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^4$$



$$= \frac{15\pi}{16}(16-0) = 15\pi \text{ वर्ग इकाई।}$$ **उत्तर**

उदाहरण 5. एक लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 10 सेमी तथा अर्द्धशीर्ष कोण 30° है। उसका आयतन एवं वक्र पृष्ठ निश्चित समाकलन द्वारा ज्ञात कीजिए।



हल : शंकु की ऊँचाई $h = 10$ सेमी

अर्द्धशीर्ष कोण $\alpha = 30°$

रेखा OB को x-अक्ष के परित: घुमाने पर अभीष्ट शंकु प्राप्त होता है।

रेखा OB का समीकरण $y = mx$

$\Rightarrow \quad y = \tan 30°\, x \qquad [\because m = \tan\alpha]$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \qquad \ldots(1)$

शंकु का आयतन $V = \int_0^{10} \pi y^2 dx$

$= \pi \int_0^{10} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x\right)^2 dx$ [समीकरण (1) के प्रयोग से]

$= \frac{\pi}{3} \int_0^{10} x^2 dx$

$= \frac{\pi}{3} \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{10}$

$= \frac{\pi}{9}(10^3) = \frac{1000}{9}\pi$ सेमी^{3} $\left[\because \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$

शंकु का वक्र पृष्ठ $S = \int_0^{10} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

$= 2\pi \int_0^{10} \frac{1}{\sqrt{3}} x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx$ $\left[\because y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{10} \sqrt{\frac{4}{3}} x \, dx$

$= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{10}$

$= \frac{2}{3}\pi(100) = \frac{200\pi}{3}$ सेमी^{2}

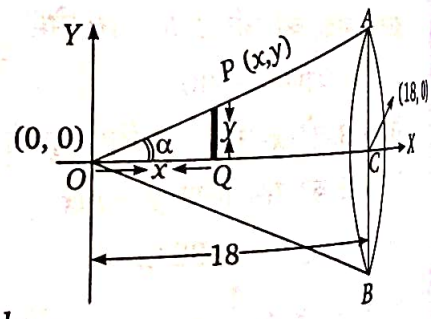
उदाहरण 6. एक लम्बवृत्तीय शंकु (Right Circular Cone) की ऊँचाई 18 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी है। समाकलन विधि द्वारा इसका आयतन एवं वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया OAB दिया हुआ एक शंकु है जो ΔOAC को x-अक्ष के परितः घुमाने से बनता है। यहाँ $OC = 18$ सेमी, $AC = 3.5$ सेमी है, अर्द्धशीर्ष कोण $= \alpha$, माना रेखा OA पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है, तो

रेखा OA का समीकरण $y = x \tan\alpha$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$

अब $\tan\alpha = \frac{3.5}{18} = \frac{7}{36}$

$\therefore$ $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{7 \times 7}{36 \times 36}} dx = \frac{\sqrt{1345}}{36} dx$



अभीष्ट आयतन $= \pi \int_0^{18} y^2 dx$

$= \pi \int_0^{18} x^2 \tan^2\alpha \, dx = \pi \tan^2\alpha \int_0^{18} x^2 dx$

$$= \pi \frac{7 \times 7}{36 \times 36} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{18} = 231 \text{ घन सेमी}$$ उत्तर

शंकु का वक्र पृष्ठ $S = 2\pi \int_0^{18} y \, ds = 2\pi \int_{x=0}^{18} x \tan a \times \frac{\sqrt{1345}}{36} \, dx$

$$= 2\pi \times \frac{\sqrt{1345}}{36} \times \frac{7}{36} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{18} = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{\sqrt{1345}}{36} \times \frac{7}{36} \times \frac{18 \times 18}{2}$$

$$= \frac{11}{2} \sqrt{1345} \text{ वर्ग इकाई}$$ उत्तर

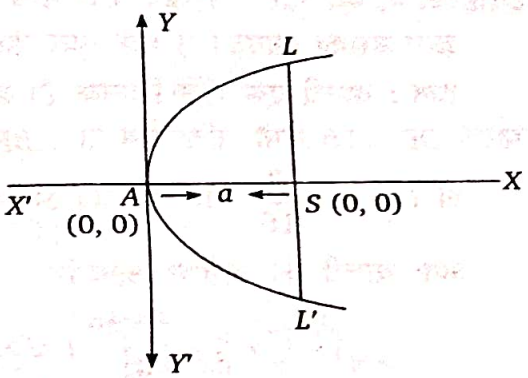
उदाहरण 7. परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष तथा नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्रफल को x-अक्ष के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन निकालें।

हल : वक्र का समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(1)

माना A परवलय का शीर्ष S नाभि है तथा नाभिलम्ब LSL' है।

ASL को X-अक्ष के परित: घूमाया गया है।

शीर्ष $A = (0, 0)$, नाभि $= S\ (a, 0)$



$\therefore$ अभीष्ट आयतन $= \pi \int_0^a y^2 \, dx$

$$= \pi \int_0^a 4a \, x \, dx = 4a\pi \int_0^a x \, dx$$

$$= 4a\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = 4a\pi \times \frac{1}{2}[a^2 - 0]$$

$$= 2a\pi \times a^2 = 2\pi a^3 \text{ घन इकाई}$$ उत्तर

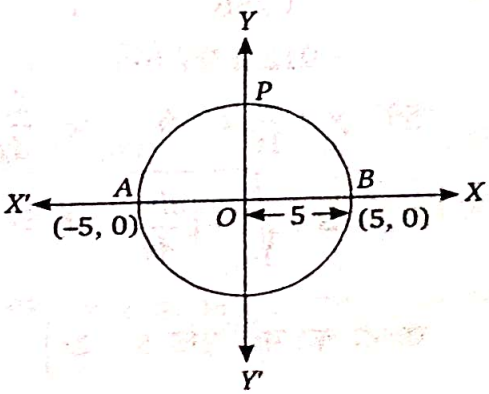
उदाहरण 8. उस गोले का आयतन और वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 5 सेमी है और जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है।

हल : मान लिया अर्द्धवृत्त APB को x-अक्ष के परित: घुमाने से गोला बनता है। माना अर्द्धवृत्त का केन्द्र O मूलबिन्दु है, तो वक्र का समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ [$\because$ त्रिज्या = 5] ...(i)

$\Rightarrow \quad y^2 = 25 - x^2$

$\Rightarrow \quad y = \sqrt{25 - x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 \times (-2x)}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$



$\Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{25 - x^2}$

$$= \frac{25 - x^2 + x^2}{25 - x^2} = \frac{25}{25 - x^2}$$ ...(ii)

$\therefore$ अब अभीष्ट आयतन $= \pi\int_{-5}^{5} y^2\,dx$

$$= 2\pi\int_{0}^{5} (25 - x^2)\,dx \qquad \text{[(i) से]}$$

$$= 2\pi \times \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_0^5$$

$$= 2\pi \times \left[(25 \times 5 - 0) - \left(\frac{125 - 0}{3}\right)\right]$$

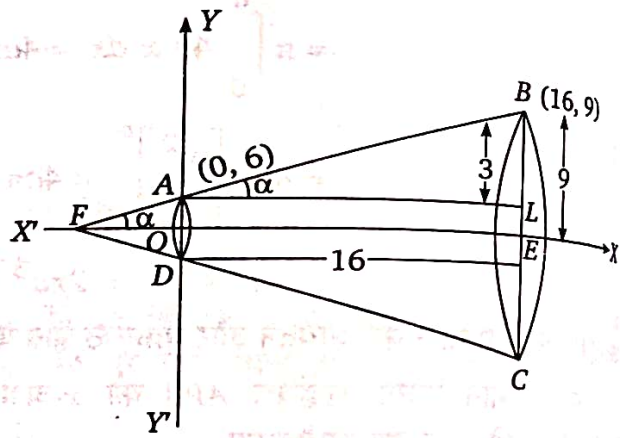
$$= 2\pi \times \left[125 - \frac{125}{3}\right] = 2\pi \times \left[\frac{375 - 125}{3}\right]$$

$$= 2\pi \times \frac{250}{3} = \frac{500}{3}\,\pi \text{ घन सेमी}$$

उदाहरण 9. एक बाल्टी के ऊपर तथा नीचे के व्यास क्रमश: 18 सेमी 12 सेमी हैं तथा उसकी गहराई 16 सेमी है। समाकल द्वारा उसका आयतन व वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : बाल्टी एक शंकु छिन्नक है। प्रश्न से ऊपरी त्रिज्या $BE = 9$ सेमी तथा नीचे की त्रिज्या $= 6$ सेमी, बाल्टी की गहराई $DE = 16$ सेमी यदि चित्र से $\angle BFE = \angle BAL = \alpha$ होगा। $AL = OE = 16$ सेमी; $BL = BE - LE = 3$ सेमी।

तो $\tan\alpha = \frac{3}{16}$ और AB का समीकरण $y = \frac{3}{16}x + 6$ होगा। $[\because\ y = mx + c]$



अत: बाल्टी का अभीष्ट आयतन

$$= \pi\int_0^{16} y^2\,dx = \pi\int_0^{16} \left(\frac{3}{16}x + 6\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^{16} \left(\frac{9}{256}x^2 + \frac{9}{4}x + 36\right) dx$$

$$= \pi\left[\frac{9}{256}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right) + 36x\right]_0^{16}$$

$$= \pi\left(\frac{9}{256} \times \frac{16 \times 16 \times 16}{3} + \frac{9}{4}\cdot\frac{16 \times 16}{2} + 36 \times 16\right)$$

$= 912\,\pi$ घन सेमी।

उत्तर

पुनः $y = \frac{3}{16}x + 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{16}$

$\therefore \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ या $ds = \sqrt{\quad}\,dx$

बाल्टी का वक्र पृष्ठ $S = 2\pi\int_{x=0}^{16} y\,ds$

$$= \int_0^{16} \left(\frac{3}{16}x + 6\right) \frac{\sqrt{265}}{16}\, dx = \frac{2 \times \sqrt{265}}{16}\, \pi \left[\frac{3}{16}\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^{16}$$

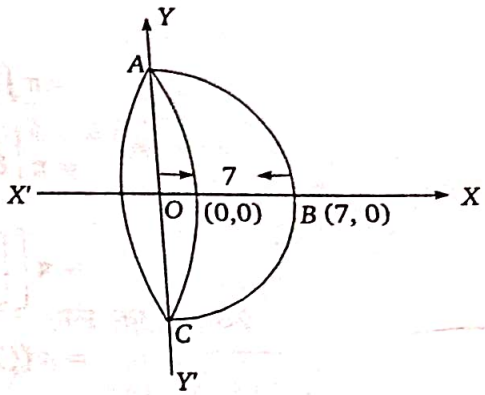
$$= \frac{2 \times \sqrt{265}}{16}\, \pi \left[\frac{3}{16} \times \frac{16 \times 16}{2} + 6 \times 16\right]$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{265}}{16}\, \pi \times (24 + 96) = \frac{2 \times \sqrt{265}}{16} \times \pi \times 120$$

$$= 15\sqrt{265}\, \pi \text{ वर्ग सेमी}$$ **उत्तर**

उदाहरण 10. एक अर्द्धगोलीय प्याले की त्रिज्या 7 सेमी है। उसकी धारिता एवं उसको बनाने में लगी धातु की चादर का क्षेत्रफल समाकलन विधि द्वारा निकालें।

हल : माना वृत्तीय चाप BA को x-अक्ष के परित: घुमाने से अर्द्धगोलीय प्याला $ABCOA$ बनता है।



माना मूल बिन्दु $O\,(0, 0)$ तथा $B\,(7, 0)$ हैं। तो त्रिज्या $OB = 7$ सेमी

तथा वक्र का समीकरण $x^2 + y^2 = 7^2$

$$y^2 = 49 - x^2$$

या

$$\text{आयतन (धारिता)} = \pi \int_0^7 y^2\, dx = \pi \int_0^7 (49 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[49x - \frac{x^3}{3}\right]_0^7 = \pi \left[49\,(7 - 0) - \left(\frac{7^3}{3} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[343 - \frac{343}{3}\right] = \frac{\pi}{3}\,[1029 - 343] = \frac{\pi}{3}\,[686] = \frac{686}{3}\,\pi \text{ घन सेमी}$$

$\therefore$ धारिता $= \frac{686}{3}$ घन सेमी

पुन: (1) के अवकलन से, $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{49}{y^2}$$

$\therefore$ प्याले में लगने वाली चादर का क्षेत्रफल $= 2\pi \int_0^7 y \sqrt{\frac{49}{y^2}}\, dx = 2\pi \int_0^{\pi} y \times \frac{7}{y}\, dx$

$$= 2\pi \times 7 \int_0^7 dx = 14\pi\,[x]_0^7 = 14\pi \times 7 = 98\pi \text{ वर्ग सेमी}$$ **उत्तर**

उदाहरण 11. 18 सेमी व्यास का एक गोला दो समान्तर समतलों से तीन बराबर ऊँचाई के भागों में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक भाग का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : मूल बिंदु O को केन्द्र मानकर 9 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचें जो x-अक्ष को $P(9, 0)$ तथा $Q(-9\ 0)$ पर काटता है।

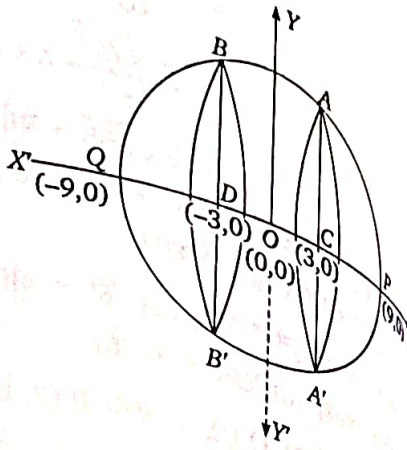
$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $OP; OQ = 9$ तथा व्यास $PQ = 18$

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = 9^2 = 81$

व्यास PQ पर दो बिन्दु C और D इस प्रकार चुनें कि

$$PC = CD = DQ = 6$$

यदि CA तथा DB, x-अक्ष पर लंब हों तो चाप $PABQ$ को x-अक्ष के परित: घुमाने पर प्राप्त गोला तीन भागों (i) $APA'CA$ (ii) $AA'B'B$ (iii) $BQB'DB$ में विभाजित होता है।



भाग $APA'CA$ का आयतन $= \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_3^9 \pi y^2\, dx$,

[$\because$ यहाँ $a = 3, b = 9$]

$$= \pi \int_3^9 (81 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[81x - \frac{1}{3}x^3\right]_3^9$$

$$= \pi \left[\left\{81(9) - \frac{1}{3}(9)^3\right\} - \left\{81(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right\}\right]$$

$$= \pi [(729 - 243) - (243 - 9)] = 252\pi \text{ घन सेमी}$$

इसी तरह भाग $BAA'B'$ का आयतन $= \pi \int_{-3}^{3} y^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} (81 - x^2)\, dx$

$$= \pi \left[81x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \left[\{81 \times 3 - 81 \times (-3)\} - \left\{\frac{(3)^3 - (-3)^3}{3}\right\}\right] = 468\pi \text{ घन सेमी}$$

तथा भाग $BQB'DB$ का आयतन = भाग $APA'CA$ का आयतन

$= 252\pi$ घन सेमी।

उदाहरण 12. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को उसके दीर्घ (Major) अक्ष पर घुमाने से बनने वाले ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए

हल : दीर्घवृत्त को, दीर्घ अक्ष (Major Axis) AOC के सापेक्ष घुमाने से अभीष्ट ठोस प्राप्त होगा।

बिन्दु A तथा C के निर्देशांक क्रमश: $(a, 0)$ तथा $(-a, 0)$ होंगे।

अत: आयतन, $V = \int_{-a}^{a} \pi . y^2\, dx$

$$= \int_{-a}^{a} \pi . b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \left[\because \text{ दीर्घवृत्त के समीकरण से } \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \text{ या } y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right]$$

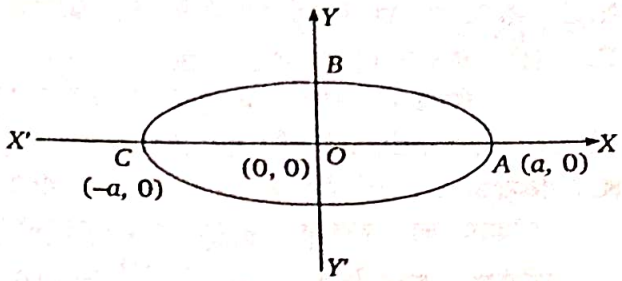
$$= \pi . b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \pi . b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \pi . b^2 \left[\left(a - \frac{a^3}{3a^2} \right) - \left(-a - \frac{-a^3}{3a^2} \right) \right]$$

$$= \pi . b^2 \left[\left(a - \frac{a}{3} \right) - \left(-a + \frac{a}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi b^2}{3} [3a - a + 3a - a] = \frac{4}{3} \pi a b^2$$ इकाई आयतन



उत्तर

महत्त्वपूर्ण सूत्र

(A) यदि $y = f(x)$, x-अक्ष, $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्रफल को

(i) x-अक्ष के परित: घुमाया जाए तो जनित ठोस का आयतन $V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$

तथा वक्रपृष्ठ $S = 2\pi \int_a^b y \, dS = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \, dx$

(ii) x-अक्ष के समानान्तर रेखा $y = k$ के परित: घुमाया जाए तो जनित ठोस का आयतन

$V = \pi \int_a^b (y - k)^2 \, dx$ तथा $S = 2\pi \int_a^b (y - k) \, dS = 2\pi \int_a^b (y - k) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \, dx$

(B) यदि वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष, $y = c$ तथा $y = d$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को y-अक्ष के परित: घुमाया जाए तो

(i) आयतन $V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$ तथा वक्रपृष्ठ $= 2\pi \int_c^d x \, dS = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \, dy$

(ii) y-अक्ष के समानान्तर रेखा $x = h$ के परित: घुमाया जाए तो आयतन $V = \pi \int_c^d (x - h)^2 \, dy$

तथा वक्रपृष्ठ $S = 2\pi \int (x - h) \, dS = 2\pi \int_c^d (x - h) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \, dy$

प्रश्नावली 10.2

1. वक्र $y^2 = 4x$ तथा $x = 1$ के बीच परिबद्ध क्षेत्रफल को x-अक्ष के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
2. वक्र $y^2 = x^2 + 5x$, $x = 2$ तथा $x = 4$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को x-अक्ष के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
3. सिद्ध करें कि किसी दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को इसके दीर्घअक्ष (Major axis) के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन $\frac{4}{3} \pi a b^2$ है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2021(S)]

4. वक्र $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$ को x-अक्ष के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
5. किसी दीर्घवृत्त को उसके लघु अक्ष (Minor axis) के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।

6. एक बेलन की ऊँचाई 10 सेमी और सिरे की त्रिज्या 4 सेमी है। उसका आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।
7. (i) एक लंबवृत्तीय शंकु (Right Circular Cone) की ऊँचाई 7 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 3 सेमी है। समाकलन विधि से उसका वक्र पृष्ठ एवं आयतन ज्ञात करें।

   (ii) 28 सेमी ऊँचे और 21 सेमी त्रिज्या वाले शंकु का आयतन एवं वक्र पृष्ठ समाकलन के प्रयोग से ज्ञात करें।
8. बिन्दुओं (0, 0) और (*b*, *a*) को मिलाने वाली रेखा को *x*-अक्ष के परित: घुमाया जाता है। इस प्रकार जनित ठोस का आयतन, वक्र पृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठ निशिचत समाकलन की विधि से ज्ञात कीजिए।

   [**संकेत :** जनन रेखा $y-0=\frac{a-0}{b-0}(x-0) \Rightarrow y=\frac{a}{b}x$]
9. वक्र $x^2+y^2=9$ को *x*-अक्ष के परित: घुमाया जाता है। निश्चित समाकलन विधि से जनित ठोस का आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात करें।
10. निश्चित समाकलन विधि $x^2+y^2=25$ को *y*-अक्ष के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
11. एक अर्द्धगोलीय प्याले की त्रिज्या 7 सेमी है। उसकी धारिता (Capacity) एवं उसको बनाने वाली धातु की चादर का क्षेत्रफल समाकलन विधि से निकालें।
12. एक गोला जिसकी त्रिज्या 6 सेमी है, दो समानांतर समतलों द्वारा तीन बराबर ऊँचाई के भागों में बाँटा गया है। प्रत्येक भाग का आयतन समाकलन विधि से ज्ञात करें।
13. वक्र $y=\sin x$, $x=0$ तथा $x=\pi/2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को *x*-अक्ष के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
14. समाकलन विधि से लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिये जबकि बेलन की ऊँचाई *h* तिर्यक व त्रिज्या *r* है।
15. निश्चित समाकलन विधि से उस शंकु का आयतन एवं संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात करें जिसकी ऊँचाई *h* तिर्यक ऊँचाई *l* तथा वृत्तीय आधार की त्रिज्या *r* है।
16. निश्चित समाकलन विधि से उस गोले का आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात करें जिसकी त्रिज्या *r* है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]**

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का क्षेत्रफल होगा—

   (a) πab (b) $\pi\frac{(a^2+b^2)}{4}$ (c) $\pi(a+b)$ (d) कोई नहीं
2. बेलन के आयतन का सूत्र होगा—

   (a) πr^2h (b) $2\pi rh$ (c) $2\pi(r+h)$ (d) कोई नहीं
3. शंकु के आयतन का सूत्र होगा—

   (a) $\frac{1}{3}\pi r^2h$ (b) $\pi r(r+l)$ (c) $\pi rl(r+h)$ (d) कोई नहीं
4. $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ तथा $x=b$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा—

   (a) $\int_a^b y\,dx$ (b) $\pi\int_a^b y\,dx$ (c) $\int_a^b y^2\,dx$ (d) कोई नहीं
5. $x=f(y)$, $x=0$, $y=c$, $y=d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा—

   (a) $\int_c^d x\,dy$ (b) $\int_c^d y\,dx$ (c) $\int_0^d x\,dy$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. 2π घन इकाई
2. 90π घन इकाई
4. $\frac{700}{3}\pi$ घन इकाई
5. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ घन इकाई
6. 160π घन इकाई, 80π वर्ग इकाई
7. (i) $3\sqrt{58}\pi$ वर्ग सेमी, 21π घन सेमी (ii) 12936 सेमी^{2}; 3696 सेमी^{2}
8. $\frac{\pi}{3}a^2 b$, $\pi a\sqrt{a^2+b^2}$, $\pi a[\sqrt{a^2+b^2}+a]$
9. 36π घन इकाई, 36π वर्ग इकाई
10. $\frac{500}{3}\pi$ घन इकाई
11. $\frac{686}{3}\pi$ घन सेमी, 98π वर्ग सेमी
12. $74\frac{2}{3}$ सेमी^{3}, $138\frac{2\pi}{3}$ सेमी^{3}, $74\frac{2}{3}$ सेमी^{3}
13. $\frac{\pi^2}{4}$ घन इकाई
14. $\pi r^2 h$, $2\pi r h$
15. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, $\pi r(r+l)$
16. $\frac{4}{3}\pi r^3$, $4\pi r^2$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (a)
2. (a)
3. (a)
4. (a)
5. (a)

□□□

अध्याय 11 प्रथम घात के अवकल समीकरण (Differential Equations of First Order and First Degree)

11.1 अवकल समीकरण (Differential Equation)

ऐसे समीकरण जो स्वतंत्र चर, परतंत्र चर तथा स्वतंत्र चर के सापेक्ष परतंत्र चर के अवकल गुणांकों से सम्ब होते हैं, अवकल समीकरण कहलाते हैं।

जैसे : (i) $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 7$

(iii) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (iv) $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} - (x+z)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$ आदि।

11.2 अवकल समीकरणों के प्रकार (Kinds of Different Equations)

अवकल समीकरण दो प्रकार के होते हैं—

1. साधारण अवकल समीकरण (Ordinary Differential Equation) : ऐसे अवकल समीक जिसमें केवल एक स्वतंत्र चर होता है, साधारण अवकल समीकरण कहलाते हैं।

जैसे : उपरोक्त उदाहरणों में (i) तथा (ii) साधारण अवकल समीकरण हैं।

2. आंशिक अवकल समीकरण (Partial Different Equation) : ऐसे अवकल समीकरण जिसमें दो दो से अधिक स्वतंत्र चर तथा आंशिक अवकल गुणांक होते हैं, आंशिक अवकल समीकरण कहलाते हैं।

उपरोक्त उदाहरणों में (iii) तथा (iv) आंशिक अवकल समीकरण हैं।

11.2.1 अवकल समीकरण की कोटि (Order of a Differential Equation)

किसी अवकल समीकरण की **कोटि** (या **क्रम**) उस समीकरण में उपस्थित सबसे बड़े कोटि के अवकल गुण की कोटि होती है।

जैसे : (i) $xy\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+1}{y+1}$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (iii) $\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 5$

उदाहरण (i), (ii) तथा (iii) में उच्चतम अवकल गुणांक की कोटि क्रमशः एक, दो तथा तीन हैं। अतः ये क्र प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय कोटि के अवकल समीकरण हैं।

11.3 अवकल समीकरण की घात (Degree of Differential Equation)

किसी अवकल समीकरण की घात उसमें उपस्थित उच्चतम कोटि के अवकल गुणांक की घात (Power of highest derivative) के बराबर होता है, जबकि वह करणी (Radical sign) चिह्न तथा भिन्नात्मक घातों से मुक्त हो

जैसे : $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 7 = 0$

में उच्चतम कोटि का अवकल गुणांक $\frac{d^3y}{dx^3}$ है जिसकी घात 1 है अत: यह प्रथम घात तथा तृतीय कोटि का अवकल समीकरण है।

नोट :
- (i) किसी अवकल समीकरण की कोटि तथा घात हमेशा धनात्मक पूर्णांक होते हैं।
- (ii) अवकल समीकरण की घात का निर्धारण तभी संभव है, जब यह अवकल गुणांकों के बहुपद के रूप में व्यक्त हो। जैसे : $\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ की घात का निर्धारण संभव नहीं है क्योंकि यह $\frac{dy}{dx}$ के बहुपद के रूप में व्यक्त नहीं है।

11.4 अवकल समीकरण बनाना (Formation of Differential Equation)

सामान्य समीकरण को अवकलित कर स्वेच्छ अचरों (arbitrary constants) से मुक्त करने से अवकल समीकरण का निर्माण होता है। इसकी कोटि दिए गए समीकरण में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या के बराबर होती है

11.4.1. कार्य विधि

(i) दिए गए समीकरण को लिखें।
(ii) इसे उतनी बार अवकलित करें जितने इसमें (दिए गए समीकरण में) स्वेच्छ अचर हैं।
(iii) (i) तथा (ii) से प्राप्त अवकल समीकरणों से अचरों को मुक्त करें।
क्रिया विधि साधित उदाहरणों से स्पष्ट है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्न अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात बतायें।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2y = 0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(iii) $\frac{d^2x}{dy^2} + \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = 0$ (iv) $\frac{dy}{dx} = \sin x$

हल : (i) दिए गए अवकल समीकरण से $\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = 0$

उच्चतम कोटि का अवकल गुणांक $= \frac{d^2y}{dx^2}$ तथा इसका घात $= 1$ अत: यह द्वितीय कोटि तथा प्रथम घात का समीकरण है।

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ यहाँ कोटि $= 2$, घात $= 1$

(iii) प्रश्न से, $\frac{d^2x}{dy^2} = -\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 = 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$

$\therefore$ कोटि = उच्चतम अवकल गुणांक की कोटि $= 2$
घात = उच्चतम कोटि के अवकल गुणांक की घात $= 2$

(iv) कोटि $= 1$, घात $= 1$

उदाहरण 2. $y = mx$ के संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $y = mx$ ...(1)

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = m$

(1) से $m = \frac{y}{x}$

$\therefore$ (2) में यह मान रखने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ या $x\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} - y = 0$ यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3. $y = Ae^{2x} - Be^{-x}$ का संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $y = Ae^{2x} - Be^{-x}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + Be^{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} - Be^{-x}$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = (4Ae^{2x} - Be^{-x}) - (2Ae^{2x} + Be^{-x}) = 2(Ae^{2x} - Be^{-x}) = 2y$ ...(1)

या $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ [(1) से मान रखने पर]

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 4. समीकरण $y = ae^{2x} + be^{-3x} + ce^{x}$ का संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $y = ae^{2x} + be^{-3x} + ce^{x}$

$\frac{dy}{dx} = y_1 = 2ae^{2x} - 3be^{-3x} + ce^{x}$ ...(1)

$\frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = 4ae^{2x} + 9be^{-3x} + ce^{x}$ ...(2)

$\frac{d^3y}{dx^3} = y_3 = 8ae^{2x} - 27be^{-3x} + ce^{x}$ ...(3)

(2) को 7 से गुणा करने पर ...(4)

$\therefore \quad 7y_1 = 14ae^{2x} - 21be^{-3x} + 7ce^{x}$

(5) को (4) में से घटाने पर ...(5)

$y_3 - 7y_1 = -6ae^{2x} - 6be^{-3x} - 6ce^{x}$

$= -6(ae^{2x} + be^{-3x} + ce^{x})$

$= -6y$ [(1) से]

$y_3 - 7y_1 + 6y = 0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 5. निम्नलिखित वक्र समूहों के समीकरण से अवकल समीकरण प्राप्त करें।

(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ii) $(y - b)^2 = 4(x - a)$

हल : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$ ...(1)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ [पुनः x के सापेक्ष अवकलन से] ...(2)

समी० (2) में x से गुणा कर इसमें से समी० (1) घटाने पर

$$\frac{1}{b^2}\left\{x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx}\right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} = 0$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

(ii) प्रश्न से, $(y-b)^2 = 4(x-a)$

$$2(y-b)\frac{dy}{dx} = 4 \qquad [x \text{ के सापेक्ष अवकलन से}] \qquad \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \quad (y-b)\frac{dy}{dx} = 2 \qquad \ldots(2)$$

$$\Rightarrow \quad (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad [\text{ पुनः } x \text{ के सापेक्ष अवकलन से}] \qquad \ldots(3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{2}{\frac{dy}{dx}} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad \left[\because \text{ (2) से } y - b = \frac{2}{dy/dx}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \qquad \text{यह अभीष्ट समीकरण है।}$$

उदाहरण 6. उस वृत्त समूह का अवकल समीकरण ज्ञात करें जो y-अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करते हैं।

हल : माना वृत्त समूह का समीकरण जो y-अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करता है

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2 \qquad [\because \text{ वृत्त का केन्द्र } x\text{-अक्ष पर होगा}]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0 \qquad \ldots(1)$$

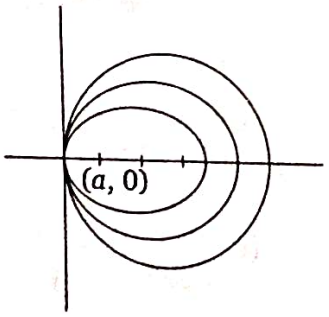
x के सापेक्ष अवकलन से $\quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2a = 0$

$$\Rightarrow \quad a = x + y\frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad a = x + y\frac{dy}{dx}$$

(1) में यह मान रखने पर $x^2 + y^2 - 2x\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xy\frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad y^2 - x^2 = 2xy\frac{dy}{dx}$$

यह अभीष्ट समीकरण है।



उदाहरण 7. उस वृत्त समूह का समीकरण ज्ञात करें जिसकी त्रिज्या r है।

हल : माना वृत्त समूह का केन्द्र (a, b) तथा त्रिज्या r है।

$\therefore$ वृत्त समूह का समीकरण $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ...(1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2(x-a) + 2(y-b)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \quad (x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots(2)$$

(2) के पुनः अवकलन से $\quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \ldots(3)$

$$\Rightarrow \quad y - b = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(2) में $y - b$ का मान रखने पर $\quad x - a = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx}$

(1) में $(x-a)$ तथा $(y-b)$ का मान रखने पर $\frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} + \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = r^2$

$$\Rightarrow \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2 \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right\} = r^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3 = r^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्नावली 11.1

1. निम्न अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात बतायें।

(i) $\frac{d^3y}{dx^3} + 5y = 0$

(ii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 0$

(iii) $x^2 \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + y \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + y^6 = 0$

(iv) $5 \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$

(v) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = 0$

(vi) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3} = k \frac{d^2y}{dx^2}$

2. (i) $y = A \cos(x + B)$, जहाँ A तथा B प्राचल (Parameters) हैं, के संगत अवकल समीकरण दीजिए।
(ii) समीकरण $x = A \cos(nt + a)$ से सरल आवर्त गति का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. सरल आवर्त गति के व्यापक समीकरण $y = a \sin(\omega t + \phi)$ के संगत अवकल समीकरण प्राप्त करें, जहाँ a तथा प्राचल (parameters) हैं।

4. $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ से विलोपन कर अवकल समीकरण बनायें।

5. (i) अवकल समीकरण ज्ञात करें जिसका हल $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ है।
(ii) अवकल समीकरण ज्ञात करें यदि $y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$, जहाँ A, B व C अचर हैं।

6. समीकरण $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$ के संगत अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ A तथा B स्वेच्छ अचर हैं।

7. सिद्ध करें कि $\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$ का हल $v = \frac{A}{r} + B$ है।

8. निम्न वक्र समूहों के लिए दिए गए समीकरणों के संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें—
(i) $x^2 + y^2 = a^2$ (ii) $x^2 - y^2 = a^2$
(iii) $y^2 = 4ax$ (iv) $y = A\cos(x)^2 + B\sin(x)^2$

9. उन वृत्त समूहों का अवकल समीकरण ज्ञात करें जो x-अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करता है।
[संकेत : वृत्त का समीकरण $(x-0)^2 + (y-a)^2 = a^2$]

10. उन वृत्त समूहों का अवकल समीकरण ज्ञात करें, जो निर्देशाक्षों को प्रथम पाद में स्पर्श करता है।
[संकेत : समीकरण $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$]

11. x-अक्ष को अक्ष मानकर खींचे गए परवलयों का अवकल समीकरण ज्ञात करें।
[संकेत : समीकरण $y^2 = 4a(x-h)$]

12. यदि $y = ae^{bx}$, जहाँ a तथा b स्वेच्छ अचर हैं, का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. अवकल समी० $\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = 0$ का क्रम तथा घात है—
(a) 2,1 (b) 1, 2 (c) 1 , 1 (d) कोई नहीं

2. अवकलन समी० $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का क्रम तथा घात है—
(a) 1, 2 (b) 2, 1 (c) 1, 1 (d) कोई नहीं

3. अवकल समी० $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y^2 = 0$ क्रम तथा घात है—
(a) 1, 4 (b) 2, 3 (c) 3, 2 (d) कोई नहीं

4. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + y^2 = 0$ क्रम तथा घात है—
(a) 2, 4 (b) 3, 2 (c) 4,2 (d) कोई नहीं

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ का क्रम तथा घात है—
(a) 1, 1 (b) 2, 2 (c) 1, 3 (d) कोई नहीं

6. $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \sqrt{\frac{dy}{dx}}$ का क्रम तथा घात है—
(a) 2, 2 (b) 1, 4 (c) 1, 2 (d) कोई नहीं

7. $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3} = k\frac{d^2y}{dx^2}$ का क्रम तथा घात है—
(a) 2, 3 (b) 1, 4 (c) 4,1 (d) कोई नहीं

8. $ax + by + c = 0$ से बना अवकल समीकरण है—

(a) $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (c) $\frac{d^3y}{dx^3}+k=0$ (d) कोई नहीं

9. $y=mx$ से बना अवकल समीकरण है—

(a) $\frac{dy}{dx}-m=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (c) $x\frac{dy}{dx}-y=0$ (d) कोई नहीं

10. $y=Ae^x+Be^{-x}$ से बना अवकल समीकरण है—

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (c) $\frac{dy}{dx}=Ae^x-Be^{-x}$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (i) कोटि 3, घात 1 (ii) कोटि 2, घात 4 (iii) कोटि 3, घात 2
(iv) कोटि 2, घात 2 (v) कोटि 2, घात 4 (vi) कोटि 2, घात 3

2. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (ii) $\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0$

3. $\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$ **4.** $(x^2-2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4xy\frac{dy}{dx}-x^2=0$

5. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}=4y$ (ii) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{3d^2y}{dx^2}+\frac{2dy}{dx}=0$ **6.** $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+15y=0$

8. (i) $x+y\frac{dy}{dx}=0$ (ii) $x-y\frac{dy}{dx}=0$

(iii) $y-2x\frac{dy}{dx}=0$ (iv) $x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+4x^3y=0$

9. $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}=2xy$ **10.** $(x-y)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=(x+y\frac{dy}{dx})^2$

11. $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ **12.** $y\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (a) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (b) **5.** **(b)** **6.** (a) **7.** (a) **8.** (b)
9. (c) **10.** (b)

11.5 अवकल समीकरण का हल (Solution of a Differential Equation)

किसी अवकल समीकरण का हल उसमें उपस्थित स्वतंत्र तथा परतंत्र चरों के बीच का सबंध है, जो उस समीकरण को हल करने से प्राप्त होता है। यह अवकल गुणांक से मुक्त होता है तथा दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है।

जैसे : $y=A\cos x+B\sin x$, जहाँ A तथा B स्वेच्छ अचर हैं, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ का हल है।

According to New
Approved by U
2020

11.5.1 हलों के प्रकार (Types of Solution)

अवकल समीकरणों के हल दो प्रकार के होते हैं—

(a) व्यापक हल (General Solution) (b) विशिष्ट हल (Particular Solution)

(a) व्यापक हल (General Solution) : यदि हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या अवकल समीकरण की कोटि (order) के बराबर हो, तो हल व्यापक हल कहलाता है।

जैसे : $y = A \cos x + B \sin x$, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का व्यापक हल है क्योंकि इसमें अचरों की संख्या 2 है जो अवकल समीकरण के क्रम के बराबर है।

(b) विशिष्ट हल (Particular Solution) : किसी अवकल समीकरण के हल में स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मान देने से विशिष्ट हल प्राप्त होता है।

जैसे : $y = 2 \sin x + 3 \cos x$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का विशिष्ट हल है।

11.6 प्रथम क्रम तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण (Differential Equation of First Order and First Degree)

प्रथम क्रम तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण को सामान्यत: निम्न रूप में लिखा जाता है—

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{या} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} \quad \text{या} \quad f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = 0$$

हल करने की सुविधा की दृष्टि से इन्हें चार श्रेणियों में वर्गीकृत किया जा सकता है—

(i) चर राशियों में पृथक्करणीय अवकल समीकरण (Variable Separate Form)
(ii) समघात समीकरण (Homogeneous Differential Equations)
(iii) रैखिक समीकरण (Linear Differential Equations)
(iv) यथार्थ अवकल समीकरण (Exact Differential Equations)

Type I. चर राशियों में पृथक्करणीय अवकल समीकरण (Variable Separable Form)

ऐसे अवकल समीकरणों में चर राशियों को पृथक् किया जा सकता है। इसके लिए

(i) सर्वप्रथम चर राशियों को पृथक् कर $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$ के रूप में लिखें।
(ii) तत्पश्चात् इन्हें समाकलित कर, उसमें समाकलन नियतांक जोड़कर हल लिखें।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. दिए गए अवकल समीकरणों को हल करें :

(i) $e^y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2$ (ii) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$

हल : (i) प्रश्न से, $e^y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2 \quad \Rightarrow \quad e^y\,dy = (e^x + x^2)\,dx$

दोनों तरफ समाकलित करने पर

$$\int e^y\,dy = \int (e^x + x^2)\,dx \text{ या } e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c, \text{ जहाँ } c \text{ समाकलन नियतांक है।}$$

(ii) प्रश्न से, $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x e^{-y} + x^2 e^{-y}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y}(e^x + x^2)$ $\Rightarrow e^y dy = (e^x + x^2)\, dx$

[अब (i) की भाँति हल करें।]

उदाहरण 2. हल करें $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

हल : प्रश्न से, $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$ $\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ [चरों को पृथक् करने पर]

दोनों तरफ समाकलन करने पर, $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$

$\Rightarrow \tan^{-1} y - \tan^{-1} x = c$ $\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y-x}{1+xy} = c \Rightarrow \frac{y-x}{1+xy} = \tan c = \alpha$

$\therefore$ $y - x = \alpha(1 + xy)$ अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3. $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$

हल : $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x) + y(1+x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$ $\Rightarrow \frac{dy}{1+y} = (1+x)\, dx$ [चरों को पृथक करने पर]

$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)\, dx$

या $\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$ जहाँ c समाकलन नियतांक है। यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4. $(1+x)(1-y)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ को हल करें।

हल : प्रश्न से, $(1+x)(1-y)\frac{dy}{dx} = -xy$ $\Rightarrow \frac{(1-y)}{y} dy = -\frac{x}{1+x} dx$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y}\right) dy = -\left[\frac{1+x-1}{1+x}\right] dx$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = -\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy - \int dy = -\left[\int dx - \int \frac{1}{1+x} dx\right]$ [समाकलन करने पर]

$\Rightarrow \log y - y = -[x - \log(1+x)] + c$ $\Rightarrow \log y + x - \log(1+x) = c$

या $x - y + \log \frac{y}{1+x} = c$ यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 5. $(1 - e^x)(1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx} + \frac{3e^x}{\cot y} = 0$ को हल कीजिए।

हल : प्रश्न से, $(1 - e^x)\sec^2 y \frac{dy}{dx} + \frac{3e^x}{\cot y} = 0$ [$\because 1 + \tan^2 y = \sec^2 y$]

$\Rightarrow (1 - e^x)\sec^2 y \frac{dy}{dx} = -\frac{3e^x}{\cot y}$ $\Rightarrow \sec^2 y \cot y\, dy = -\frac{3e^x}{1 - e^x}$

$$\Rightarrow \frac{\sec^2 y}{\tan y}\,dy = 3\,\frac{-e^x}{1-e^x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sec^2 y}{\tan y}\,dy = 3\int \frac{-e^x}{1-e^x}\,dx \qquad \text{[समाकलन करने पर]}$$

$$\left[\because \cot y = \frac{1}{\tan y}\right]$$

$$\Rightarrow \log \tan y = 3 \log (1-e^x) + c \qquad \left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x)\right]$$

$$\Rightarrow \log \tan y - 3 \log (1-e^x) = c = \log k \qquad \text{(माना)}$$

$$\Rightarrow \log \tan y - \log (1-e^x)^3 = \log k \Rightarrow \log \frac{\tan y}{(1-e^x)^3} = \log k$$

$$\Rightarrow \frac{\tan y}{(1-e^x)^3} = k$$

यह अभीष्ट हल है।

Type II चर पृथक्करणीय रूप में परिवर्तनशील अवकल समीकरण (Differential Equations Reducible to Variable Separable Form)

(1) यदि समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c_1}{\lambda(ax+by)+c_2}$ के रूप का हो, तो

या $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$, जहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, तो

(i) $ax+by=z$ रखें। (ii) पुनः इसे अवकलित कर $\frac{dy}{dx}$ को $\frac{dz}{dx}$ के पदों में व्यक्त करें।

(iii) तत्पश्चात् पक्षान्तरण से यह चर पृथक्करणीय रूप (Variable Separable form) में आ जाता है जिसे समाकलित करने से हल प्राप्त होता है। (देखें उदाहरण 6)

(2) यदि समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ रूप का हो, तो

(i) $ax+by+c=z$ रखें तथा (ii) उपरोक्त विधि से (Variable Separable form) में लाकर समाकलित कर हल प्राप्त करें। (देखें उदाहरण 7 तथा 8)

उदाहरण 6. $(2x+y+1)\,dx + (4x+2y-1)\,dy = 0$ को हल करें।

हल : प्रश्न से, $(2x+y+1)\,dx + (4x+2y-1)\,dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y+1}{4x+2y-1} \qquad \ldots(i)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+y)+1}{2(2x+y)-1} \qquad \ldots(ii)$$

अब $2x+y=z$, जिससे $2+\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ अर्थात् $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$

$\therefore$ (ii) से $\frac{dz}{dx} - 2 = -\frac{z+1}{2z-1}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 - \frac{z+1}{2z-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{4z-2-z-1}{2z-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3z-3}{2z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2z-1}{3z-3}\,dz = dx \Rightarrow \frac{2z-2+1}{3(z-1)}\,dz = dx \Rightarrow \frac{2(z-1)+1}{3(z-1)}\,dz = dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3(z-1)}\right] dz = dx \Rightarrow 2\,dz + \frac{1}{z-1}\,dz = 3\,dx$$

$\Rightarrow \quad 2\int dz + \int \frac{1}{z-1}\,dz = 3\int dx$ [समाकलन करने पर]

$\Rightarrow \quad 2z + \log(z-1) = 3x + c$

$\Rightarrow \quad 4x - 3x + 2y + \log(2x + y - 1) = c$

यह अभीष्ट हल है।

$\Rightarrow \quad 2(2x + y) + \log(2x + y - 1) = 3x + c$

$\Rightarrow \quad x + 2y + \log(2x + y - 1) = c$

नोट :

• समीकरण (ii) में x के गुणांकों का अनुपात $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ तथा $\frac{b_1}{b_2} = y$ के गुणांकों का अनुपात $= -\frac{1}{2} \therefore \frac{a_1}{a_2}$

उदाहरण 7. $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$ को हल करें।

हल : माना $x + y = z$, तो $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

$$z^2\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2$$ [दिए गए समीकरण में इन मानों को रखने पर]

$\Rightarrow \quad z^2 \frac{dz}{dx} = a^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{a^2 + z^2}\,dz = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2 + a^2 - a^2}{a^2 + z^2}\,dz = dx$

$\Rightarrow \quad \left[1 - \frac{a^2}{a^2 + z^2}\right] dz = dx \quad \Rightarrow \quad \int 1\,dz - a^2 \int \frac{1}{a^2 + z^2}\,dz = dx$

$\Rightarrow \quad z - a^2 \times \frac{1}{a} \tan^{-1}\frac{z}{a} = x + c \quad \Rightarrow \quad (x+y) - a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right) = x + c \quad [\because z = x + y]$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 8. $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ को हल करें।

हल : प्रश्न से, $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$

$x + y = z$, जिससे $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

इन मानों को (1) में रखने पर

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \sin z \quad \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \sin z \quad \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \sin z$$

$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1 + \sin z}\,dz = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1 - \sin z}{(1 + \sin z)(1 - \sin z)}\,dz = \int dx$

$\Rightarrow \quad \int \frac{1 - \sin z}{1 - \sin^2 z}\,dz = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int\left(\frac{1}{\cos^2 z} - \frac{\sin z}{\cos^2 z}\right) dz = \int dx$

$\Rightarrow \quad \int \sec^2 z\,dz - \int \sec z \cdot \tan z\,dz = \int dx \quad \Rightarrow \tan z - \sec z = x + c$

$\Rightarrow \quad \tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c \quad [\because z = x + y]$ यह अभीष्ट हल है।

प्रश्नावली 11.2

Type I. हल करें—

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

3. (i) $\log \frac{dy}{dx} = ax + by$ [संकेत : $\frac{dy}{dx} = e^{ax+by}$] (ii) $e^y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2$

4. $(e^y + 1)\cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$

5. $y\sqrt{1-x^2}\, dy + x\sqrt{1-y^2}\, dx = 0$

6. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

7. $(x^2 - yx^2)\, dy + (y^2 + xy^2)\, dx = 0$

8. $(xy^2 + x)\, dx + (yx^2 + y)\, dy = 0$

9. (i) $\sin x . \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$ [संकेत : $\frac{\cos y}{\sin y} dy + \frac{\cos x}{\sin x} dx = 0$]

(ii) $(1-e^x)(1+\tan^2 y)\frac{dy}{dx} + \frac{3e^x}{\cot y} = 0$

10. (i) $\frac{dy}{dx} = e^{3x-2y} + x^2 e^{-2y}$ (ii) $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$

Type II. हल करें—

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+3}{2x+2y+1}$ (ii) $(2x+y+1)\, dx + (4x+2y-1)\, dy = 0$

12. (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+7}{2x+2y+3}$ (ii) $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$

13. (i) $(x-y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$

14. $\frac{dy}{dx} = (4x+y+1)^2$

15. (i) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$ (ii) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. अवकल समी० $x\, dy + y\, dx = 0$ का हल है—
   (a) $xy = c$ (b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$ (c) $x + y = c$ (d) कोई नहीं

2. अवकल समी० $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ का हल है—
   (a) $e^x - e^y = c$ (b) $e^x + e^{-y} = c$ (c) $e^x + e^y = c$ (d) कोई नहीं

3. अवकल समी० $\frac{dy}{dx} = 3^{x+y}$ का हल है—
   (a) $3^x + 3^y = c$ (b) $3^x + 3^{-y} = c$ (c) $3^x - 3^y = c$ (d) कोई नहीं

4. अवकल समी० $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$ का हल है—

(a) $\frac{e^{ax}}{a} + \frac{e^{-by}}{b} = c$ (b) $e^{ax} - e^{-by} = c$ (c) $be^{ax} + ae^{by} = c$ (d) कोई नहीं

5. अवकल समी० $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का हल है—

(a) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = c$ (b) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = c$
(c) $\tan^{-1} xy = c$ (d) कोई नहीं

6. $\int \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} =$

(a) $\tan^{-1} \frac{y}{x} + c$ (b) $\tan^{-1} \frac{x}{y} + c$ (c) $\log (x^2 + y^2)^{1/2} + c$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $y - x = c(1 + xy)$ 2. $y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = c$

3. (i) $ae^{-by} + be^{ax} = c$ (ii) $e^x + \frac{x^3}{3} + c = e^y$ 4. $(1 + e^y) \sin x = c$

5. $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = c$ 6. $\tan x \tan y = c$ 7. $\log \frac{x}{y} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = c$

8. $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = c$ 9. (i) $\sin x \sin y = c$ (ii) $\tan y = c_1(1 - e^x)^3$

10. (i) $\frac{e^{2y}}{2} = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{x^3}{3} + c$ (ii) $(x + a)(1 - a) = cy$ 11. $x + c = \frac{2}{3}(x + y) - \frac{5}{9}\log(3x + 3y + 9)$

12. (i) $\frac{2}{3}(x + y) - \frac{11}{9}\log(3x + 3y + 10) = x + c$ (ii) $x + 2y + \log(2x + y - 1)$

13. (i) $y = \frac{a}{2}\log\frac{x - y - a}{x - y + a} + c$ (ii) $y - a\tan^{-1}\frac{x + y}{a} = c$

14. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4x + y + 1}{2} = x + c$

15. (i) $\log\left(1 + \tan\frac{x + y}{2}\right) = x + c$ (ii) $\tan(x + y) - \sec(x + y) = x + c$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (a) 2. (a) 3. (b) 4. (a) 5. (b) 6. (c)

अध्याय

12

आंकिक समाकलन (Numerical Integration)

12.1 अनियमित आकृतियों के क्षेत्रफल एवं आयतन (Area and Volume of Irregular Faces)

सांख्यिकीय समाकलन वह विधि है जिसमें किसी निश्चित समाकलन का मान फलन के सारणी रूप में उपलब्ध मानों की सहायता से निकाला जाता है। इसका प्रयोग सामान्यतः अनियमित आकृत्तियों के क्षेत्रफल, आयतन आदि निकालने में होता है। इसके अलावा इसका प्रयोग निश्चित समाकल में जैसे समाकल्य का समाकलन, यथा $\int_a^b e^{x^2}\,dx$, $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$, करने के लिए होता है, जिसका समाकल ज्ञात करना सामान्यतः आसान नहीं होता।

इस अध्याय में हम आंकिक समाकलन से संबंधित दो विधियों के बारे में पढ़ेंगे—

1. **सिम्पसन नियम** (Simpson's Rule)
   (a) प्रथम नियम या $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम
   (b) द्वितीय नियम या $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम
2. **समलंबी नियम** (Trapezoidal Rule)

1. (a) सिम्पसन का प्रथम नियम या $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम (Simpson's First Rule or $\left(\frac{1}{3}\right)$ Rule) : इस विधि से अनियमित आकार का क्षेत्रफल निकालने के लिए संपूर्ण क्षेत्र को बराबर दूरी पर विषम कोटियाँ लेकर सम भागों में बाँट दिया जाता है। यदि कोटियों की संख्या $(n+1)$ हो, जहाँ n सम है, तो क्षेत्रफल

$$A = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})]$$

या $$A = \frac{h}{3}[(F + L) + 2O + 4E]$$

जहाँ F = प्रथम कोटि (First ordinate)

L = अंतिम कोटि (Last ordinate)

O = शेष विषम कोटियों का योग (Sum of remaining odd ordinates)

E = सम कोटियों का योग (Sum of even ordinates)

(b) सिम्पसन नियम का सन्निकट समाकलन में प्रयोग : $\int_a^b y\,dx$ के सन्निकट समाकलन के लिए अंतराल $[a,b]$ को n बराबर भागों में बाँट दिया जाता है जहाँ n सम है तथा निम्न सारणी तैयार की जाती है—

x	a	$a+h$	$a+2h$	...	$a+nh=b$
$y=f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$

तथा ऊपर वर्णित सिम्पसन $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम का प्रयोग किया जाता है।

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})]$$

$$= \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$$

नोट :

- (i) (1) (a) तथा (b) के सूत्र समान हैं।
- (ii) इस नियम का प्रयोग तभी होता है, जब कोटियों की संख्या विषम हो।
- (iii) 'O' का मान निकालने के लिए प्रथम तथा अंतिम को छोड़कर शेष विषम कोटियों का योग निकाला जाता है।
- (iv) इसे सिम्पसन नियम के नाम से भी जाना जाता है।

(ii) सिम्पसन का द्वितीय नियम या $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम (Simpson's Second Rule or Three-Eighth Rule) :

(a) अनियमित आकार का क्षेत्रफल : इस विधि से अनियमित आकृति का क्षेत्रफल निकालने के लिए क्षेत्र को n बराबर भागों में, जहाँ n, 3 का गुणज है, बाँट दिया जाता है तथा क्षेत्रफल निम्न सूत्र से निकाला जाता है—

$$A = \frac{3h}{8}[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_6 + \ldots y_{n-3})]$$

जहाँ n तीन का गुणज है तथा $h = \frac{b-a}{n}$ = दो अंतरालों के बीच की सम दूरी

(b) सन्निकट समाकलन : $\int_a^b y\,dx$ का सन्निकट समाकलन के लिए इसी सूत्र का प्रयोग होता है तथा इसे निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है—

$$\int_a^b y\,dx = \frac{3h}{8}[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_6 + \ldots y_{n-3})]$$

जहाँ $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ क्रमशः $x = a, a+h; a+2h, \ldots, a+nh$ के लिए कोटियाँ तथा $h = \frac{b-a}{n}$, n तीन का गुणज है।

नोट :

- इस विधि में बराबर भागों की संख्या n, 3 का गुणज होती है।

2. समलंबी नियम (Trapezoidal Rule) : (i) समलंबी नियम से क्षेत्रफल निकालना : इस विधि अनियमित आकृत्ति का क्षेत्रफल निकालने के लिए पूरे क्षेत्र को $(n+1)$ कोटियाँ लेकर n बराबर भागों में बाँट दि जाता है तथा क्षेत्रफल के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$A = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$$

जहाँ h दो क्रमागत कोटियों के बीच की दूरी है तथा $h = \frac{b-a}{n}$

(ii) समलंबी नियम की सहायता से सन्निकट समाकलन : समलंबी नियम का प्रयोग सन्निकट समाकलन से किया जाता है। इसे निम्न रूप में व्यक्त करते है—

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$$

According to New S
Approved by U
020

जहाँ $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ क्रमशः $x = a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh$ के संगत कोटियाँ हैं तथा $h = \frac{b-a}{n}$ = दो क्रमागत कोटियों के बीच की दूरी तथा n = बराबर भागों की संख्या।

नोट :
- (i) समलंबी नियम में n का मान सम या विषम कोई भी धनात्मक पूर्णांक हो सकता है।
- (ii) सन्निकट समाकलन के लिए सारणी बनाने के लिए [1 (a)] की विधि का प्रयोग होता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. (a) अंतराल (1, 2) को चार बराबर भागों में बाँटते हुए, सिम्पसन के नियम का प्रयोग कर $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ का मान ज्ञात करें।

(b) इस प्रश्न की सहायता से log 2 के मान की गणना करें।

हल : (a) सिम्पसन नियम से $\int_a^b y\,dx = \int \frac{h}{3}[(F+L) + 2O + 4E]$ ...(1)

यहाँ $y = \frac{1}{x}$, $a = 1, b = 2$ तथा $n = 4$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

∴ अतः परास (1, 2) को चार बराबर भागों में बाँटकर x के विभिन्न मानों के लिए y के संगत मान की गणना करने पर

	a	$a+h$	$a+2h$	$a+3h$	$a+4h$
x	1	1 + .25 = 1.25	1 + 2×0.25 = 1.50	1 + 3×0.25 = 1.75	1 + 4×0.25 = 2
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{1.25} = 0.8$	$\frac{1}{1.50} = 0.67$	$\frac{1}{1.75} = 0.57$	$\frac{1}{2} = 0.5$
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

अब $F = y_0 = 1$ $\quad L = y_4 = 0.5$

$O = y_2 = 0.67$ $\quad E = y_1 + y_3 = 0.8 + 0.57 = 1.37$

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3\times 4}[(1 + 0.5) + 2 \times 0.67 + 4 \times 1.37]$$

$$= \frac{1}{12} \times [1.55 + 1.34 + 5.48]$$

$$= \frac{1}{12} \times 8.32 = 0.0833 \times 8.32 = 0.6932 \quad \text{...(1)}$$ उत्तर

(b) $\because \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2 - 0 = \log 2$ ...(2)

∴ (1) तथा (2) से $\log 2 = 0.6932$ [प्रश्न (1) से]

उदाहरण 2. निम्न तालिका से सिम्पसन नियम द्वारा $\int_{0.5}^{1.1} xy\,dx$ का मान ज्ञात करें।

x	0.5	0.8	1.1
y	0.4804	0.7262	0.9281
xy	$0.5 \times 0.4804 = 0.24020$	$0.8 \times 0.7262 = 0.58096$	$1.1 \times 0.9281 = 1.02091$

हल : यहाँ $a = 0.5,\ b = 1.1$ तथा $n = 2$ [∵ कोटियों की संख्या तीन है]

$$\therefore \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.1-0.5}{2} = \frac{0.6}{2} = 0.3$$

अब $f(x) = xy$ के लिए

$$\therefore \quad \int_{0.5}^{1.1} xy\,dx = \frac{h}{3}[(F+L) + 2\times O + 4E]$$

$$= \frac{0.3}{3}[(0.24020 + 1.02091)] + 2\times 0 + 4\times 0.58096]$$

$$= 0.1\times [1.26111 + 2.32384]$$

$$= 0.1\times 3.58495 = 0.358495$$

उदाहरण 3. सिम्पसन की $\left(\frac{1}{3}\right)$ विधि से $h = 0.25$ लेते हुए $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान ज्ञात करें।

हल : यहाँ $y = \frac{1}{1+x^2},\ a = 0,\ b = 1$ तथा $h = 0.25 = \frac{1}{4}$

अतः निम्नानुसार तालिका बनाने पर

x	x_1 $a = 0$	$x_2 = a+h$ $= 0+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$x_3 = a+2h$ $= 0+2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	$x_4 = a+3h$ $= 0+3\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$x_5 = a+4h$ $= 0+4\times\frac{1}{4} = 1$
$y = \frac{1}{1+x^2}$	1	$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{17}$	$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$	$\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{25}$	$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1}\right)^2} = \frac{1}{2}$
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

अब $\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}[(F+L) + 2\times O + 4E]$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{h}{3}[(y_0+y_4) + 2\times y_2 + 4(y_2+y_3)]$$

$$= \frac{1}{4\times 3}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right) + 2\times\frac{4}{5} + 4\times\left(\frac{16}{17}+\frac{16}{25}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2} + \frac{8}{5} + \frac{2688}{425}\right] = \frac{1}{12}\times\frac{3}{2} + \frac{1}{12}\times\frac{8}{5} + \frac{1}{12}\times\frac{2688}{425} = \frac{1}{8} + \frac{2}{15} + \frac{672}{1275}$$

$$= 0.125 + 0.133 + 0.527 = 0.785$$

उदाहरण 4. नीचे दी गई तालिका की सहायता से सिम्पसन के $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम का प्रयाग कर $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ का मान ज्ञात प्राप्त करें

$h = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
e^{-x^2}	1	1.0101	1.0408	1.09422	1.1735	1.2840	1.4333	1.6323

0.8	0.9	1
1.8965	2.2479	2.7183

हल : $a = 0,\ b = 1,\ h = 0.1,\ y = e^{-x^2}$

सूत्र से, $\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4 \times E]$

$$= \frac{0.1}{3}[(1 + 2.71831) + 2(1.0408 + 1.1735 + 1.4333 + 1.8965) + 4(1.0101 + 1.0942 + 1.2840 + 1.6323 + 2.2479)]$$

$$= \frac{0.1}{3}[3.7183 + 2 \times 5.5441 + 4 \times 7.2685]$$

$$= \frac{0.1}{3}[3.7183 + 11.0882 + 29.0740]$$

$$= \frac{0.1}{3} \times 43.8805 = 1.4627$$

उत्तर

उदाहरण 5. एक नदी 80 मीटर चौड़ी है। एक किनारे से x दूरी पर गहराई y मीटरों में निम्न सारणी में दी गई है तो नदी के अनुप्रस्थ परिच्छेद का लगभग क्षेत्रफल निकालें।

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3

हल : यहाँ

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8

$n = 8$ तथा कोटियों की संख्या 9, जो विषम है। अतः सिम्पसन नियम का प्रयोग होगा।

यहाँ $a = 0,\ b = 80,\ h =$ प्रत्येक पट्टी की चौड़ाई $= 10$ m

$F =$ प्रथम कोटि $y_0 = 0$

$L =$ अन्तिम कोटि $y_8 = 3$

विषम कोटियों का योग $O = y_2 + y_4 + y_6 = 7 + 12 + 14 = 33$

सम कोटियों का योग $E = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 = 4 + 9 + 15 + 8 = 36$

$\therefore$ क्षेत्रफल $A = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$ वर्ग मीटर

$$= \frac{10}{3}[(0 + 3) + 2 \times 33 + 4 \times 36] \text{ वर्ग मीटर}$$

$$= \frac{10}{3}[3 + 66 + 144]$$

$$= \frac{10}{3} \times 213 \text{ वर्ग इकाई} = 710 \text{ वर्ग मीटर}$$

उदाहरण 6. एक ठोस जो x-अक्ष, रेखा $x = 0$ तथा एक वक्र जो निम्न बिंदुओं से होकर जाता है, के परित: परिक्रमण करने से बनता है।

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	1.0000	0.9896	0.9589	0.9089	0.8415

तो सिम्पसन के नियम से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।

हल : यहाँ $a = 0,\ b = 1,\ h = 0.25$

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	1.0000	0.9896	0.9589	0.9089	0.8415
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

प्रथम कोटि $y_0 = 1$ $\quad \therefore \quad y_0^2 = 1$

अंतिम कोटि $y_4 = 0.8145$ $\quad \therefore \quad y_4^2 = (0.8145)^2$

विषम कोटि $y_2 = 0.9589$ $\quad \therefore \quad y_2^2 = (0.9589)^2$

सम कोटि $y_1 = 0.9896$ $\quad \therefore \quad y_1^2 = (0.9896)^2$

$y_3 = 0.9089$ $\quad \therefore \quad y_3^2 = (0.9089)^2$

$\therefore \quad F = 1, \quad L = (0.8145)^2$

अब $O = y_2^2 = (0.9589)^2,\ E = y_1^2 + y_3^2 = (0.9896)^2 + (0.9089)^2$

जनित ठोस का आयतन $= \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$

$$= \pi \times \frac{0.25}{3}[\{1 + 0.8145)^2\} + 2 \times (0.9589)^2$$

$$+ 4 \times \{0.9896)^2 + (0.9089)^2\}]$$

$$= \frac{0.25\pi}{3}[(1 + 0.6634) + 2 \times .9195 + 4 \times (0.9793 + 0.8261)]$$

$$= 0.2619\ [1.6634 + 1.8390 + 4 \times 1.8054] \text{ घन इकाई}$$

$$= 0.2619\ [1.6634 + 1.8390 + 7.2216] \text{ घन इकाई}$$

$$= 0.2619 \times 10.7240 \text{ घन इकाई}$$

$$= 2.80861 \text{ घन इकाई}$$

उत्तर

ों के सूत्र में y^2 आया है अत: कोटियों का वर्ग लिया गया है।

. एक मोटर साइकिल का वेग (किमी०/मिनट), जो कि विरामावस्था से चले निश्चित समयांतरालों में t मिनट प

त् है :

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

According to New S
Approved by U
2020

सिम्पसन के नियम से 20 मिनट में चली गई दूरी ज्ञात करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

हल : मोटर साइकिल विरामवस्था से चलना प्रारंभ करती है, अतः यदि $t = 0$ तो $v = 0$

∴ कोटियों की सं० $= 11$, $a = 0$, $b = 20$

अतः $n = 10$ ∴ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{20-0}{10} = 2$

पुनः $\frac{dS}{dt} = v$ या $dS = v\,dt$ ∴ $\int dS = \int v\,dt \Rightarrow S = \int v\,dt$

अतः t तथा v में तालिका बनेगी।

अतः

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	0	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0
	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}

अब, $F = v_0 = 0$ $L = v_{10} = 0$

$O = v_2 + v_4 + v_6 + v_8 = 18 + 29 + 20 + 5 = 72$

$E = v_1 + v_3 + v_5 + v_7 + v_9 = 10 + 25 + 32 + 11 + 2 = 80$

अतः सिम्पसन नियम से, $S = \int_0^{20} v\,dt = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$ किमी

$= \frac{2}{3}[0 + 0 + 2 \times 72 + 4 \times 80]$ किमी $= \frac{2}{3}[144 + 320]$ किमी

$= \frac{2}{3} \times 464$ किमी $= \frac{928}{3} = 309.3$ किमी उत्तर

उदाहरण 8. किसी बिन्दु A से s दूरी पर एक कण के वेग v निम्न सारणी में दिए गए हैं। 60 मीटर चलने में लगा समय ज्ञात करें।

s (m)	0	10	20	30	40	50	60
v (m/s)	47	58	64	65	61	52	38

हल : यहाँ $a = 0$, $b = 60$, $h = 10$, $n = 6$

हम जानते हैं $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow \int dt = \int \frac{ds}{v} \Rightarrow t = \int \frac{1}{v}\,ds$ ∴ $t = \int_0^{60} \frac{1}{v}\,ds$

∴ हमें s तथा $\frac{1}{v}$ के बीच तालिका बनानी होगी।

अतः

s	0	10	20	30	40	50	60
v	47	58	64	65	61	52	38
$\frac{1}{v}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{61}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{38}$
	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6

अब F = प्रथम कोटि $v_0 = \frac{1}{47}$; L = अंतिम कोटि $v_6 = \frac{1}{38}$; $O = v_2 + v_4 = \frac{1}{64} + \frac{1}{61}$

$E = v_1 + v_3 + v_5 = \frac{1}{58} + \frac{1}{65} + \frac{1}{52}$

अतः सिम्पसन नियम से $t = \int_0^{60} \frac{1}{v}\, ds = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4 \times E]$

$$= \frac{10}{3}\left[\left(\frac{1}{47} + \frac{1}{38}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{61}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{58} + \frac{1}{65} + \frac{1}{52}\right)\right]$$

$$= \frac{10}{3}[(0.0213 + 0.0263) + 2(0.0156 + 0.0164) + 4(0.0172 + 0.0154 + 0.0192]$$

$$= \frac{10}{3}[0.0476 + 0.0640 + 0.2072] = \frac{10}{3} \times 0.3188 = 1.06 \text{ सेकण्ड}$$

उदाहरण 9. यदि $e^0 = 1,\ e^1 = 2.72,\ e^2 = 7.39,\ e^3 = 20.09,\ e^4 = 54.60$ तो $\int_0^4 e^x dx$ का सन्निकट मान सिम्पसन नियम द्वारा निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]**

हल : दिया गया है : $y = e^x$ तथा $a = 0, \quad b = 4$

यदि $x = 4$ हो तो $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$

अब $h = 1$ लेकर x के मानों के संगत $y = e^x$ की तालिका

x	0	1	2	3	4
$y = e^x$	1	2.72	7.39	20.09	54.60
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

सिम्पसन नियम से $\int_0^4 e^x dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4 \times (y_1 + y_3) + 2 \times y_2]$

$$= \frac{1}{3}[(1 + 54.60) + 4(2.72 + 20.09) + 2 \times 7.39]$$

$$= \frac{1}{3}[55.60 + 4 \times 22.81 + 14.78]$$

$$= \frac{1}{3}[55.60 + 91.24 + 14.78]$$

$$= \frac{1}{3}[161.62] = \frac{1}{3} \times 161.62 = 53.873$$

उदाहरण 10. सिम्पसन के नियम का प्रयोग कर $\int_1^5 \sqrt{x - \frac{1}{x}}\, dx$ का मान 5 कोटियाँ लेकर ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्न से कोटियों की संख्या $= 5$

अतः बराबर भागों की संख्या $n = 4$

तथा $a = 1,\ b = 5 \qquad \therefore \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

अतः $x = 1, 2, 3, 4, 5$ लेकर $y = \int_1^5 \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ के मान के लिए सारणी

x	$x_0 = a$	$x_1 = a + h = 2$	$x_2 = a + 2h = 3$	$x_3 = a + 3h = 4$	$x_4 = a + 4h = 5$
$y = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$	$\sqrt{1 - \frac{1}{1}} = 0$	$\sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.22$	$\sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1.63$	$\sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}} = 1.93$	$\sqrt{5 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{24}{5}} = 2.19$
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

सिम्पसन नियम से

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\{(F+L)+2\times O+4\times E\}$$

$$= \frac{h}{3}\{(y_0+y_4)+2y_2+4\times(y_1+y_3)\}$$

$$= \frac{1}{3}\{(0+2.19)+2\times 1.63+4(1.22+1.93)\}$$

$$= \frac{1}{3}\{2.19+3.26+12.60\}$$

$$= \frac{1}{3}\times 18.05 = 6.016$$

उत्तर

उदाहरण 11. $\int_1^5 \frac{dx}{1+x}$ का मान समलंबी नियम से निकालें।

हल : समलंबी नियम से $\int_a^b dx = \frac{h}{2}[(y_0+y_n)+2(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1})]$

यहाँ $a=1, b=5, y=\frac{1}{1+x}$, माना $n=4$ तो $h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1$

अब $h=1$ लेकर x के विभिन्न मानों के लिए $y=\frac{1}{1+x}$ के लिए सारणी निम्नवत् है :

x	$x_0=a$ $=1$	$x_1=a+h$ $=2$	$x_2=a+2h$ $=3$	$x_3=a+3h$ $=4$	$x_4=a+4h$ $=5$
$y=\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

अब सूत्र से $\int_1^5 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{2}[(y_0+y_4)+2(y_1+y_2+y_3)]$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{6}+2\left(\frac{20+15+12}{60}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+2\times\frac{47}{60}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{47}{30}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times\left[\frac{20+47}{30}\right] = \frac{1}{2}\times\frac{67}{30} = \frac{67}{60} = 1.116$$

उदाहरण 12. दी गई सारणी की सहायता से x-अक्ष, वक्र समलंबी नियम से $y=f(x)$ तथा $x=7.47$ एवं $x=7.52$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालिए।

x	7.47	7.48	7.49	7.50	7.51	7.52
$f(x)$	1.93	1.95	1.98	2.01	2.03	2.06
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

हल : यहाँ $h = 7.48 - 7.47 = 0.01$

अतः क्षेत्रफल $= \int_{7.47}^{7.52} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_5) + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)]$

$= \frac{0.01}{2}[(1.93 + 2.06) + 2(1.95 + 1.98 + 2.01 + 2.03)]$

$= 0.005[3.93 + 2 \times (6.97)] = 0.005[3.99 + 15.94]$

$= 0.005 \times 19.93 = 0.09965$ वर्ग इकाई

उदाहरण 13. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ का मान सिम्पसन के $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम (द्वितीय नियम) से निकालें तथा इसकी सहायता से π का लगभग मान बतायें।

हल : यहाँ $a = 0, b = 1, n = 3, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$ सारणी रूप में फलन का मान लेने पर

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$y = \frac{1}{1+x^2}$	1	$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{10}$	$\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{13}$	$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
	y_0	y_1	y_2	y_3

सिम्पसन के $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम से

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{8}h[(y_0 + y_3) + 3(y_1 + y_2)]$$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{1}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2} + 3 \times \frac{207}{130}\right] = \frac{1}{7}[1.5 + 3 \times 1.5923]$$

$$= \frac{1}{8} \times 6.2769 = 0.7846$$

पुनः $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,d = [\tan^{-1} x]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

अतः (1) तथा (2) से $\frac{\pi}{4} = 0.7846 \quad \therefore \pi = 4 \times 0.7846 = 3.1384$

महत्वपूर्ण सूत्र

1. सिम्पसन का $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम (Simpson's Third Rule) या सिम्पसन नियम या सिम्पसन का प्रथम नियम

(i) सन्निकट समाकलन $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$

According to New S
Approved by U
2020

$$= \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1})$$

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$, जहाँ n = बराबर भागों की संख्या

(ii) सिम्पसन सूत्र से क्षेत्रफल $A = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$ वर्ग इकाई

जहाँ h = दो कोटियों के बीच की उभयनिष्ठ दूरी
F = प्रथम कोटि (First ordinate)
L = अंतिम कोटि (Last ordinate)
O = शेष विषम कोटियों की लंबाइयों का योग (Sum of remaining odd ordinates)
E = सम कोटियों की लंबाइयों का योग (Sum of even ordinates)

2. सिम्पसन का द्वितीय नियम या $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम

$$\int_a^b y\,dx = \frac{3}{8}h[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_6 + \ldots + y_{n-3})]$$

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$ = दो क्रमागत कोटियों के बीच की दूरी तथा n तीन का गुणज है तथा $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ क्रमशः $x = a, a + h, \ldots, b$ पर कोटियाँ हैं।

3. समलंबी नियम (Trapezoidal Rule) : यदि दिया गया क्षेत्र n बराबर भागों में बँटा हो, तो

(i) सन्निकट समाकलन से $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$,

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$, तथा n = बराबर भागों की संख्या है।

(ii) क्षेत्रफल $A = \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}]$ वर्ग इकाई,

जहाँ h = दो क्रमागत कोटियों के बीच की दूरी तथा $y_0, y_1, \ldots y_n$; $x = a, a + h, \ldots, b$ पर कोटियाँ हैं।

प्रश्नावली 12.1

1. सिम्पसन के एक-तिहाई नियम से एक मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आकार के बारे में निम्नलिखित बातें मालूम हैं : कोटियाँ 2, 9, 18, 40, 70 मीटर तथा उभयनिष्ठ दूरी = 30 मीटर।
2. सिम्पसन के नियम का प्रयोग कर नीचे दी गई विमाओं से जमीन के एक खेत का क्षेत्रफल ज्ञात करें—
   कोटियाँ : 23, 19, 14, 11, 12.5, 16, 19, 20, 20
   उभयनिष्ठ दूरी = 1.5
3. सिम्पसन नियम से $\int_0^6 y\,dx$ का मान निम्न तालिका से निकालें—

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0.14	0.16	0.18	0.19	0.20	0.22	0.23

[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]

4. सिम्पसन के $\left(\frac{1}{3}\right)$ सूत्र से $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ का दशमलव के तीन सार्थक अंकों तक मान निकालें।

5. (i) अन्तराल $x = 1$ से $x = 5$ को चार बराबर भागों में बाँटकर सिम्पसन के नियम द्वारा $\int_1^5 \frac{dx}{1+x}$ का मूल्य ज्ञात करें।

(ii) सिम्पसन के नियम से $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x^2}$ का मान ज्ञात करें।

6. किसी बिन्दु O से S दूरी पर एक काण के वेग V निम्न तालिका में दिए गए हैं। 60 मीटर चलने में लगा समय ज्ञात करें।

S मीटर में	0	10	20	30	40	50	52	60
V मीटर/सेकण्ड	47	58	64	65	61			38

7. सिम्पसन नियम के द्वारा $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान 0 से 1 को 4 समदूरस्थ अंतराल में बाँटकर निकालें। इस तरह π का मान 4 दशमलव स्थान तक निकालें।

8. अंतराल 0 से 1 को चार बराबर भागों में बाँटकर $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ का मान निकालें तथा इस तरह $\log_e 2$ का मान निकालें।

9. समलंबी नियम के प्रयोग से $n = 6$ के लिए $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ का सन्निकट मान ज्ञात करें।

10. समलंबी नियम द्वारा निम्न सीमाओं के भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करें :

कोटियाँ : 2, 2.4, 2.7, 2.8, 3, 2.6 तथा 2.1 मात्रक, कोटियों के बीच की दूरी = 5 मात्रक।

11. सिम्पसन के नियम का प्रयोग कर $\int_1^5 \sqrt{x - \frac{1}{x}}\,dx$ का मान 5 कोटियाँ लेकर ज्ञात कीजिए।

12. $\int_1^5 \frac{dx}{1+x}$ का मान समलंबी नियम से निकालें।

13. एक नदी 80 मीटर चौड़ी है। गहराई y एक किनारे से x दूरी पर मीटरों में निम्न सारणी में दी गई है तो नदी के अनुप्रस्थ परिच्छेद का लगभग क्षेत्रफल निकालें।

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3

14. $\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}$ का मान सिम्पसन के $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम से अंतराल को 6 बराबर भागों में बाँटकर निकालें। इसकी सहायता से π के लगभग मान ज्ञात करें।

15. निम्न तालिका की सहायता से वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा $x = 0$ और $x = 6$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0.148	0.161	0.176	0.190	0.204	0.217	0.230

✍ बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. समलंबी नियम है—

(a) $\frac{h}{2}[y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n]$

(b) $\frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n]$

(c) $\frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots)]$

(d) कोई नहीं

सिम्पसन नियम है—

8. (a) $\frac{h}{3}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n+1})$

(b) $\frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})]$

(c) $\frac{h}{3}[y_1 + 2(y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n+1})]$

(d) कोई नहीं, जहाँ n सम है।

सिम्पसन नियम से $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ का मान जबकि $h = \frac{1}{2}$

9. (a) $\log 2$ (b) 2 (c) $\frac{7}{10}$ (d) $\frac{1}{5}$

यदि $f(0) = 1, f(1) = 2.72$ तो समलंबी नियम से $\int_0^1 f(x)\,dx$ का मान है—

4. (a) 3.72 (b) 1.86 (c) 1.72 (d) 0.86

सिम्पसन $\frac{1}{3}$ नियम $\int_a^b f(x)\,dx$ का मान ज्ञात करने के लिए अंतराल $[a, b]$ को बाँटा जाता है—

5. (a) समान चौड़ाई के सम भागों में (b) समान चौड़ाई के विषम भागों में
(c) भागों की संख्या कुछ भी हो सकती है (d) कोई नहीं

यदि $e = 2.72, e^2 = 7.34, e^3 = 20.09, e^4 = 54.60$ तो $\int_0^4 e^x\,dx$ का सिम्पसन नियम से मान होगा—

6. (a) 53.60 (b) 53.70 (c) 53.873 (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. 3040 वर्ग मीटर **2.** 199 वर्ग इकाई **3.** 1.13 **4.** 0.693
5. (i) 1.093 (ii) 1.2996 **6.** 1.06 सेकण्ड
7. 0.7854, $\pi = 3.1416$ **8.** 0.69, $\log_e 2 = 0.69$
9. 0.6933 **10.** 77.75 वर्ग मात्रक **11.** 6.01 **12.** 1.116
13. 710 वर्ग मीटर **14.** 0.785395, 3.14158 **15.** 1.1362

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (b) **2.** (b) **3.** (c) **4.** (b) **5.** (a) **6.** (c)

□□□

अध्याय

13

MATLAB का परिचय (Introduction to MATLAB)

MATLAB : यह MATrix LABoratory का संक्षिप्त रूप है। इसे एक उच्च-स्तरीय प्रोग्रामिंग भाषा और सॉफ्टवेयर पर्यावरण के रूप में विकसित किया गया है, जो मुख्यत: गणितीय और वैज्ञानिक गणनाओं के लिए उपयोग होता है। इसे क्लीव मोलर (Cleve Moler) ने 1970 के दशक में विकसित किया, ताकि छात्रों को प्रोग्राम लिखे बिना जटिल गणनाएँ सरल और तेजी से करने में मदद मिले। 1984 में, मोलर ने MathWorks नामक कंपनी की स्थापना की, जिसने MATLAB को एक व्यावसायिक उत्पाद के रूप में प्रस्तुत किया।

परिभाषा : MATLAB एक उच्च स्तरीय प्रोग्रामिंग भाषा (Language) तथा वातावरण (Environment) है, जिसका मुख्य उपयोग संख्यात्मक गणना, डेटा विश्लेषण, एल्गोरिंद्म विकास तथा डेटा विजुअलाइलेजशन के लिए किया जाता है। इसके कई अनुप्रयोगों में गणितीय मॉडलिंग, डेटा विश्लेषण, सिमुलेशन और विजुअलाइलेजशन शामिल हैं।

इंजीनियर, वैज्ञानिक और शोधकर्त्ता इसका उपयोग जटिल गणनाओं को सहज और सुविधाजनक हल प्राप्त करने के लिए करते हैं। आज MATLAB का उपयोग शैक्षिक, इंजीनियरिंग, वित्त सिग्नल प्रोसेसिंग और रोबोटिक्स जैसे उद्योगों में किया जाता है। यह प्रारम्भिक उपयोगकर्त्ताओं को जटिल गणितीय अवधारणाओं के अन्वेषण एवं व्यवहारिक समस्याओं के हल का एक सहज तरीका प्रदान करता है।

MATLAB की मुख्य विशेषतायें (Features of MATLAB)

MATLAB की कुछ प्रमुख विशेषतायें निम्नलिखित हैं—

1. मैट्रिक्स आधारित गणना : MATLAB का प्राथमिक डेटा प्रकार मैट्रिक्स है। यह जटिल वेक्टर और मैट्रिक्स संचालन को कुशलतापूर्वक प्रबंधित करता है।

2. उच्च-स्तरीय प्रोग्रामिंग भाषा : MATLAB स्क्रिप्ट और फंक्शन लिखने के लिए सरल और शक्तिशाली प्रोग्रामिंग भाषा है।

3. बिल्ट-इन फंक्शंस : MATLAB में गणितीय कार्यों के लिए विस्तृत पुस्तकालय हैं, जैसे लीनियर एल्जेब्रा, सांख्यिकी, कलन और अनुकूलन (optimization) आदि।

4. डेटा विजुअलाइजेशन : MATLAB में 2D और 3D ग्राफ और प्लॉट बनाने के लिए उपकरण उपलब्ध हैं। यह डेटा को समझने और प्रस्तुत करने में मदद करता है।

5. टूलबॉक्स (Toolboxes) : MATLAB में विशेष ऐड-ऑन उपलब्ध हैं। जैसे—सिग्नल प्रोसेसिंग, मशीन लर्निंग और कंट्रोल सिस्टम्स।

6. सिमुलिंक (Simulink) : यह ग्राफिकल मॉडलिंग प्लेटफार्म है जो ग्राफिकल इंटरफेस के माध्यम से गतिशील प्रणालियों (Dynamic System) का सिमुलेशन करने में मदद करता है, जो बहुत सारे उद्योगों के लिए उपयोगी है।

7. क्रॉस-प्लेटफॉर्म संगतता : MATLAB विंडोज Windows), मैक (MAC) और लिनक्स ऑपरेटिंग सिस्टम (LINUX Operating System) पर काम कर सकता है।

MATLAB पर्यावरण का अवलोकन

MATLAB में काम शुरू करने के लिए, इसे MathWorks की आधिकारिक वेबसाइट से डाउनलोड और इंस्टॉल किया जा सकता है। इंस्टाल करने के बाद MATLAB का डेस्कटॉप पर्यावरण दिखाई देता है, जिसमें निम्नलिखित घटक शामिल हैं—

प्रमुख घटक (Key Components)

1. कमांड विंडो : यह MATLAB का सबसे सामान्य हिस्सा है, जहाँ पर आदेशों (Commands) को तुरंत टाइप और निष्पादित किया जा सकता है।

2. एडिटर : यहाँ पर स्क्रिप्ट्स और फंक्शन्स लिखे जाते हैं जिन्हें भविष्य के उपयोग के लिए सेव (save) किया जा सकता है।

3. वर्कस्पेस : यह सत्र के दौरान बनाए गए सभी वेरिएबल्स का ट्रैक रखता है।

4. फिगर विंडो : यह प्लॉट और विजुअलाइजेशन को प्रदर्शित करता है।

5. कमांड हिस्ट्री : यह MATLAB द्वारा निष्पादित सभी पिछले कमांड का रिकॉर्ड रखता है।

MATLAB के अनुप्रयोग (Applications of MATLAB)

MATLAB का उपयोग कई क्षेत्रों में किया जाता है, जिसमें निम्नलिखित शामिल है लेकिन ये सीमित नहीं हैं :

1. गणित : MATLAB का उपयोग गणित में जटिल समीकरणों को हल करने, मैट्रिक्स ऑपरेशन्स करने और गणितीय अवधारणाओं जैसे वेक्टर, इंटीग्रल, डेरिवेटिव और समकरणों के सिस्टम को विजुअलाइज करने के लिए किया जाता है।

2. इंजीनियरिंग : इंजीनियर MATLAB का उपयोग विभिन्न उप-क्षेत्रों में सिमुलेशन, मॉडलिंग और विश्लेषण के लिए करते हैं, जैसे—विद्युत अभियंत्रण, यांत्रिक अभियंत्रण, नागरिक अभियंत्रण, एयरोस्पेश अभियंत्रण और नियंत्रण प्रणालियाँ। यह सिस्टम डिजाइन, एल्गोरिदम टेस्टिंग, ऑप्टिमाइजेशन और बड़े डेटा सेट्स का विश्लेषण करने में विशेष रूप से उपयोगी है।

3. विज्ञान : वैज्ञानिक अनुसंधान में MATLAB का उपयोग सांख्यिकीय विश्लेषण, डेटा विजुअलाइजेशन, भौतिक प्रणालियों का सिमुलेशन और कंप्यूटेशनल बायोलॉजी जैसे कार्यों के लिए किया जाता है। यह भौतिक विज्ञानी, जैविक वैज्ञानिक और अन्य वैज्ञानिकों द्वारा प्रयोगात्मक डेटा प्रोसेस करने और सिमुलेशन चलाने के लिए व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है।

4. उद्योग : कई उद्योग, जिनमें ऑटोमेटिव, एयरोस्पेस, दूरसंचार और वित्त शामिल हैं, MATLAB का उपयोग सिस्टम डिजाइन, वित्तीय मॉडलिंग और मशीन लर्निंग जैसे कार्यों के लिए करते हैं। उदाहरण के लिए, ऑटोमेटिव इंजीनियरिंग में MATLAB का उपयोग वाहन गतिशीलता का सिमुलेशन करने और नियंत्रण प्रणालियों को डिजाइन करने के लिए किया जाता है। दूरसंचार में इसे सिग्नल प्रोसेसिंग और नेटवर्क विश्लेषण के लिए उपयोग किया जाता है।

5. अकादमिक अनुसंधान : यह विश्वविद्यालयों और शोध सेस्थानों में व्यापक रूप से सिस्टम मॉडलिंग और शिक्षण के लिए उपयोग किया जाता है।

6. वित्तीय मॉडलिंग : MATLAB का उपयोग जोखिम विश्लेषण, पोर्टफालियो ऑप्टिमाइजेशन और वित्तीय पूर्वानुमान के लिए क्वांटिटेटिव वित्त में किया जाता है।

7. डेटा विज्ञान और मशीन लर्निंग : इसका उपयोग डेटा विश्लेषण, मशीन लर्निंग और ए०आई० से संबंधित कार्यों के लिए किया जाता है।

विशिष्ट उदाहरण (Specific Examples)

1. गणित : MATLAB जटिल गणितीय संचालन करने में उत्कृष्ट है। उदाहरण के लिए, यह रैखिक समीकरणों के सिस्टम को हल कर सकता है, कैलकुलस ऑपरेशन्स (जैसे डेरिवेटिव और समाकलन) कर सकता है, और मैट्रिक्स के ईजेनवैल्यू और ईजेनवेक्टर की गणना कर सकता है।

उदाहरण : रैखिक समीकरणों निकाय का हल—

```
Matlab                          Copy code
A =[2 3; 1 4];                  % Coefficient matrix
B =[5; 6];                      % Right-hand side vector
X = A \ B;                       % Solution to the system
```

यह कोड रैखिक समीकरण निकाय का हल देता है।

2. इंजीनियरिंग : MATLAB का उपयोग इंजीनियरिंग क्षेत्रों में सिमुलेशन और डिजाइन के लिए व्यापक रूप से किया जाता है। इस उपयोग मॉडल बनाने और परीक्षण करने, प्रदर्शन को अनुकूलित करने और परिणामों का विश्लेषण करने के लिए किया जाता है।

उदाहरण : एक सरल नियंत्रण प्रणाली का सिमुलेशन (Simulating a simple control system)

```
Matlab                          Copy code
num = [1];                      % Numerator of the transfer function
den = [1 5 6];                  % Denominator of the transfer function
sys = tf(num, den);             % Create the transfer function
step(sys);                      % Plot the step response
```

3. विज्ञान : MATLAB वैज्ञानिकों को डेटा प्रोसेसिंग विजुअलाइजेशन, सिमुलेशन चलाने और भौतिक घटनाओं को मॉडलिंग करने में मदद करता है। इसे अक्सर भौतिकी, रसायनशास्त्र और जैविकी जैसे क्षेत्रों में अनुसंधान उद्देश्यों के लिए उपयोग किया जाता है।

उदारहण : साइन वेव को पलॉट करना (Plotting Sine Wave) :

```
Matlab                          Copy code
t = 0:0;01:2*pi;                % Time vector
y = sin(t);                     % sine function
plot(t, y);                     % Plot the sine wave
xlabel('Time (s)');             % Label on x-axis
ylabel('Amplitude');            % Label on y-axis
title('Sine Wave');             % Title of graph
```

4. उद्योग : उद्योग में MATLAB का उपयोग एलगोरिदम डिजाइन और परीक्षण, सिस्टम सिमुलेशन और बड़े डेटा प्रोसेसिंग के लिए किया जाता है। उद्योग MATLAB का उपयोग वित्तीय मॉडलिंग से लेकर मैन्युफैक्चरिंग में पूर्वानुमान रखरखाव तक कई कार्यों के लिए करते हैं।

उदाहरण : वित्तीय मॉडलिंग (Financial Modelling); चक्रवृद्धि ब्याज की गणना (Calculating Compound Interest)

```
Matlab                                          Copy code
principal = 1000;                               % Initial amount
rate = 0.05;                                    % Interest rate
time = 10;                                      % Time period (in years)
amount = principal × (1 + rate)^time;           % Compound interest formula
disp(amount);                                   % Display the final amount
```

निष्कर्ष (Conclusion)

इस तरह हम देखते हैं कि MATLAB गणित, इंजीनियरिंग, विज्ञान और उद्योगों में जटिल समस्याओं को हल करने के लिए एक बहुमुखी और शक्तिशाली उपकरण है। इसकी मैट्रिक्स गणनाओं को संभालने, डेटा को विजुअलाइज करने और सिमुलेशन चलाने की क्षमता इसे विभिन्न क्षेत्रों में एक आवश्यक उपकरण बनाती है। चाहे शैक्षिक अनुसंधान हो या औद्योगिक अनुप्रयोग, MATLAB का उपयोग उत्पादकता बढ़ाने, कार्यप्रवाह को सुव्यवस्थित करने और उन्नत एल्गोरिदम के विकास को सक्षम करने के लिए किया जाता है। विस्तृत टूलबॉक्स के साथ MATLAB लगातार विकसित हो रहा है और इसके अनुप्रयोगों का विस्तार हो रहा है, जो बढ़ते हुए चुनौतियों के समाधान में मदद कर रहा है।

□□□

According to New
Approved by
NCERT 202

खण्ड-4 : निर्देशांक ज्यामिति

अध्याय
14

सरल रेखा
(Straight Line)

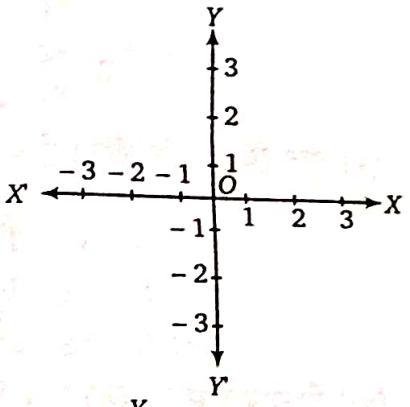
फ्रेंच गणितज्ञ आर० डेकार्टे ने 1637 ई० में अपनी पुस्तक La Geometric में बीजगणित के प्रयोग से ज्यामितीय समस्याओं का विश्लेषण किया। यह विषय अब नियामक ज्यामिति के नाम से जाना जाता है।

इसमें हम दो संख्याओं का प्रयोग कर जिसे नियमक कहा जाता है, किसी बिंदु की स्थिति द्विविमीय आकाश में निर्धारित करते हैं, यह ज्यामितीय आकृतियों के बीजगणितीय विश्लेषण में सहायक होता है।

14.1 परिभाषाएँ (Definitions)

नियामक अक्ष (Co-ordinate axes)

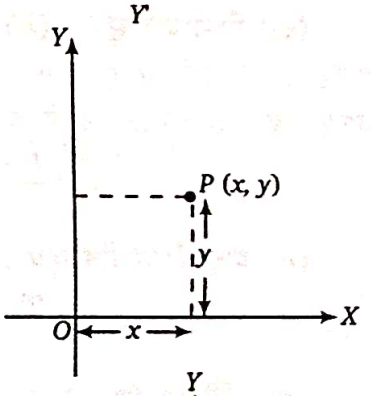
माना XOX' तथा YOY' दो परस्पर लंब रेखायें हैं जो एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। O को मूलबिंदु, $X'OX$ को x-अक्ष तथा YOY' को y-अक्ष तथा दोनों अक्षों को नियामक अक्ष कहा जाता है।



नियामक (Co-ordinates)

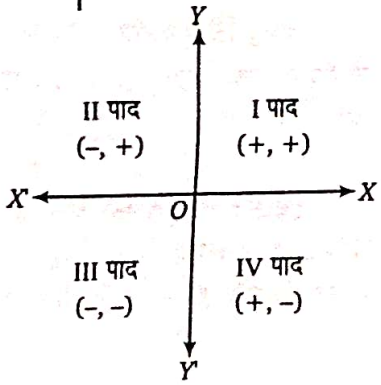
किसी द्विविमीय आकाश में किसी बिंदु की स्थिति इन अक्षों के सापेक्ष दिखाने के लिए दो संख्यायें जिन्हें नियामक कहते है, ली जाती हैं जो बिंदु की अक्षों से दूरी को बताता है।

y-अक्ष से बिंदु की दूरी को x-नियामक तथा x-अक्ष से दूरी को y-नियामक कहते हैं।



पाद (Quadrants)

नियामक अक्ष XOX' तथा YOY' को चार भागों XOY', $X'OY$, $X'OY'$ तथा $Y'OX$ में बाँटते हैं जिन्हें क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय एवं चतुर्थ पाद कहते हैं। OX तथा OY को क्रमशः धनात्मक x-अक्ष तथा y-अक्ष एवं OX' एवं OY' को क्रमशः ऋणात्मक x-अक्ष तथा y-अक्ष के रूप में लिया जाता है।



कुछ मानक परिणाम (Some Standard Results)

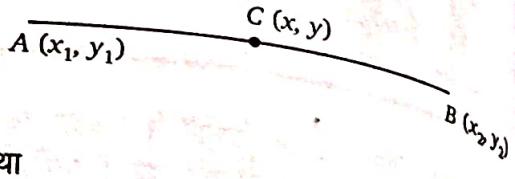
(i) दो बिंदुओं के बीच की दूरी : यदि $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ दो बिंदु हों, तो उनके बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(ii) बिंदु की मूलबिंदु से दूरी : मूलबिंदु $O(0, 0)$ से बिंदु $P(x, y)$ की दूरी

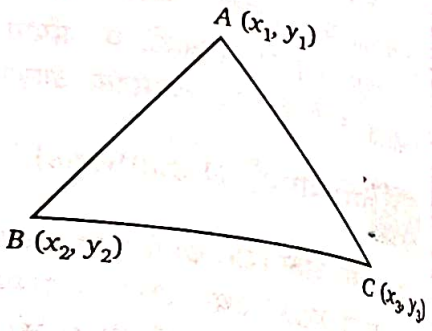
$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(iii) मध्य बिंदु सूत्र : यदि $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ दो बिंदु हों, तो उनके मध्य बिंदु C के नियामक



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

(iv) त्रिभुज का क्षेत्रफल : यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ किसी ΔABC के शीर्ष हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल



$$\Delta = \frac{1}{2}[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$$

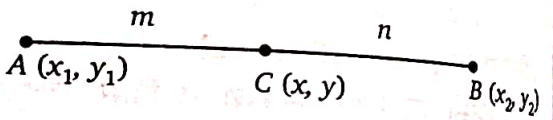
इसे सारणिक रूप में निम्न रूप में लिखा जाता है—

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(v) तीन बिंदुओं के संरेख होने के लिए शर्त : तीन बिंदु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ संरेख होंगे यदि

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(vi) विभाजन सूत्र : (a) अंतः विभाजन सूत्र : माना बिंदु $C(x, y)$ बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाली रेखा AB को $m : n$ में अंतः विभाजित करता है, तो



$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

(b) बाह्य विभाजन सूत्र :

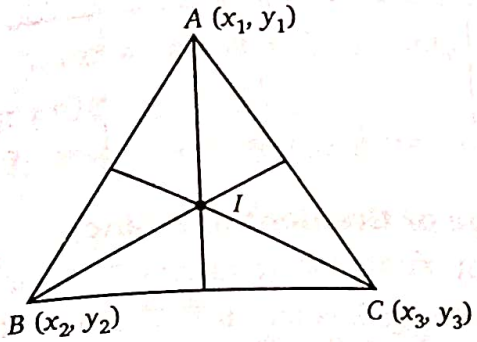
$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \quad y = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}$$

(vii) त्रिभुज का केन्द्रक : यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ किसी ΔABC के शीर्ष बिंदु हों, तो त्रिभुज का केंद्रक $G(x, y)$ के लिए नियामक

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \; y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

(viii) त्रिभुज का अंतः केन्द्र : माना $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ किसी ΔABC के शीर्ष हों तथा a, b, c क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB की लंबाई है तथा अंतःकोण $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ की समद्विभाजक रेखायें बिंदु I पर मिलती हैं, तो I के नियामक

$\left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$ से दिये जाते हैं।



किसी त्रिभुज के अंत:कोणों की समद्विभाजक रेखायें जिस बिंदु पर मिलती हैं, वह बिंदु त्रिभुज का अंत:केन्द्र कहलाता है।

सरल रेखा (Straight Line)

सरल रेखा किसी समतल पृष्ठ पर दो बिन्दुओं के बीच की न्यूनतम दूरी है। यह एकविमीय (One dimensional) होता है क्योंकि इसमें केवल लम्बाई होती है।

14.2 सरल रेखा का समीकरण (Equation of a Line)

किसी सरल रेखा का समीकरण चरों x (भुज) तथा y (कोटि) के बीच एक रैखिक सम्बन्ध (Linear Relation) है, जो उस रेखा के प्रत्येक बिन्दु के नियामकों द्वारा संतुष्ट होता है।

14.2.1 प्रथम घात का समीकरण (First Degree Equation)

प्रथम घात का सामान्य समीकरण $ax + by + c = 0$ से दिया जाता है। यह हमेशा एक सरल रेखा को निरूपित करता है। अत: किसी सरल रेखा का समीकरण $ax + by + c = 0$ से दिया जाता है।

14.2.2 क्षैतिज रेखा (Horizontal Line)

कोई भी सरल रेखा जो x-अक्ष के समान्तर हो या स्वयं x-अक्ष, क्षैतिज रेखा कहलाती है।

ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical Line) :

y-अक्ष के समान्तर कोई भी सरल रेखा या स्वयं y-अक्ष, ऊर्ध्वाधर रेखा कहलाती है।

तिर्यक रेखा (Oblique Line) :

वह सरल रेखा जो न तो क्षैतिज है न ऊर्ध्वाधर, तिर्यक रेखा कहलाती है।

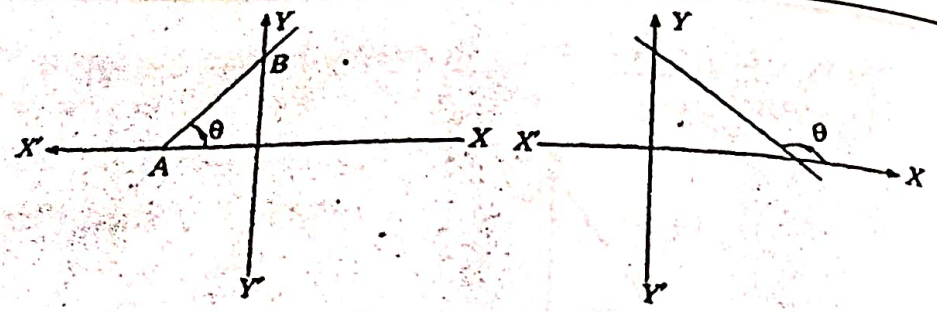
14.2.3 रेखा का झुकाव (Angle of Inclination)

किसी रेखा का झुकाव वह कोण θ है, जो वह सरल रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा, जिसका मापन वामावर्त दिशा (Anticlockwise direction) में होता है, से बनाती है।

स्पष्ट है—

(i) x-अक्ष के समान्तर अथवा x-अक्ष के लिए $\theta = 0$

(ii) y-अक्ष के समान्तर अथवा y-अक्ष के लिए $\theta = \frac{\pi}{2}$



14.2.4 रेखा की ढाल या प्रवणता (Slope or Gradient of a Line)

किसी रेखा AB की ढाल उस कोण (θ) की स्पर्शज्या (tangent) है, जो वह x-अक्ष की धनात्मक दिशा बनाती है अर्थात् यदि किसी सरल रेखा का झुकाव (Inclination) θ हो तो $\tan\theta$ उसकी ढाल या प्रवणता कहलाती है इसे सामान्यत: m से सूचित किया जाता है।

अत: रेखा की प्रवणता $m = \tan\theta$

बिन्दु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाली रेखा की प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

14.2.5 प्रवणता से सम्बन्धित महत्वपूर्ण परिणाम

1. ऊर्ध्वाधर रेखा की ढाल $m = \tan 90° = \infty$

अत: यह परिभाषित नहीं है।

(ii) यदि $m > 0 \Rightarrow \tan\theta > 0 \Rightarrow 0 < \theta < 90° \Rightarrow \theta$ न्यूनकोण है।

(iii) तथा $m < 0 \Rightarrow \tan\theta < 0 \Rightarrow 90° < \theta < 180° \Rightarrow \theta$ अधिक कोण है।

2. यदि रेखाओं l_1 तथा l_2 की प्रवणता क्रमश: m_1 तथा m_2 हों तो

(i) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ (ii) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$

3. यदि सरल रेखा $ax + by + c = 0$ के रूप का हो तो उसकी प्रवणता $= -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = -\frac{a}{b}$

जैसे : $3x + 2y - 5 = 0$ की प्रवणता

$$m = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = -\frac{3}{2}$$

14.3 सरल रेखा के विभिन्न रूप (Various Forms of Equation of a Line)

i) x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण

माना AB x-अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा है जो y-अक्ष को C बिन्दु पर काटती है, जिससे कि

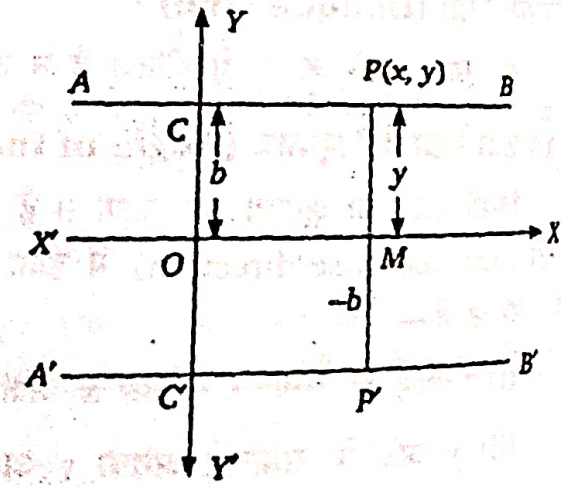
$$OC = b$$

स्पष्ट है AB के सभी बिन्दुओं के लिए

$$y = b$$

अत: यदि $P(x, y)$, AB का कोई बिन्दु है, तो

$$y = b$$



अत: x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण, जो इससे b दूरी पर है तथा x-अक्ष के ऊपर है।

$$y = b$$

इसी प्रकार यदि रेखा $A'B'$, x-अक्ष से नीचे हो तो इसका समीकरण $y = -b$ होगा।

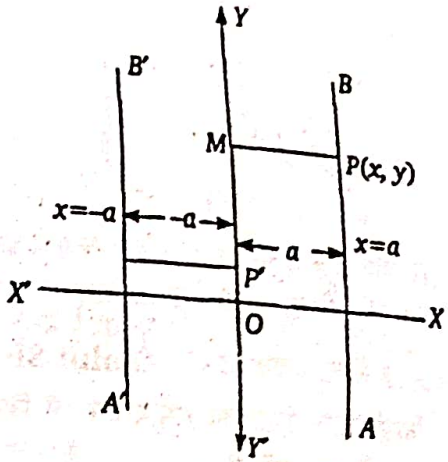
(ii) y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण

माना AB कोई सरल रेखा है, जो y-अक्ष के समान्तर है तथा इससे a दूरी पर स्थित है।

स्पष्ट है AB के प्रत्येक बिन्दु के लिए

$$x = a$$

यदि $P(x, y)$ इस पर कोई बिन्दु हो, जो मूल बिन्दु के दाहिनी ओर हो, तो $x = a$



अत: y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण $x = a$

इसी प्रकार यदि रेखा $A'B'$ मूल बिन्दु के बायीं ओर हो, तो रेखा का समीकरण $x = -a$

(iii) x-अक्ष का समीकरण :

x-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु का y-नियामक शून्य होगा।

अत: x-अक्ष का समीकरण $y = 0$

(iv) y-अक्ष का समीकरण

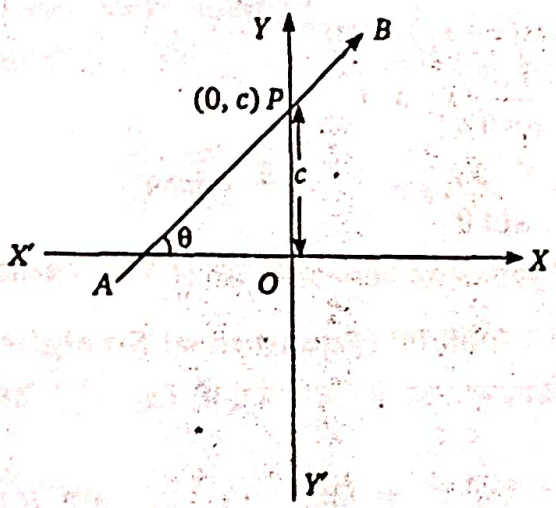
y-अक्ष पर प्रत्येक बिंदु का x-नियामक शून्य होगा।

अत: y-अक्ष का समीकरण $x = 0$

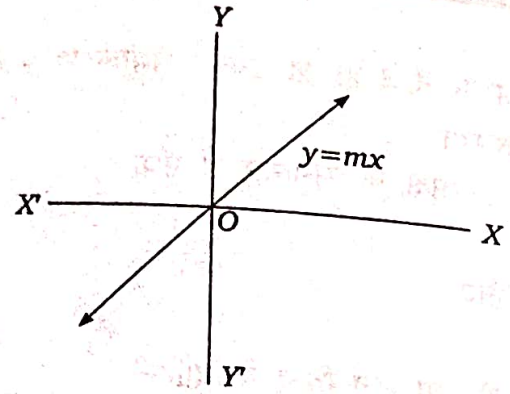
14.3.1 प्रवणता रूप या m-रूप (Slope Intercept Form or m-form)

यदि कोई सरल रेखा x-अक्ष से θ कोण बनाती है तथा y-अक्ष पर अंत:खण्ड c काटती है तो सरल रेखा का समीकरण :

$$\boldsymbol{y = mx + c}$$



नोट :

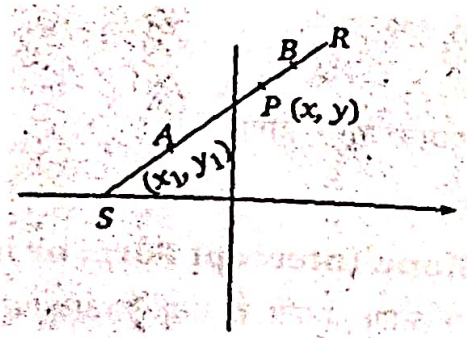


- (i) यदि $c = 0$ हो तो $y = mx$ तथा रेखा मूल बिन्दु से गुजरेगी।
  (ii) यदि दी गई सरल रेखा x-अक्ष के समान्तर हो तो $m = 0$, अतः x-अक्ष के समानांतर रेखा का समीकरण $y = c$

14.3.2 बिन्दु प्रवणता रूप (Point Slope Form)

किसी सरल रेखा का समीकरण जो बिन्दु (x_1, y_1) से होकर गुजरती है तथा जिसकी प्रवणता m से दी जाती है, निम्न रूप में दी जाती है—

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



14.3.3 सममित रूप या प्राचल रूप (Symmetric Form or Parametric Form)

यदि रेखा की ढाल θ हो तो

$$y - y_1 = m(x - x_1) = \tan\theta\,(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - y_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad \text{(माना)}$$

यह रेखा का सममित रूप (Symmetric Form) या प्राचल रूप कहलाता है।

14.3.4 दो बिन्दु रूप में रेखा का समीकरण (Equation of Straight Line in Two Point Form)

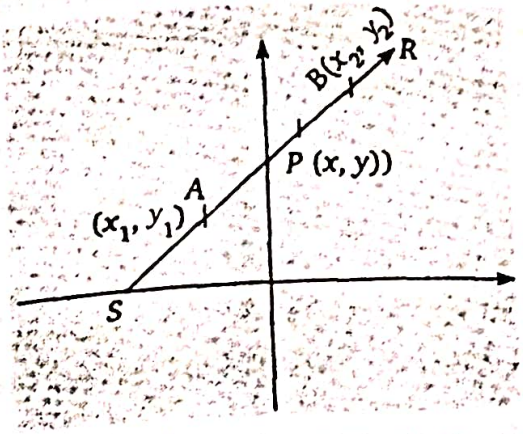
यदि कोई सरल रेखा (जो ऊर्ध्वाधर नहीं है) दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से होकर गुजरती है तो उसका समीकरण ज्ञात करना।

प्रमाण : माना RS कोई सरल रेखा है, जो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ से होकर गुजरती है। माना $P(x, y)$ इस सरल रेखा पर कोई बिन्दु है। चित्र से स्पष्ट है कि

AB की प्रवणता $= AP$ की प्रवणता

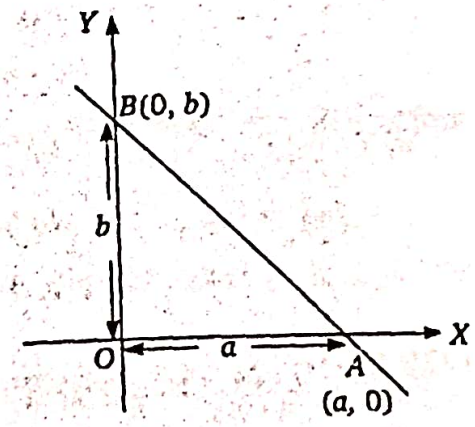
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \Rightarrow \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

यह रेखा का दो बिन्दु रूप में अभीष्ट समीकरण है।



14.4 रेखा का अंत:खण्ड एवं अभिलम्ब रूप (Intercept and Normal form of a Straight Line)

यदि कोई सरल रेखा AB x-अक्ष को बिन्दु A पर तथा y-अक्ष को बिन्दु B पर इस प्रकार काटती है कि $OA = a$ तथा $OB = b$ तो a तथा b को क्रमश: x-अक्ष तथा y-अक्ष पर अंत:खण्ड कहते हैं।



14.4.1 सरल रेखा का अंत:खण्ड रूप (Intercept form)

यदि कोई सरल रेखा x-अक्ष पर अंत:खण्ड a तथा y-अक्ष पर अंत:खण्ड b काटती है, तो सरल रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

नोट :

- (i) स्मरण रखने के लिए $\frac{x}{x\text{-अंत:खण्ड}} + \frac{y}{y\text{-अंत:खण्ड}} = 1$
- (ii) x-अक्ष पर अंतखण्ड प्राप्त करने के लिए $y = 0$ तथा y-अक्ष पर अंत:खण्ड प्राप्त करने के लिए $x = 0$ रखें।
- (iii) x-अक्ष पर अंत:खण्ड धनात्मक होगा यदि यह मूल बिंदु के दाहिनी ओर है, तथा ऋणात्मक होगा यदि मूल बिंदु के बाँयी ओर है।
- (iv) y-अक्ष पर अंत:खण्ड धनात्मक होगा यदि यह मूलबिंदु के ऊपर हो, तथा ऋणात्मक होगा यदि मूलबिंदु के नीचे हो।

14.4.2 अभिलम्ब रूप (Normal Form or Perpendicular Form)

यदि किसी सरल रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई p तथा यह लम्ब x-अक्ष से α कोण बनाता है, तो सरल रेखा का समीकरण $\boldsymbol{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$

नोट :

- समीकरण $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ में
  (i) p हमेशा धन (+ve) लिया जाता है।
  (ii) x तथा y के गुणांकों के वर्गों का योग इकाई होता है।
  (iii) कोण α, x-अक्ष की धन दिशा (Anticlockwise) में $0°$ से $360°$ तक मापा जाता है।

14.5 रेखा के सामान्य समीकरणों का मानक रूपों में परिवर्तन

माना दिया गया समीकरण $Ax + By + C = 0$

तो

(i) अंत:खण्ड प्रवणता रूप (Slope Intercept Form)

$$Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad By = -Ax - C$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

स्पष्टत: यह $y = mx + c$ रूप का समीकरण है, जहाँ प्रवणता $m = -\frac{A}{B}$

अंत:खण्ड $c = -\frac{C}{B}$

(ii) अंत:खण्ड रूप

$$Ax + By + C = 0$$

$$\Rightarrow \quad Ax + By = -C \qquad \Rightarrow \quad \frac{A}{(-C)}x + \frac{B}{(-C)}y = \frac{-C}{-C}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

यह $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ रूप का समीकरण है, जहाँ $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$

(iii) अभिलंब रूप

सरल रेखा का समी० $ax + by + c = 0$ ...(1)

माना $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ ...(2)

(1) का अभिलंब रूप है। समी० (1) तथा (2) एक ही सरल रेखा को निरूपित करते हैं।

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{-p}$$

प्रथम तथा तृतीय से

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{c}{-p} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{-ap}{c} \qquad ...(3)$$

द्वितीय तथा तृतीय से $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{-p} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-bp}{c}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ...(4)

पुनः $\left(-\frac{ap}{c}\right)^2 + \left(-\frac{pb}{c}\right)^2 = 1$ [(3) तथा (4) से]

$\Rightarrow \frac{a^2p^2}{c^2} + \frac{b^2p^2}{c^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{p^2}{c^2}(a^2 + b^2) = 1$

$\Rightarrow p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\Rightarrow$

चूँकि p = लंब की लंबाई अतः p का मान धनात्मक लेने पर

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

कार्य विधि :

I. दिए गए समीकरण को $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}$ से भाग दें।

II. प्राप्त परिणाम के अचर भाग को दाहिनी ओर ले जायें।

III. अचर को धनात्मक रखना है, अतः आवश्यक हो तो दोनों ओर चिन्ह परिवर्तन करें।

14.6 दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु (Intersection Point of Two Straight Lines)

माना दो सरल रेखायें

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad ...(1)$$

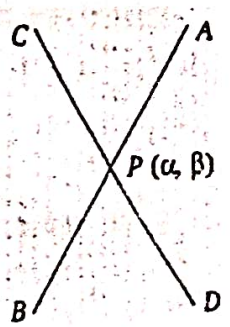
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad ...(2)$$

एक-दूसरे को बिन्दु $P(\alpha, \beta)$ पर काटती हैं।

दोनों सरल रेखायें $P(\alpha, \beta)$ से गुजरती हैं। अतः समी० (1) तथा (2) से

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$



वज्र-गुणन (Cross-multiplication) से

$$\frac{\alpha}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\beta}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$\therefore$ प्रतिच्छेद बिन्दु के नियामक

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

जहाँ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

अर्थात् $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

उपसाध्य : यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ तो निम्न दो स्थितियाँ होंगी—

(i) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ तो रेखायें समान्तर होंगी तथा रेखायें प्रतिच्छेद नहीं करेंगी।

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ तो रेखायें संपाती (coincidental) होंगी।

14.7 एक-बिन्दुगामी या संगामी रेखायें (Concurrent Lines)

वे सरल रेखायें जो एक बिन्दु से होकर जाती हैं अर्थात् एक बिन्दु पर मिलती हैं, एक-बिंदुगामी रेखायें कहलाती हैं। अत: यदि तीन रेखायें एक बिन्दुगामी हों तो दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी रेखा पर होगा एवं उस रेखा के समीकरण को संतुष्ट करेगा।

14.7.1 एक-बिंदुगामी होने की शर्त (Condition for Concurrency)

यदि $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ...(1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ...(2)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ ...(3)

सारणिक रूप में व्यक्त करने पर,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

तीन सरल रेखाओं के एक-बिंदुगामी होने की अभीष्ट शर्त है।

उदाहरण : सिद्ध करें $4x + 7y - 9 = 0$, $9x - y + 6 = 0$ तथा $5x - 8y + 15 = 0$ एक बिंदुगामी हैं।

हल : दिए गए समीकरण

$4x + 7y - 9 = 0$ ...(1)

$9x - y + 6 = 0$ ...(2)

$5x - 8y + 15 = 0$ ...(3)

सारणिक रूप में लिखने पर

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -9 \\ 9 & -1 & 6 \\ 5 & -8 & 15 \end{vmatrix}$$

R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर

$$4\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -8 & 15 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-15 + 48) - 7(135 - 30) - 9(-72 + 5)$$

$$= 4 \times 33 - 7 \times 105 - 9 \times (-67)$$

$= 132 - 735 + 603$

$= 0$

अतः रेखायें एक-बिन्दुगामी है।

नोट :

- रेखा $ax + by + c + 0$ के समानांतर रेखा का समीकरण $ax + by + c_1 = 0$
- तथा रेखा का समीकरण $bx - ay + c_2 = 0$

14.8 दो सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली रेखाओं का समीकरण (Equation of Straight Lines Passing through the Intersection of Two Lines)

मान लिया दो दी हुई सरल रेखायें

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

तो रेखाओं के कटान बिन्दु से होकर गुजरने वाली सरल रेखाओं का समीकरण ...(1)

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda (a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad ...(2)$$

जहाँ λ कोई अचर है, जिसका मान दी गई शर्तों से ज्ञात किया जाता है।

14.9 दो सरल रेखाओं $y = m_1x_1 + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ के बीच का कोण

माना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ दो रेखाओं के समीकरण हैं, तो

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad b_1y = -a_1x - c_1$$

$$y = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)x - \frac{c_1}{b_1}$$

$$\therefore \quad \text{प्रवणता} = m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$$

रेखा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ की प्रवणता $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$

यदि इनके बीच का कोण θ हो, तो

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{1 + \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{b_1b_2}}{\frac{b_1b_2 + a_1a_2}{b_1b_2}}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|$$

नोट :

- यदि दो रेखायें $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ **समानांतर** हैं तथा उनकी प्रवणतायें क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं, तो

$$m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

- यदि दो रेखायें **परस्पर लंब** हों, तो

$$\theta = 90°$$

अतः $\tan\theta = \tan 90° = \infty$

$\therefore$ सूत्र (1) से

$$\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1a_2 = -b_1b_2$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m_1m_2 = -1}$$

14.9.1 सरल रेखाओं $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0$ तथा $x\cos\beta + y\sin\beta - p_2 = 0$ के बीच का कोण

मान लिया सरल रेखायें x-अक्ष की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः α तथा β कोण बनाती हैं तथा उन पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्बों की लम्बाइयाँ क्रमशः p_1 तथा p_2 हैं।

तथा रेखायें $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0$

$x\cos\beta + y\sin\beta - p_2 = 0$

द्वारा दी जाती हैं।

अब ज्यामिति से दो सरल रेखाओं के बीच का कोण

= उन पर डाले गए लम्बों के बीच का कोण

$= \alpha - \beta$

नोट :

- अतः (i) यदि उपरोक्त रूप की रेखायें परस्पर समान्तर हैं, तो

$$\alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

यह अभीष्ट शर्त है।

(ii) यदि उपरोक्त रूप की रेखायें परस्पर लम्ब हैं, तो

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

14.10 लांबिक दूरी सूत्र (Perpendicular Distance Formula)

(a) बिन्दु (x_1, y_1) तथा सरल रेखा $ax + by + c = 0$ के बीच की लाम्बिक दूरी

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

कार्य विधि : I. दी गई सरल रेखा को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखें अर्थात् दाहिना पक्ष शून्य बनायें।
II. प्राप्त समीकरण के बायें पक्ष में $x = x_1$ तथा $y = y_1$ रखें।
III. प्राप्त परिणाम को $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}$ से भाग दें।
यह अभीष्ट लम्बाई देगा।
IV. यदि लम्बाई ऋण आए तो ऋण चिह्न की उपेक्षा करें।

(b) मूल बिन्दु से $ax + by + c = 0$ की लाम्बिक दूरी $= \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

उदाहरण : बिन्दु $(-3, 4)$ से सरल रेखा $3x + 4y - 5 = 0$ की लाम्बिक दूरी ज्ञात करें।

हल : दिया गया समीकरण $3x + 4y - 5 = 0$

यहाँ $x_1 = -3,\ y_1 = 4,\ a = 3,\ b = 4,\ c = -5$

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3 \times (-3) + 4 \times (4) - 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$\therefore$
$$= \frac{-9 + 16 - 5}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} \text{ इकाई}$$

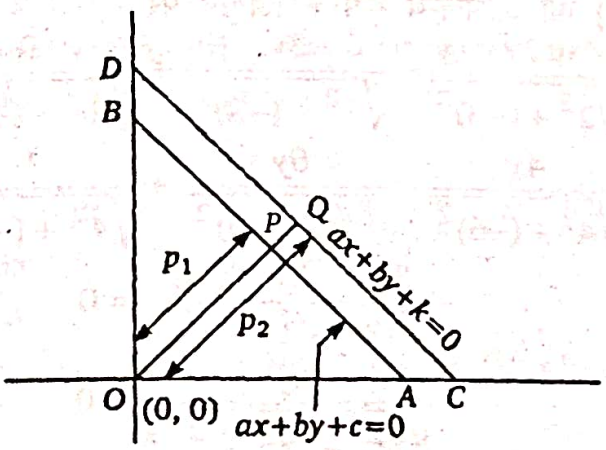
उत्तर

14.10.1 समान्तर रेखाओं के बीच की लाम्बिक दूरी (Perpendicular Distance between Two Parallel Straight Lines)

पहली विधि : माना लिया

$$ax + by + c = 0 \quad \ldots(1)$$

$$ax + by + k = 0 \quad \ldots(2)$$



दो समान्तर रेखायें हैं, तो

विधि : मूल बिन्दु (0, 0) से (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई $= OP = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

मूल बिन्दु (0, 0) से (2) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $OQ = \dfrac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\therefore$ दोनों समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी : $PQ = OQ - OP =$ दोनों रेखाओं पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाइयों का अंतर

अत: समी० (3) तथा (4) से

$$PQ = \left| \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \frac{|k - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\tan\theta = \left|\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}\right| \quad \ldots(1)$$

नोट :

- यदि दो रेखायें $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ **समानांतर** हैं तथा उनकी प्रवणतायें क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं, तो

$$m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

- यदि दो रेखायें **परस्पर लंब** हों, तो

$$\theta = 90°$$

अतः $\tan\theta = \tan 90° = \infty$

$\therefore$ सूत्र (1) से

$$\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1a_2 = -b_1b_2$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m_1m_2 = -1}$$

14.9.1 सरल रेखाओं $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0$ तथा $x\cos\beta + y\sin\beta - p_2 = 0$ के बीच का कोण

मान लिया सरल रेखायें x-अक्ष की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः α तथा β कोण बनाती हैं तथा उन पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्बों की लम्बाइयाँ क्रमशः p_1 तथा p_2 हैं।

तथा रेखायें $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0$

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p_2 = 0$$

द्वारा दी जाती हैं।

अब ज्यामिति से दो सरल रेखाओं के बीच का कोण

= उन पर डाले गए लम्बों के बीच का कोण

$= \alpha - \beta$

नोट :

- अतः (i) यदि उपरोक्त रूप की रेखायें परस्पर समान्तर हैं, तो

$$\alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \beta$$

यह अभीष्ट शर्त है।

(ii) यदि उपरोक्त रूप की रेखायें परस्पर लम्ब हैं, तो

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

14.10 लांबिक दूरी सूत्र (Perpendicular Distance Formula)

1. (a) बिन्दु (x_1, y_1) तथा सरल रेखा $ax + by + c = 0$ के बीच की लाम्बिक दूरी

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

According to New Syllabus
Approved by UPBTE
NEP-2020 & AI

कार्य विधि : I. दी गई सरल रेखा को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखें अर्थात् दाहिना पक्ष शून्य बनायें।

II. प्राप्त समीकरण के बायें पक्ष में $x = x_1$ तथा $y = y_1$ रखें।

III. प्राप्त परिणाम को $\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}$ से भाग दें।

यह अभीष्ट लम्बाई देगा।

IV. यदि लम्बाई ऋण आए तो ऋण चिह्न की उपेक्षा करें।

(b) मूल बिन्दु से $ax + by + c = 0$ की लाम्बिक दूरी $= \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

उदाहरण : बिन्दु $(-3, 4)$ से सरल रेखा $3x + 4y - 5 = 0$ की लाम्बिक दूरी ज्ञात करें।

हल : दिया गया समीकरण $3x + 4y - 5 = 0$

यहाँ $x_1 = -3,\ y_1 = 4,\ a = 3,\ b = 4,\ c = -5$

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3 \times (-3) + 4 \times (4) - 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$\therefore$

$$= \frac{-9 + 16 - 5}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} \text{ इकाई}$$

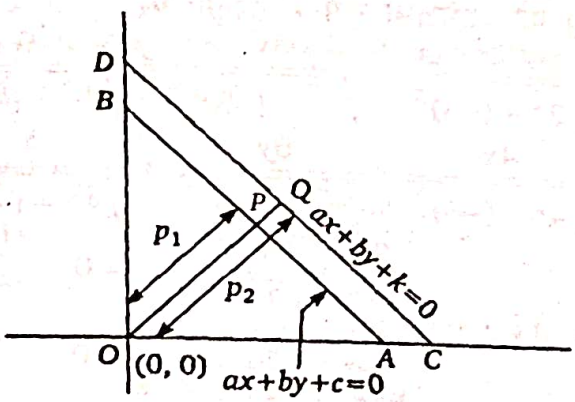
उत्तर

14.10.1 समान्तर रेखाओं के बीच की लाम्बिक दूरी (Perpendicular Distance between Two Parallel Straight Lines)

पहली विधि : माना लिया

$$ax + by + c = 0 \quad \ldots(1)$$

$$ax + by + k = 0 \quad \ldots(2)$$



दो समान्तर रेखायें हैं, तो

विधि : मूल बिन्दु (0, 0) से (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई $= OP = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

मूल बिन्दु (0,0) से (2) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $OQ = \dfrac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\therefore$ दोनों समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी : $PQ = OQ - OP =$ दोनों रेखाओं पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाइयों का अंतर

अत: समी० (3) तथा (4) से

$$PQ = \left| \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \frac{|k - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

अर्थात् दो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

$$= \left| \frac{\text{अचरों का अंतर}}{\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}} \right|$$

दूसरी विधि : Step I. दिए गए समी० (1) तथा (2) को $\sqrt{a^2+b^2}$ से भाग देकर अभिलम्ब रूप में ले

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

तथा $$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

Step II. प्राप्त समीकरण अभिलम्ब रूप में होगा, जिसमें

$$p_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{तथा} \quad p_2 = \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Step III. इन दोनों का अंतर $(p_1 \sim p_2)$ निकालें। यह अभीष्ट दूरी देगा।

अर्थात् $d = |p_1 - p_2| = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$

उदाहरण : $2x - 3y + 9 = 0$ तथा $4x - 6y + 1 = 0$ के बीच की दूरी बतायें।

हल : दी गई सरल रेखायें

$$2x - 3y + 9 = 0$$
$$4x - 6y + 1 = 0$$

अत: समी० (1) तथा (2) को अभिलम्ब रूप में लिखने पर

$$\frac{2x}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} - \frac{3y}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} + \frac{9}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = 0$$

तथा $$\frac{4x}{\sqrt{4^2+(-6)^2}} - \frac{6y}{\sqrt{4^2+(-6)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4^2+(-6)^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{2x}{\sqrt{13}} - \frac{3y}{\sqrt{13}} + \frac{9}{\sqrt{13}} = 0$$

तथा $$\frac{4x}{\sqrt{52}} - \frac{6y}{\sqrt{52}} + \frac{1}{\sqrt{52}} = 0$$

या $$\frac{2x}{\sqrt{13}} - \frac{3y}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{52}} = 0$$

अत: समी० (3) तथा (4) के बीच की दूरी

$$\left| \frac{9}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{52}} \right| = \left| \frac{18}{\sqrt{52}} - \frac{1}{\sqrt{52}} \right| = \frac{17}{\sqrt{52}} \text{ इकाई}$$

तीसरी विधि : I. किसी एक सरल रेखा पर $x = 0$ या $y = 0$ रखकर एक बिन्दु प्राप्त करें।

II. इस बिन्दु से दूसरी सरल रेखा की लाम्बिक दूरी ज्ञात करें। यह अभीष्ट लम्बाई होगी।

[उदाहरण 22(b), पृष्ठ 256 देखें

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें, जिसकी प्रवणता 3 है तथा जो बिंदु (2, 4) से गुजरती है।

हल : बिंदु (x_1, y_1) से गुजरने वाली सरल रेखा, जिसकी प्रवणता m है, का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots(1)$$

यहाँ $(x_1, y_1) \equiv (2, 4)$

$x_1 = 2, \quad y_1 = 4$

तथा प्रवणता $m = 3$

∴ अभीष्ट समीकरण

$$y - 4 = 3(x - 2)$$

$$y - 4 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 2$$

उत्तर

उदाहरण 2. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें, जिसका झुकाव 45° तथा y-अक्ष से अंत:खण्ड 3 काटती है।

हल : x-अक्ष से α कोण बनाने वाली सरल रेखा का समीकरण जो y-अक्ष से c अंत:खण्ड काटती है।

$$y = mx + c \quad \ldots(1)$$

जहाँ $m = \tan\alpha$

यहाँ $\alpha = 45°$ तथा $c = 3$

$m = \tan 45° = 1$

∴ अत: समीकरण (1) से अभीष्ट समीकरण

$$y = x + 3$$

उत्तर

उदाहरण 3. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष से 60° का कोण बनाती है तथा मूल बिन्दु से गुजरती है।

हल : मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y = mx \quad \ldots(1)$$

यहाँ $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}x$ [(1) से]

∴ अत: अभीष्ट समीकरण $y = \sqrt{3}x$

उत्तर

उदाहरण 4. एक सरल रेखा x-अक्ष तथा y-अक्ष को क्रमश: बिंदु (3, 0) तथा (0, 6) पर काटती है, तो सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

हल : दिया गया है, सरल रेखा x-तथा y-अक्षों को बिंदु (3, 0) तथा (0, 6) पर काटती है।

अत: x-अंत:खण्ड $= a = 3$

y-अंत:खण्ड $= b = 6$

अत: रेखा के अंत:खण्ड रूप समीकरण से

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

∴ $$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$$

$$2x + y = 6$$

उत्तर

उदाहरण 5. सरल रेखा $2x - y + 16 = 0$ द्वारा x-तथा y-अक्षों पर कटे अंत:खण्ड ज्ञात करें।

हल : यहाँ $2x - y + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y = -16$

दोनों तरफ -16 से भाग देने पर

$$\frac{2x}{-16} - \frac{y}{-16} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{x}{-8} + \frac{y}{16} = 1$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से तुलना करने पर

$$a = -8, \qquad b = 16$$

$\therefore$ x-अंतःखण्ड $= -8$

y-अंतःखण्ड $= 16$

उदाहरण 6. उस सरल का समीकरण जो बिंदु $(-2, 4)$ से गुजरती है तथर x-अक्ष की धनात्मक दिशा से $60°$ का कोण बनाती है।

उत्तर

हल : दिया गया है, रेखा का x-अक्ष से झुकाव

$$\theta = 60°$$

$\therefore$ $m = \tan\theta = \tan 60° = \sqrt{3}$

तथा रेखा $(x_1, y_1) \equiv (-2, 4)$ से गुजरती है

$\therefore$ $x_1 = -2, \; y_1 = 4.$

$\therefore$ अतः रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\Rightarrow$ $y - 4 = \sqrt{3}(x + 2)$

$\Rightarrow$ $y = \sqrt{3}x + (2\sqrt{3} + 4)$

उदाहरण 7. बिंदु $(-2, 1)$ तथा $(4, -3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

उत्तर

हल : यहाँ $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ तथा $(x_2, y_2) = (4, -3)$

(x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = \frac{-3 - 1}{4 + 2}(x + 2) \qquad \Rightarrow \quad y - 1 = \frac{-4}{6}(x + 2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 2) \qquad \Rightarrow \quad 3y - 3 = -2x - 4$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 3y + 1 = 0$$

उत्तर

उदाहरण 8. समीकरण $y = mx + c$ से निरूपित रेखा दो बिंदुओं $(3. -5)$ तथा $(2, 4)$ से गुजरती है तो m तथा c का मान ज्ञात करें।

हल : दी गई रेखा $y = mx + c$ ...(1)

सरल रेखा (1) बिंदु $(3, -5)$ से गुजरती है

$$-5 = m(3) + c \qquad \Rightarrow \quad 3m + c = -5 \qquad ...(2)$$

पुनः सरल रेखा (1) बिंदु $(2, 4)$ से गुजरती है

$$4 = m(2) + c \qquad \Rightarrow \quad 2m + c = 4 \qquad ...(3)$$

$\therefore$ समी० (2) में से समी० (3) को घटाने पर

$$(3m + c) - (2m + c) = -5 - 4 \Rightarrow \quad m = -9$$

समी० (2) में m का मान रखने पर

$$3(-9) + c = -5 \qquad \Rightarrow \quad -27 + c = -5$$

$c = -5 + 27$

$c = 22$

उत्तर

प्रश्न 9. सरल रेखा $2x - y + 16 = 0$ द्वारा x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गए अंत:खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई सरल रेखा $2x - y + 16 = 0$ ...(1)

x-अक्ष पर अंत:खण्ड ज्ञात करने के लिए

(1) में $y = 0$ रखने पर $2x - 0 + 16 = 0$

$\Rightarrow 2x = -16 \Rightarrow x = -8$

y-अक्ष पर अंत:खण्ड ज्ञात करने के लिए

(1) में $x = 0$ रखने पर

$2 \times 0 - y + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad -y = -16 \Rightarrow y = 16$

उत्तर

प्रश्न 10. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिन्दु $(2, -3)$ से होकर जाती है जो अक्षों से निम्नवत् अन्त:खण्ड काटती है—

(a) मापांक समान तथा दोनों धनात्मक

(b) मापांक समान तथा दोनों के चिह्न विपरीत

हल : अन्त:खण्ड रूप में सरल रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\because$ रेखा (1) बिन्दु $(2, -3)$ से होकर गुजरती है, अत: ...(1)

$$\frac{2}{a} + \frac{(-3)}{b} = 1$$

$$\frac{2}{a} - \frac{3}{b} = 1$$

या ...(2)

दशा (a) : जब दोनों अन्त:खण्ड के मापांक समान तथा धनात्मक हैं, अर्थात् $a = b$

$\therefore$ समीकरण (2) से

$$\frac{2}{a} - \frac{3}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$\because \quad a = b \quad \Rightarrow \quad b = -1$

a तथा b के मान समी० (1) में रखने पर,

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad -x - y = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y + 1 = 0$$

उत्तर

दशा (b) : जब अन्त:खण्ड के मापांक समान तथा चिह्न विपरीत हैं, तो

$a = -b$ या $b = -a$

अत: समी० (2) में $b = -a$ रखने पर,

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{a} = 1 \quad \text{या} \quad a = 5$$

$\therefore \quad b = -a = -5$

a तथा b के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-5}=1 \qquad \Rightarrow \quad x-y=5$$

उदाहरण 11. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जिस पर मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई 3 तथा यह लम्ब x-अक्ष से $60°$ का कोण बनाता है।

हल : यहाँ $p=3,\ \alpha=60°$

अत: $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से

$$x\cos 60°+y\sin 60°=3 \qquad \Rightarrow \quad x\times\frac{1}{2}+y\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

$$\Rightarrow \qquad x+\sqrt{3}y=6 \text{ यह अभीष्ट समीकरण है।}$$

उदाहरण 12. यदि मूलबिंदु से किसी रेखा पर जो अक्षों से क्रमश: a तथा b अंत:खण्ड काटती है, डाले गये लंब की लंबाई p है, तो दिखायें कि

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

हल : माना रेखा AB अक्षों पर अंत:खण्ड a तथा b काटती है, तो

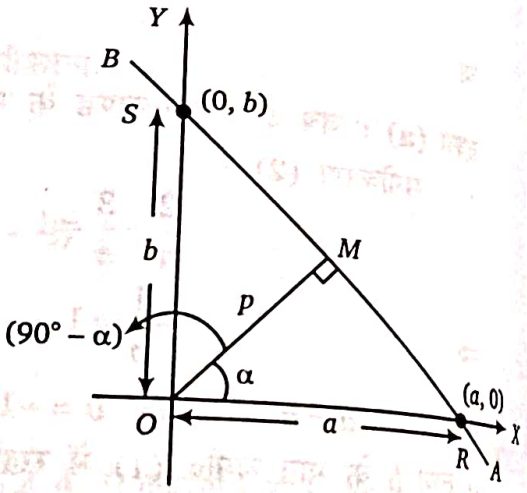
$$OR=a$$

$$OS=b$$

माना p मूलबिदु O से AB पर डाले गये लंब की लंबाई p है, तो ΔOMR से

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OR}$$

$$\cos\alpha=\frac{p}{a} \qquad \ldots(1)$$



पुन: ΔOMS से

$$\cos(90°-\alpha)=\frac{OM}{OS}$$

$$\sin\alpha=\frac{p}{b} \qquad \ldots(2)$$

(1) तथा (2) को वर्ग कर जोड़ने पर

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$

$$p^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]=1$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{p^2}$$

उत्तर

13. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जिस पर मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई 3 तथा यह लम्ब x-अक्ष से $60°$ कोण बनाता है।

यहाँ $p=3,\ \alpha=60°$

$\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से

$$x\cos 60°+y\sin 60°=3 \qquad \Rightarrow \quad x\times\frac{1}{2}+y\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

$\Rightarrow \quad x + \sqrt{3}y = 6$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 14. बिंदु $(3, -1)$ तथा $(2, 3)$ को मिलाने वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें। इसके समानांतर रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु $(5, 2)$ से गुजरती है।

हल : दिये गये बिंदु $(3, -1)$ तथा $(2, 3)$ हैं।

माना $\quad (x_1, y_1) \equiv (3, -1)$

$\therefore \quad x_1 = 3, \quad y_1 = -1$

तथा $\quad (x_2, y_2) = (2, 3)$

$\therefore \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 3$

बिंदु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समी०

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{3 + 1}{2 - 3}(x - 3)$$

$\therefore$

$$y + 1 = \frac{4}{-1}(x - 3)$$

$$y + 1 = -4(x - 3)$$

$$y + 1 = -4x + 12$$

$\Rightarrow \quad 4x + y = 11$

$\Rightarrow \quad 4x + y - 11 = 0 \quad ...(1)$

या

रेखा की प्रवणता $= -\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right)$

$$= -\left(\frac{4}{1}\right) = -4$$

अत: सरल रेखा की प्रवणता जो रेखा (1) के समानांतर हो $= -4$

बिंदु $(5, 2)$ से गुजरने वाली तथा प्रवणता -4 वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -4(x - 5)$$

$$y - 2 = -4x + 20$$

$$4x + y - 22 = 0$$ उत्तर

उदाहरण 15. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिन्दु $(3, 4)$ से होकर गुजरती है तथा जिसके अक्षों पर कटे अंत:खण्डों का योग 14 है।

हल : माना लिया रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है ...(1)

प्रश्न से, $\quad a + b = 14 \quad \Rightarrow \quad b = 14 - a$

अत: समीकरण (1) से $\frac{x}{a} + \frac{y}{14 - a} = 1$ ...(2)

यह सरल रेखा बिन्दु $(3, 4)$ से होकर गुजरती है।

अत: $\frac{3}{a} + \frac{4}{14 - a} = 1$

$\Rightarrow \quad 3(14-a)+4a=a(14-a)$

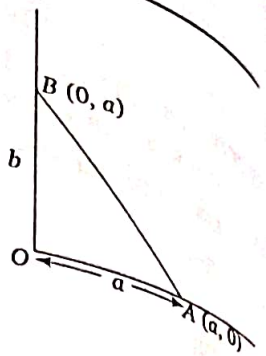
$\Rightarrow \quad 42-3a+4a=14a-a^2$

$\Rightarrow \quad a^2-13a+42=0$

$\Rightarrow \quad a-7a-6a+42=0$

$\Rightarrow \quad (a-6)(a-7)=0$

$\Rightarrow \quad a=6,7$



अत: जब $a=6$ तो (2) से

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{14-6}=1 \qquad \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$$

$\Rightarrow \quad 4x+3y=24$ अभीष्ट समीकरण है।

तथा जब $a=7$ हो तो (2) से

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{14-7}=1 \Rightarrow \frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$$

$\Rightarrow \quad x+y=7$ अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 16. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है तथा रेखा $3x+2y+5=0$ के लम्बवत् है।

हल : दी गई सरल रेखा का समीकरण

$$3x+2y+5=0$$

इस रेखा की प्रवणता $m=-\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right)$ ...(1)

$$m=-\frac{3}{2}$$

$\because$ अभीष्ट रेखा दी गई रेखा के लम्बवत् है, अत: अभीष्ट रेखा की प्रवणता

$$(M)=-\frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)} \qquad [\because m_1 \times m_2=-1]$$

$$M=\frac{2}{3}$$

अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$y-y_1=M(x-x_1)$$

$$y-4=\frac{2}{3}(x-3) \qquad [\because x_1=3, y_1=4]$$

$$3y-12=2x-6$$

$$2x-3y+6=0$$

उदाहरण 17. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो (2, 5) से होकर जाती है तथा बिन्दुओं (– 1, 2) और (1, – 2) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल : बिन्दुओं (– 1, 2) और (1, – 2) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-2}{1+1}=\frac{-4}{2}=-2$$

∴ अभीष्ट रेखा, बिन्दुओं $(-1, 2)$ और $(1, -2)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

अत: अभीष्ट रेखा की प्रवणता $M = -2$

अभीष्ट रेखा $(2, 5)$ से गुजरती है, अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = M(x - x_1)$$

$$y - 5 = -2(x - 2) \qquad [\because x_1 = 2, y_1 = 5]$$

$$y - 5 = -2x + 4$$

$$2x + y = 9$$

उत्तर

⇒

या

उदाहरण 18. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2, 3)$ से होकर गुजरती है तथा बिन्दु $(2, 1)$ और $(4, 5)$ को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब है।

हल : बिन्दु $(2, 1)$ तथा $(4, 5)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{5-1}{4-2} = 2$$

∵ अभीष्ट रेखा इस रेखा पर लम्ब है, अत: सूत्र $m_1 \times m_2 = -1$ से अभीष्ट रेखा की प्रवणता $m = -\frac{1}{2}$

अभीष्ट रेखा $(2, 3)$ से होकर जाती है तथा इसकी प्रवणता $-\frac{1}{2}$ है, अत: समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ से

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$2y - 6 = -x + 2$$

$$x + 2y = 8$$

उदाहरण 19. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो रेखाओं $x - y - 1 = 0$ तथा $2x - 3y + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरती है तथा $3x - 5y + 6 = 0$ के समान्तर है।

हल : दी गई रेखाओं के समीकरण

$$x - y - 1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$2x - 3y + 1 = 0 \qquad \ldots(2)$$

तथा इनके प्रतिच्छेदन बिन्दु से अभीष्ट सरल रेखा गुजरती है जो $3x - 5y + 6 = 0$ के समान्तर है। ...(3)

सरल रेखा का समीकरण जो (1) तथा (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर गुजरती है

$$(x - y - 1) + \lambda(2x - 3y + 1) = 0$$

$$(2\lambda + 1)x + (-1 - 3\lambda)y + \lambda - 1 = 0 \qquad \ldots(4)$$

⇒

रेखा (3) || रेखा (4) अत: इनकी प्रवणतायें बराबर होंगी

अत: $\frac{-3}{-5} = \frac{-(2\lambda+1)}{-(1+3\lambda)}$ $\left[\text{प्रवणता} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right]$

⇒ $10\lambda + 5 = 3 + 9\lambda$ ⇒ $\lambda = -2$

अत: (4) से अभीष्ट समीकरण

$$\{2 \times (-2) + 1\}x + \{-1 - 3 \times (-2)\}y + (-2) - 1 = 0$$

⇒ $-3x + 5y - 3 = 0$ ⇒ $3x - 5y + 3 = 0$

उत्तर

उदाहरण 20. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $2x - y + 5 = 0$ तथा $5x + 3y - 4 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर गुजरती है, तथा $x - 3y + 21 = 0$ रेखा के लम्बवत् है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]**

हल : रेखाओं $2x-y+5=0$ तथा $5x+3y-4=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$(2x-y+5)+\lambda(5x+3y-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x-y+5+5\lambda x+3\lambda y-4\lambda=0$$

$$\Rightarrow \quad (2+5\lambda)x+(-1+3\lambda)y+(5-4\lambda)=0$$

समी० (1) से निरूपित रेखा की प्रवणता

$$m=-\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right) \quad \ldots(1)$$

$$m=-\left(\frac{2+5\lambda}{-1+3\lambda}\right)$$

दी गई अन्य रेखा का समी० $x-3y+21=0$

समी० (2) से निरूपित रेखा की प्रवणता

$$M=-\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right) \quad \ldots(2)$$

$$=-\left(\frac{1}{-3}\right)$$

$$M=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ रेखा (1) तथा रेखा (2) लम्बवत् हैं, अतः

$$m\times M=-1$$

$$-\left(\frac{2+5\lambda}{-1+3\lambda}\right)\times\frac{1}{3}=-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2+5\lambda}{-1+3\lambda}=3$$

$$\Rightarrow \quad 2+5\lambda=-3+9\lambda$$

$$\Rightarrow \quad 5=4\lambda$$

$$\lambda=\frac{5}{4}$$

λ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\left(2+5.\frac{5}{4}\right)x+\left(-1+3.\frac{5}{4}\right)y+\left(5-4.\frac{5}{4}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{33}{4}x+\frac{11}{4}y=0$$

$$\Rightarrow \quad 33x+11y=0$$

उदाहरण 21. सरल रेखा के समी० $\sqrt{3}x+y-7=0$ को अभिलंब रूप में परिवर्तित करें तथा p एवं α का मान बतायें।

हल : सरल रेखा $ax+by+c=0$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad \ldots(1)$$

जहाँ $\quad \cos\alpha=\frac{-ap}{c}, \qquad \sin\alpha=\frac{-bp}{c}$

$$p = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

तथा दिया गया समी० $\sqrt{3}x + y - 7 = 0$

$ax + by + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = \sqrt{3}, \quad b = 1, \quad c = -7.$

$$p = \frac{-7}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{3+1}} = \frac{-7}{\sqrt{4}}$$

$\therefore$ [p लंब की लंबाई को धनात्मक लेने पर]

$$p = \frac{7}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3} \times \left(\frac{7}{2}\right)}{-7} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \ldots(2)$$

$$\sin\alpha = \frac{-bp}{c} = \frac{-1\left(\frac{7}{2}\right)}{-7} = \frac{1}{2} \qquad \ldots(3)$$

तथा अभीष्ट अभिलंब रूप

$\therefore$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

$$x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

$\Rightarrow$

समी० (3) को समी० (2) से भाग देने पर

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\alpha = \tan 30^\circ$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = 30^\circ$$

उत्तर

$\Rightarrow$

उदाहरण 21. समीकरण $3x + 2y + 4 = 0$ को

(i) बिन्दु प्रवणता रूप में परिवर्तित करें तथा y-अक्ष पर अंत:खण्ड प्राप्त करें।

(ii) अंत:खण्ड रूप में व्यक्त करें तथा अक्षों से इनके अंत:खण्ड ज्ञात करें।

हल : (i) $3x + 2y + 4 = 0$

$\Rightarrow \quad 2y = -3x - 4 \qquad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x - 2$

यह $y = mx + c$ रूप का है, जहाँ $m = -\frac{3}{2}, c = -2$

$\therefore \quad y = -\frac{3}{2}x - 2$ बिन्दु प्रवणता रूप का है।

प्रवणता $= -\frac{3}{2}$, y-अंत:खण्ड $= -2$

(ii) $3x + 2y + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad 3x + 2y = -4$

$$\Rightarrow \frac{3x}{-4}+\frac{2y}{-4}=\frac{-4}{-4} \qquad [-4 \text{ से दोनों ओर भाग देने पर}]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{4}{3}}+\frac{y}{-2}=1$$

यह $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ रूप का है, जहाँ $a=-\frac{4}{3}, b=-2$

अत: x-अंत:खण्ड $=-\frac{4}{3}$, y-अंत:खण्ड $=-2$

उदाहरण 22. (a) समानांतर रेखाओं $9x+40y-20=0$ तथा $9x+40y+21=0$ के बीच की दूरी बतायें।
(b) रेखाओं $3x+4y-5=0$ तथा $6x+8y-45=0$ के बीच की दूरी बतायें।

हल : (a) दी गई रेखायें

$$9x+40y-20=0$$

तथा
$$9x+40y+21=0$$

रेखा (1) के लिए $a=9,\ b=40,\ c=-20$

मूल बिंदु (0, 0) से रेखा (1) पर डाले गए लंब की लंबाई

$\therefore$
$$p_1=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{-20}{\sqrt{9^2+40^2}}=\frac{-20}{\sqrt{81+1600}}$$

$$p_1=\frac{-20}{\sqrt{1681}}=-\frac{20}{41}\ (-\text{ve})$$

रेखा (2) के लिए $a=9,\ b=40,\ c=21$

मूल बिंदु (0, 0) से रेखा (2) पर डाले गए लंब की लंबाई

$$p_2=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{21}{\sqrt{9^2+40^2}}$$

$$p_2=\frac{21}{41}\ (+\text{ve})$$

$\therefore$ दोनों रेखाओं के बीच की दूरी

$$d=p_1+p_2$$

$$=\frac{20}{41}+\frac{21}{41}=\frac{41}{41}=1$$

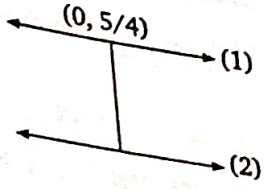
(b) दी गई समानांतर रंखायें $3x+4y-5=0$

$$6x+8y-45=0$$

(1) में $x=0$ रखने पर $3\times 0+45-5=0 \Rightarrow y=\frac{5}{4}$

अतः $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ प्रथम रेखा पर एक बिंदु है।

रेखा (2) से इस बिंदु की दूरी $= \frac{\left|6\times 0+8\times\frac{5}{4}-45\right|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{|-35|}{\sqrt{100}} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$



∴ यह अभीष्ट दूरी है।

नोट : दो समानांतर रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए, इन पर मूलबिंदु से रेखाओं पर लंब डालें। यदि लंबात्मक दूरी ऋणात्मक है तो इनका योग अभीष्ट दूरी होगा। यदि वे समान चिह्न के हैं तो उनका अंतर अभीष्ट दूरी होगा।

उदाहरण 23. सरल रेखाओं $y-\sqrt{3}x-5=0$ तथा $\sqrt{3}y-x+6=0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई रेखा $y-\sqrt{3}x-5=0$

की प्रवणता $m_1 = -\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right)$

$$m_1 = -\frac{(-\sqrt{3})}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}y-x+6=0$$

तथा रेखा की प्रवणता $m_2 = -\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right) = -\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

यदि दी गई रेखाओं के बीच का कोण θ हो, तो

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{1+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \tan 30°$$

∴ $\theta = 30°$ उत्तर

उदाहरण 24. सरल रेखाओं $\sqrt{3}x-y+7=0$ तथा $x-y+2=0$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

हल : रेखायें

$$\sqrt{3}x-y+7=0 \quad ...(1)$$

$$x-y+2=0 \quad ...(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता

$$m_1 = -\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right)$$

$$m_1 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \sqrt{3}$$

रेखा (2) की प्रवणता

$$m_2 = -\left[\frac{1}{(-1)}\right] = 1$$

यदि रेखाओं (1) तथा (2) के बीच का कोण θ हो, तो

$$\tan\theta = \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\ m_2}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}\ .\ 1}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45°\tan 30°} \quad \left(\because\ \tan 45° = 1,\ \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \tan(45° - 30°) \quad \left(\because\ \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}\right)$$

$$\tan\theta = \tan 15°$$

$$\theta = 15°$$

$\therefore$ रेखाओं के बीच का न्यूनकोण $= 15°$

तथा रेखाओं के बीच का अधिककोण $= 180° - 15°$

$= 165°$

प्रश्नावली 14.1

उत्तर

1. बिंदु $(-1, -5)$ से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें, जिसकी प्रवणता $\frac{9}{5}$ है।

2. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें, जो अक्षों से बराबर अंतःखण्ड काटता है तथा बिंदु (2, 3) से गुजरता है।

3. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें, जो बिंदु $(3, -2)$ से गुजरता है तथा x-तथा y-अक्षों पर 4 : 3 के अनुपात में धनात्मक अंतःखण्ड काटता है।

4. उस सरल रेखा की ढाल निकालें जो सरल रेखा $2x + 3y - 4 = 0$ पर लंब है।

5. निम्न सरल रेखाओं की प्रवणता ज्ञात करें—

(i) $2x + 5y + 3 = 0$ (ii) $7x - 5y + 6 = 0$ (iii) $-3y + x = 0$

6. बिंदु $(-1, 1)$ तथा $(2, -4)$ को मिलाने वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

7. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें, जो x-अक्ष की धनात्मक दिशा से 45° का कोण बनाती है तथा y-अक्ष पर 3 इकाई का अंतःखण्ड काटती है।

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें, जो अक्षों पर 2 तथा 3 इकाई का अंतःखण्ड काटती है।

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (4, 5) से गुजरती है तथा अक्षों पर बराबर किंतु विपरीत चिह्न के अंतःखण्ड काटती है।

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिन्दु $(-3, 8)$ से गुजरती है तथा जिसके अक्षों पर कटे अंतःखण्डों का योग 7 है।

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु $(at_1^2, 2at_1)$ तथा $(at_2^2, 2at_2)$ से होकर गुजरती है।

12. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (3, 4) से होकर गुजरती है तथा सरल रेखा $-2x + 3y - 1 = 0$ पर लंब है।
13. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो रेखा $5x - 2y = 7$ पर लंब है तथा बिंदुओं (2, 7) तथा (−4, 1) से गुजरने वाली रेखा के मध्य बिंदु से होकर गुजरती है।
14. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो $4x - 3y = 0$ तथा $2x - 5y - 3$ से छेदन बिंदु से गुजरती है तथा रेखा $4x + 5y + 6 = 0$ के समानांतर है।
15. निम्न समानांतर रेखाओं के बीच की लंबात्मक दूरी ज्ञात करें—
(i) $3x + 4y - 5 = 0$ तथा $6x + 8y - 15 = 0$ (ii) $5x - 12y + 2 = 0$ तथा $5x - 12y - 7 = 0$
(iii) $2x + 3y - 4 = 0$ तथा $2x + 3y + 17 = 0$ (iv) $y = mx + c$ तथा $y = mx + d$
(v) $3x + 4y + 5 = 0$ तथा $3x + 4y + 17 = 0$
16. निम्न रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करें—
(i) $x + y + 1 = 0$ तथा $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$ (ii) $x + 2y + 9 = 0$ तथा $3x + y - 7 = 0$
(iii) $3x + 4y + 7 = 0$ तथा $4x - 3y + 5 = 0$
17. दिखायें $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ तथा $x\cos\beta + y\sin\beta = p_1$ के बीच का कोण $\alpha - \beta$ है।
18. निम्न रेखाओं के समीकरण को अभिलंब रूप में व्यक्त करें—
(i) $\sqrt{3}x - y + 17 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x + y = 4$ (iii) $x - y + 2\sqrt{2} = 0$
19. समीकरण $3x + 2y + 4 = 0$ को
(i) बिंदु प्रवणता रूप ($y = mx + c$ रूप) में व्यक्त करें तथा y-अक्ष पर अंतःखण्ड प्राप्त करें।
(ii) अंतःखण्ड रूप में व्यक्त करें तथा अक्षों से इनके अंतःखण्ड ज्ञात करें।

उत्तरमाला

1. $9x - 5y = 16$ **2.** $x - y + 1 = 0$ and $x + y = 5$ **3.** $4y + 3x = 1$
4. $\frac{3}{2}$ **5.** (i) $-\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{7}{5}$ (iii) $\frac{1}{3}$ **6.** $5x + 3y + 2 = 0$; **7.** $x - y + 3 = 0$
8. $3x + 2y = 6$ **9.** $x - y + 1 = 0$ **10.** $2x - y + 14 = 0$
12. $3x + 2y = 17$ **13.** $2x + 5y = 18$ **14.** $4x + 5y = 9$
15. (i) $\frac{7}{2}$ (ii) $\frac{9}{13}$ (iii) $\frac{21}{\sqrt{13}}$ (iv) $\frac{|c-d|}{\sqrt{1+m^2}}$ (v) $\frac{12}{5}$
16. (i) $\tan^{-1}(2-\sqrt{3})$ (ii) $45°$ (iii) $90°$
18. (i) $x\cos 150° + y\sin 150° = \frac{17}{2}$; (ii) $x\cos 30° + y\sin 30° = 2$
(iii) $x\cos 135° + y\sin 135° = 2$
19. (i) -2 (ii) $-\frac{4}{3}, -2$

❑❑❑

अध्याय 15

वृत्त (Circle)

15.1 परिभाषा (Definition)

वृत्त किसी समतल में ऐसे बिन्दुओं का समुच्चय है जो उस समतल में स्थित किसी नियत बिन्दु से स्थिर दूरी पर होते हैं।

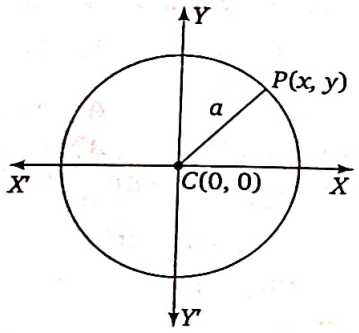
नियत बिन्दु को वृत्त का **केन्द्र (Centre)** तथा दी गई स्थिर दूरी को उसकी **त्रिज्या (Radius)** कहते हैं।

चित्र में स्थिर बिंदु C केंद्र तथा CP त्रिज्या है।

15.2 वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिंदु है (Equation of a Circle whose Centre is Origin)

माना $O(0, 0)$ वृत्त का केंद्र तथा $OP = a$ उसकी त्रिज्या है। माना $P(x, y)$ वृत्त पर कोई बिंदु है। अब बिंदु $O(0, 0)$ से बिंदु $P(x, y)$ की दूरी

$$|OP|^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$$



अर्थात् $(x-0)^2 + (y-0)^2 = a^2$

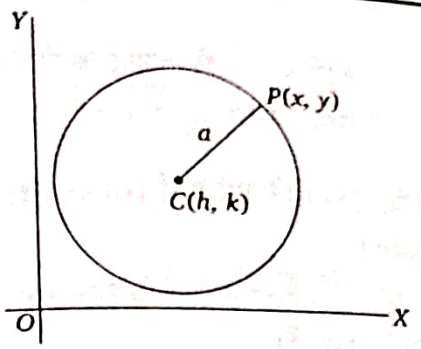
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x^2 + y^2 = a^2}$ यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

15.3 वृत्त का समीकरण, जिसकी त्रिज्या तथा केन्द्र ज्ञात हों : मानक रूप (Equation of a Circle whose Centre and Radius are given : Standard form or Central form)

माना $C(h, k)$ वृत्त का केंद्र तथा CP उसकी त्रिज्या है, जहाँ $P(x, y)$ वृत्त पर कोई बिंदु है।

माना $|CP| = a$ = वृत्त की त्रिज्या

किन्तु $CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ (दूरी सूत्र से)



$\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = a$

$\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2 = a^2$ (दोनों तरफ वर्ग करने पर)

यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

यह वृत्त का मानक समीकरण (Standard equation) या केन्द्रीय रूप (central form) कहलाता है। अतः वृत्त का मानक समीकरण जिसका केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या a है

$$\boldsymbol{(x-h)^2+(y-k)^2 = a^2}$$

नोट :

• उपर्युक्त समीकरण में $h=0, k=0$ रखने पर $x^2+y^2=a^2$ जो मूल बिंदु से जाने वाले वृत्त का समीकरण है।

15.4 वृत्त के समीकरण का व्यापक रूप (General form of the Equation of a Circle)

वृत्त का समीकरण जिसका केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या a है

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = a^2$$

$\Rightarrow x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-a^2) = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$

जहाँ $g=-h, f=-k$ तथा $c=h^2+k^2-a^2$

यह वृत्त के समीकरण का **व्यापक रूप** कहलाता है।

स्पष्ट है व्यापक समीकरण (1) में

केंद्र (centre) $=(-g,-f)$ तथा त्रिज्या (radius) $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

नोट :

• वृत्त के व्यापक समीकरण का दूसरा रूप (1) में a से गुणा करने से प्राप्त होता है।

$$\boldsymbol{ax^2+ay^2+2agx+2afy+ac=0}$$

15.4.1 सिद्ध करना है कि समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ एक वृत्त को निरूपित करता है।

प्रमाण : दिया गया समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

या $x^2+2gx+g^2-g^2+y^2+2fy+f^2-f^2+c=0$

या $(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)-(g^2+f^2-c)=0$

या $(x+g)^2+(y+f)^2 = g^2+f^2-c$

या $\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2 = (\sqrt{g^2+f^2-c})^2$

वृत्त के समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि यह समीकरण उस वृत्त को प्रदर्शित करता है जिसका केन्द्र $(-g,-f)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}$ है; $(g^2+f^2 \geq c)$

15.4.2 व्यापक द्विघात समीकरण के वृत्त होने की शर्तें (Conditions for a General Equation of Second Degree to be a Circle)

व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ एक वृत्त को निरूपित करेगा यदि

I. यह x तथा y में द्विघात समीकरण है।

II. इसमें x^2 तथा y^2 के गुणांक बराबर हैं; $i.e., a=b$

III. समीकरण में xy वाला कोई पद नहीं है; $i.e., h=0$

अतः व्यापक द्विघात समीकरण वृत्त को निरूपित करेगा, यदि $a=b$ तथा $h=0$ है।

नोट :

- (1) दिया गया वृत्त
  - (i) वास्तविक (Real) होगा यदि $g^2+f^2-c>0$ अर्थात् त्रिज्या वास्तविक हो।
  - (ii) बिंदु वृत्त (Point circle) होगा यदि $g^2+f^2-c=0$ अर्थात् त्रिज्या शून्य हो।
  - (iii) कोई वृत्त नहीं होगा या कल्पित वृत्त (Imaginary circle) होगा यदि $g^2+f^2-c<0$
- (2) यदि दिया गया वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ हो तो बिंदु (x_1, y_1)
  - (i) वृत्त के बाहर होगा यदि $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c>0$
  - (ii) वृत्त पर होगा यदि $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$
  - (iii) वृत्त के भीतर रहेगा यदि $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c<0$

15.4.3 द्विघात समीकरण से वृत्त की त्रिज्या एवं केंद्र ज्ञात करने की कार्य विधि (To find centre and radius of a circle given in general quadratic form)

I. जाँचें कि यह वृत्त होने की शर्तों का पालन करता है।

II. x^2 तथा y^2 का गुणांक इकाई बनायें।

III. प्राप्त समीकरण से

(i) केन्द्र $=\left(-\frac{1}{2}(x \text{ का गुणांक}), -\frac{1}{2}(y \text{ का गुणांक})\right)=(-g,-f)$

(ii) त्रिज्या $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}x \text{ का गुणांक}\right)^2+\left(\frac{1}{2}y \text{ का गुणांक}\right)^2-\text{अचर राशि}}=\sqrt{g^2+f^2-c}$

15.4.4 व्यास के शीर्षों के निर्देशांकों के पदों में वृत्त का समीकरण (Equation of the Circle when ends of the diameter are given)

माना A तथा B किसी वृत्त के व्यास AB के सिरे हैं तथा इनके नियामक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) है तथा $P(x, y)$ वृत्त की परिधि पर कोई बिंदु है।

A तथा B को मिलायें।

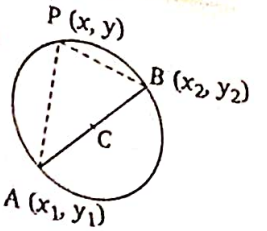
स्पष्ट है $\angle APB=90^\circ$ $[\because$ अर्द्धवृत्त का कोण $=90^\circ]$

$\therefore$ $AP \perp BP$

According to New Syllabus
Approved by UPBTE u
NEP-2020 & AI

अब AP की प्रवणता (Slope) $= \frac{y-y_1}{x-x_1} = m_1$

BP की प्रवणता $= \frac{y-y_2}{x-x_2} = m_2$



तो $m_1 \times m_2 = -1$ [∵ परस्पर लंब रेखाओं की प्रवणता का गुणनफल $= -1$]

$$\Rightarrow \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

$$\Rightarrow \quad (y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Rightarrow \quad (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

$\Rightarrow$ यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण : उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक $(-2, 4)$ तथा $(3, -5)$ हैं।

हल : यहाँ $(x_1, y_1) = (-2, 4), (x_2, y_2) = (3, -5) \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3; y_1 = 4, y_2 = -5$

अतः अभीष्ट समीकरण $\{x-(-2)\}(x-3) + (y-4)\{y-(-5)\} = 0$

$$(x+2)(x-3) + (y-4)(y+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2x - 6 + y^2 + 5y - 4y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - x + y^2 + y - 26 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - x + y - 26 = 0$$

$\Rightarrow$ उत्तर

15.5 वृत्त का प्राचलिक या परामितीय (Parametric) समीकरण

वृत्त के समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ में $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ रखने से समीकरण संतुष्ट होता है।

अतः वृत्त का प्राचलिक समीकरण $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ से दिया जाता है।

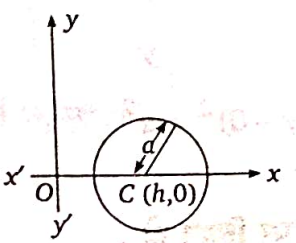
वृत्त पर स्थित किसी बिंदु के **प्राचलिक या परामितीय निर्देशांक ($a\cos\theta, a\sin\theta$)** से दिए जाते हैं तथा इसे 'θ' बिंदु कहते है, जहाँ 'θ' एक प्राचल (Parameter) है।

15.6 कुछ विशिष्ट स्थितियों में वृत्त का समीकरण (Equation of Circle in some Special Cases)

हम जानते हैं कि वृत्त का समीकरण, जिसका केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या a है, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ है। यहाँ हम कुछ विशिष्ट स्थितियों में वृत्त के समीकरण निकालेंगे।

1. **जब वृत्त का केंद्र x-अक्ष पर हो :** स्पष्ट है इस स्थिति में $k = 0$ अतः समीकरण $(x-h)^2 + (y-0)^2 = a^2$

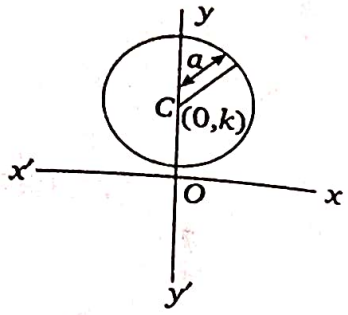
$\Rightarrow \quad (x-h)^2 + y^2 = a^2$ यह अभीष्ट समीकरण है



2. **जब वृत्त का केंद्र y-अक्ष पर स्थित हो :** स्पष्ट है इस स्थिति में $h = 0$

$\therefore$ अभीष्ट समीकरण $(x-0)^2 + (y-k)^2 = a^2$

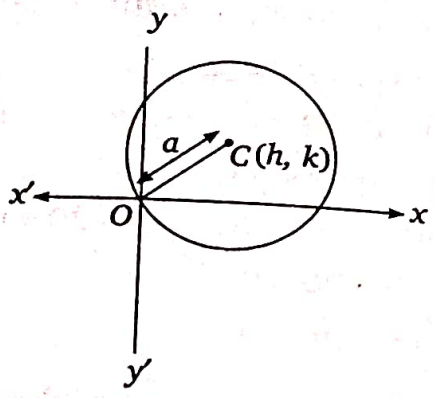
$\Rightarrow \quad x^2 + (y-k)^2 = a^2$



3. जब वृत्त मूल बिंदु से गुजरता है : स्पष्ट है इस स्थिति में मूल बिंदु (0, 0) से केंद्र (h, k) की दूरी OC = त्रिज्या a

अर्थात् $(h-0)^2 + (k-0)^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad h^2 + k^2 = a^2$

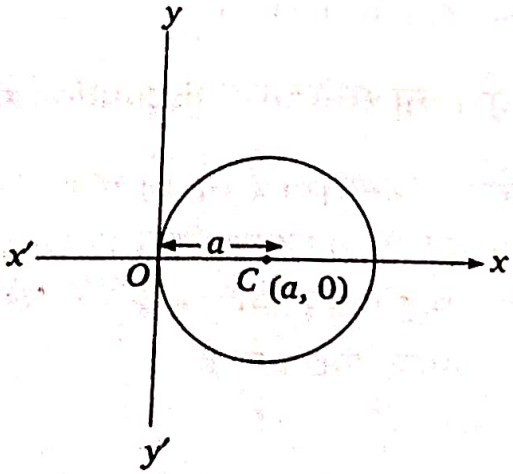


अत: समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 = h^2 + k^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2xh + y^2 - 2yk = 0$ यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

4. जब मूल बिंदु वृत्त तथा केंद्र x-अक्ष पर स्थित हो :

स्पष्ट है इस दशा में $h = a, k = 0$



अत: अभीष्ट समीकरण $(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2$

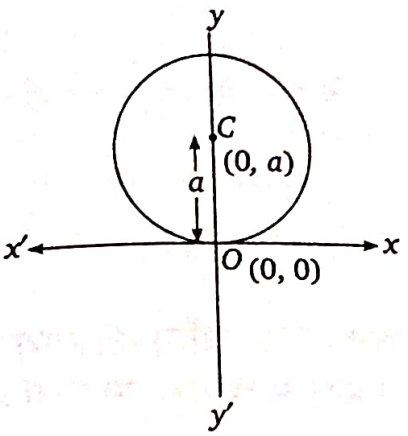
$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0$

5. जब मूल बिंदु वृत्त तथा केंद्र y-अक्ष पर स्थित हो :

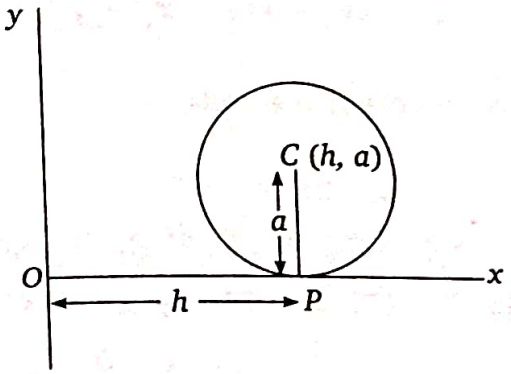
स्पष्ट है इस स्थिति में $h = 0, k = a$

अत: अभीष्ट समीकरण $(x-0)^2 + (y-a)^2 = a^2$

$x^2 + y^2 - 2ay = 0$

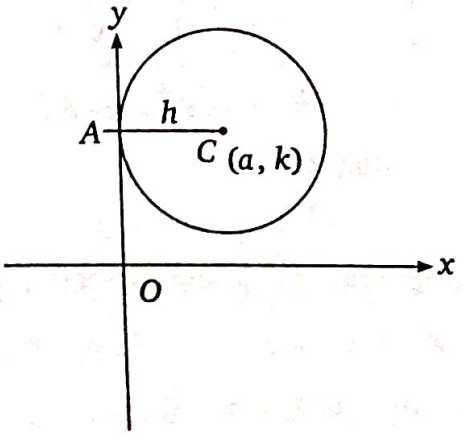


6. **जब वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है :**
स्पष्ट है इस स्थिति में $k = a =$ त्रिज्या

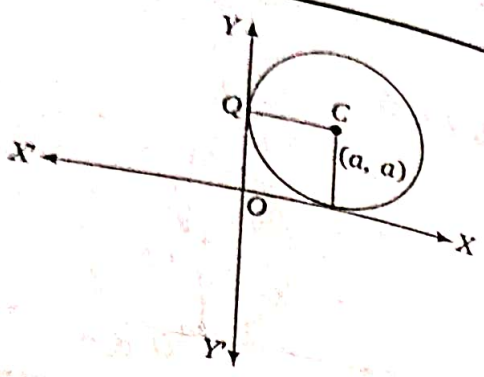


अतः समीकरण $(x-h)^2 + (y-a)^2 = a^2$

7. **जब वृत्त y-अक्ष को स्पर्श करता है :**
स्पष्ट है इस दशा में $h = a =$ त्रिज्या,
तो समीकरण $(x-a)^2 + (y-k)^2 = a^2$



8. **जब वृत्त x-अक्ष तथा y-अक्ष दोनों को स्पर्श करता है :**
स्पष्ट है इस दशा में $h = k = a =$ त्रिज्या
अतः समीकरण $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$



15.7 वृत्त की जीवा का समीकरण : जब उसकी जीवा का मध्य बिंदु ज्ञात है (Equation of the chord of a circle when its mid-point is given)

यदि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$

तथा वृत्त की जीवा का मध्य बिंदु (x_1, y_1) हो, तो जीवा का समीकरण

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

15.8 अक्षों पर अंतःखंड (Intercept on the axes)

माना वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

जो x-अक्ष को बिंदुओं A_1, A_2 तथा y-अक्ष को बिंदुओं B_1, B_2 पर काटता है।

(1) में $y = 0$ रखने से वे बिंदु प्राप्त होंगे जहाँ वृत्त (1) x-अक्ष को काटता है। अतः (1) से

$$x^2 + 2gx + c = 0 \quad \text{...(1)}$$

यदि x_1 तथा x_2 द्विघात समीकरण (2) के मूल हों तो

$$x_1 + x_2 = -2g, \quad x_1 x_2 = c \quad \text{...(2)}$$

[$ax^2 + bx + c = 0$ के मूल (roots) x_1, x_2 हों तो $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ तथा $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ...(3)

अब अंतःखंड की लं० $A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(-2g)^2 - 4c}$ [(3) से]

$$= \sqrt{4g^2 - 4c} = 2\sqrt{g^2 - c}, \; g^2 - c \geq 0$$

इसी तरह समीकरण (2) में $x = 0$ रखने पर

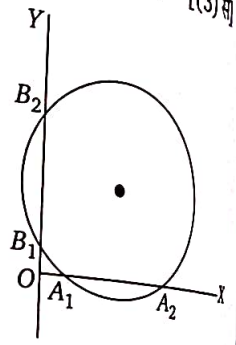
$$y^2 + 2fy + c = 0 \quad \text{...(4)}$$

इससे वे दो बिंदु प्राप्त होंगे जिन पर वृत्त (1) y-अक्ष को काटता है।

यदि (4) के मूल y_1 तथा y_2 हों तो $y_1 + y_2 = -2f, \; y_1 \cdot y_2 = c$

∴ अंतःखंड की लं० $B_1B_2 = OB_2 - OB_1 = y_2 - y_1$

$$= \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = 2\sqrt{f^2 - c}, \; f^2 - c \geq 0$$



नोट :

- x-अक्ष पर अंतःखंड प्राप्त करने के लिए वृत्त के समीकरण में $y = 0$ तथा y-अक्ष पर अंतःखंड के लिए $x = 0$ रखें।
- (a) वृत्त जब x-अक्ष को स्पर्श करेगा तो $A_1A_2 = 0 \Rightarrow g^2 = c$
- (b) वृत्त जब y-अक्ष को स्पर्श करेगा तो $B_1B_2 = 0 \Rightarrow f^2 = c$

(c) $x_1 \cdot x_2 < 0$ i.e., $c < 0$ अर्थात् मूल परस्पर विपरीत चिह्न के हों तो यह वृत्त x-अक्ष को मूल बिन्दु के दोनों ओर प्रतिच्छेद करता।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2, 3) तथा त्रिज्या 5 है।

हल : प्रश्न से वृत्त का केंद्र $(h, k) = (2, 3)$

$h = 2, k = 3$ तथा त्रिज्या $a = 5$

$\Rightarrow$ अतः वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

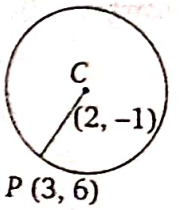
$\Rightarrow$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र $(2, -1)$ तथा जो बिंदु (3, 6) से होकर जाता है।

हल : प्रश्न से केंद्र $(h, k) = (2, -1)$

$\Rightarrow$ $h = 2, k = -1$

दिया गया बिंदु $P(3, 6)$



अतः त्रिज्या $a = CP = \sqrt{(3-2)^2 + \{6-(-1)\}^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

अतः समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{50})^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 50$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 45 = 0$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 3. वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।

हल : वृत्त के मानक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर

$2g = 4 \quad \Rightarrow \quad g = 2$

तथा $2f = -4 \quad \Rightarrow \quad f = -2$

$c = -1$

$\therefore$ केंद्र $(-g, -f) = (-2, 2)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 - (-1)}$

$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$ **उत्तर**

उदाहरण 4. वृत्त $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 3 = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।

हल : दिया गया समीकरण $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - \frac{6}{2}y + \frac{3}{2} = 0$ [x^2 तथा y^2 का गुणांक इकाई करने के लिए 2 से भाग देने पर]

$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - 3y + \frac{3}{2} = 0$

मानक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$2g = \frac{5}{2} \Rightarrow g = \frac{5}{4},$$

$$2f = -3 \Rightarrow f = -\frac{3}{2}$$

तथा $c = \frac{3}{2}$

अतः केन्द्र $(-g, -f) = \left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 36 - 24}{16}} = \frac{\sqrt{37}}{4}$$

उदाहरण 5. बिंदु $(-2, -7)$ से होकर जाने वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$ के संकेन्द्रीय (Concentric) है।

हल : दिया गया वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$

यहाँ $2g = -8 \Rightarrow g = -4$

तथा $2f = 6 \Rightarrow f = 3$

प्रश्नानुसार, अभीष्ट वृत्त का केंद्र $= (-g, -f)$ दिए गए वृत्त का केंद्र $= (4, -3)$

अब वृत्त $(-2, -7)$ से गुजरता है।

$\therefore$ त्रिज्या = वृत्त के केंद्र $(4, -3)$ तथा बिंदु $(-2, -7)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{\{4 - (-2)\}^2 + \{(-3) - (-7)\}^2} \quad \text{(दूरी सूत्र से)}$$

$$= \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

अतः वृत्त का समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$

$\Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = (\sqrt{52})^2$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 52$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y - 27 = 0$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 6. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(2, -3)$ है तथा जो रेखा $3x - 2y - 1 = 0$ तथा $4x + y - 27 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिंदु (Intersecting point) से गुजरता है।

हल : दी गई सरल रेखायें $3x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 1$ ...(1)

$$4x + y - 27 = 0 \Rightarrow 4x + y = 27 \quad \text{...(2)}$$

(2) में 2 से गुणा कर (1) में जोड़ने पर

$$3x - 2y = 1$$

$$8x + 2y = 54$$

$$\Rightarrow 11x = 55$$

$$x = \frac{55}{11} = 5$$

(1) में x का मान रखने पर

$$3 \times 5 - 2y = 1$$

$$2y = 14 \qquad \therefore \quad y = 7$$

अब प्रश्न से, वृत्त का केंद्र $(h, k) = (2, -3) \Rightarrow h = 2, k = -3$ तथा यह बिंदु $(5, 7)$ से गुजरता है।

वृत्त की त्रिज्या a = $(2, -3)$ तथा $(5, 7)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(5-2)^2 + \{7-(-3)\}^2} = \sqrt{9+100} = \sqrt{109}$$

∴ अत: वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = \sqrt{109}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 109$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y - 96 = 0 \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 7. $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$ से निरूपित वृत्त का व्यास की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वृत्त $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

यह उस वृत्त का समीकरण है जिसके व्यास के सिरे (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2)

∴ व्यास = सिरों (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ उत्तर

उदाहरण 8. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसके व्यास के सिरे (3, 4) तथा (5, 2) हैं।

हल : यदि व्यास के सिरे (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हैं तो वृत्त का समीकरण

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

यहाँ $(x_1, y_1) = (3, 4) \Rightarrow x_1 = 3, y_1 = 4$

$(x_2, y_2) = (5, 2) \Rightarrow x_2 = 5, y_2 = 2$

∴ अभीष्ट समीकरण $(x-3)(x-5) + (y-4)(y-2) = 0$

या $x^2 - 8x + 15 + y^2 - 6y + 8 = 0$

या $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$ यह अभीष्ट समीकरण है। उत्तर

उदाहरण 9. यदि $y = 3x$ वृत्त $x^2 + y^2 - 20x = 0$ की जीवा है, तो उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जिसका व्यास यह जीवा है।

हल : प्रश्न से वृत्त $x^2 + y^2 - 20x = 0$ ...(1)

तथा जीवा $y = 3x$

जीवा वृत्त को दो बिंदुओं P तथा Q (माना) पर काटेगी। अत:

(1) में $y = 3x$ रखने पर

$$x^2 + 9x^2 - 20x = 0$$

$$10x^2 - 20x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \; x = 2$$

अत: $y = 0$ तथा $y = 3 \times 2 = 6$

अत: P तथा Q के निर्देशांक क्रमश: (0, 0), (2, 6) हैं।

∵ जीवा अभीष्ट वृत्त का व्यास है,

अतः $(x_1, y_1) = (0, 0)$ तथा $(x_2, y_2) = (2, 6)$

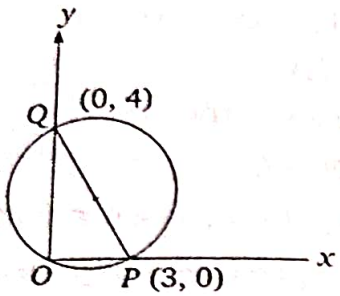
∴ अभीष्ट वृत्त $(x-0)(x-2)+(y-0)(y-6)=0$

या $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$ अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 10. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिन्दु से होकर जाता है तथा नियामक अक्षों पर क्रमशः 3 तथा 4 अंतःखंड (Intercepts) काटता है।

हल : माना OP तथा OQ वृत्त द्वारा क्रमशः x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गए अंतःखंड है, तो

$OP = 3, OQ = 4$



∴ अतः P के नियामक $= (3, 0)$

Q के नियामक $= (0, 4)$

अब $\angle POQ = 90°$ (∵ अर्द्धवृत्त का कोण समकोण है)

∴ अतः PQ वृत्त का व्यास है

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$$(x-3)(x-0)+(y-0)(y-4)=0$$

या $x^2 - 3x + y^2 - 4y = 0$

या $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

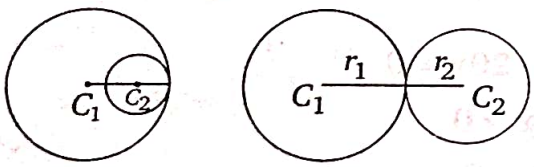
नोट :

• वृत्त का समीकरण (0, 0), (3, 0) तथा (0, 4) से गुजरने वाले वृत्त के समीकरण के रूप में भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण 11. सिद्ध कीजिए कि वृत्त $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ तथा $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ एक दूसरे को स्पर्श करेंगे यदि $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$

हल : दिए गए वृत्त $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ ...(1)

तथा $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ ...(2)



अतः (1) का केंद्र $C_1 = (-a, 0)$

त्रिज्या $= \sqrt{(-a)^2 + 0 - c} = \sqrt{a^2 - c}$

तथा (2) का केंद्र $C_2 = (0, -b)$

त्रिज्या $= \sqrt{0 + (-b)^2 - c} = \sqrt{b^2 - c}$

दो वृत्त एक-दूसरे को स्पर्श करेंगे यदि दोनों के केंद्रों के बीच की दूरी = दोनों की त्रिज्याओं का योग अथवा

$$C_1C_2 = r_1 \pm r_2$$

$$C_1C_2 = \sqrt{(-a-0)^2 + (0+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots(3)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 - c} \pm \sqrt{b^2 - c}$$

अतः (3) से, $a^2 + b^2 = (a^2 - c) + (b^2 - c) \pm 2\sqrt{a^2 - c}\sqrt{b^2 - c}$ (दोनों तरफ वर्ग करने पर)

$\Rightarrow \quad 2c = \pm 2\sqrt{a^2 - c}\sqrt{b^2 - c}$

$\Rightarrow \quad c = \pm \sqrt{a^2 - c}\sqrt{b^2 - c}$

$\Rightarrow \quad c^2 = (a^2 - c)(b^2 - c)$

$\Rightarrow \quad c^2 = a^2b^2 - c(a^2 + b^2) + c^2$

$\Rightarrow \quad a^2b^2 = c(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 12. वृत्त $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ की जीवा मूल बिंदु से होकर जाती है। सिद्ध कीजिए कि इस जीवा को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त के केंद्र का बिंदुपथ एक वृत्त है जो दिए गए वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।

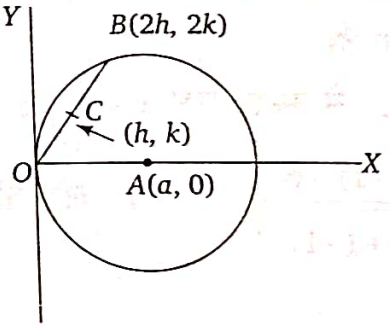
हल : दिया गया वृत्त

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - a^2 = 0$$

$\Rightarrow \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2$

$\Rightarrow$



अतः दिए गए वृत्त का केंद्र $= (a, 0)$ तथा त्रिज्या $= a$

वृत्त (1) मूल बिंदु $(0, 0)$ से होकर गुजरता है क्योंकि $(0, 0)$ इसे संतुष्ट करता है।

माना मूल बिंदु से खींची गई जीवा OB है। OB को व्यास मानकर वृत्त खींचा गया है। OB के मध्य-बिंदु अर्थात् ये वृत्त के केंद्र का बिंदुपथ ज्ञात करना है।

माना C के नियामक (h, k) हैं

$\therefore$ B के नियामक $= (2h, 2k)$ ($\because C$, OB का मध्य-बिंदु है)

B के नियामक वृत्त (1) को संतुष्ट करेंगे क्योंकि B दिए गए वृत्त (1) पर है।

अतः $(2h)^2 - 2a(2h) + (2k)^2 = 0$ [(1) में $x = 2h$, $y = 2k$ रखने पर]

$\Rightarrow \quad 4h^2 - 4ah + 4k^2 = 0$

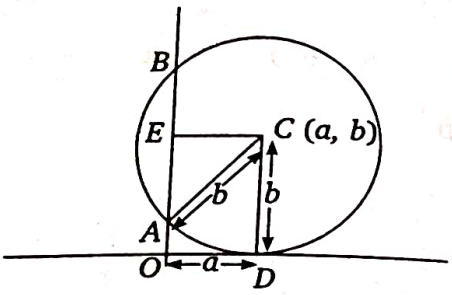
$\Rightarrow \quad h^2 - ah + k^2 = 0$

$\therefore$ अभीष्ट बिंदुपथ $x^2 - ax + y^2 = 0$

यह एक वृत्त का समीकरण है तथा (1) का केंद्र (h, k) इसे संतुष्ट करता है।

उदाहरण 13. कोई वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है तथा y-अक्ष से अचर लंबाई $2k$ का अंत:खंड काटता है। सिद्ध कीजिए केंद्र का बिंदुपथ $y^2 - x^2 = a^2$ है।

हल : माना $C\ (a, b)$ वृत्त का केंद्र है तथा x-अक्ष को बिंदु D पर स्पर्श करता है।



तो $OD = a, CD = b, AB = 2k$

बिंदु C से AB पर लंब डालिए।

तब $AE = EB = k$ तथा चित्र से $AC = CD = b =$ त्रिज्या

समकोण ΔCEA से $AC^2 = CE^2 + EA^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = a^2 + k^2 \qquad \Rightarrow \quad k^2 = b^2 - a^2$

अत: बिंदुपथ (1) में $a = x, b = y$ रखने से प्राप्त होगा।

अभीष्ट बिंदुपथ $y^2 - x^2 = k^2$

उदाहरण 14. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(2, -1)$ है तथा रेखा जो $x - y - 6 = 0$ को स्पर्श करता है

हल : प्रश्नानुसार, वृत्त का केंद्र $= (2, -1)$ तथा सरल रेखा का समीकरण $x - y - 6 = 0$

वृत्त इस सरल रेखा को स्पर्श करता है।

अत: वृत्त की त्रिज्या = केंद्र $(2, -1)$ से सरल रेखा $x - y - 6 = 0$ पर डाले गए लंब की लंबाई

$$= \left| \frac{2 - (-1) - 6}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \right| \qquad \left[\because \text{लंब की लं०} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

अब, केंद्र $(h, k) = (2, -1)$

त्रिज्या $a = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

अत: वृत्त का समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$

$$\Rightarrow \quad (x - 2)^2 + \{y - (-1)\}^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = \frac{9}{2}$$

$$x^2+y^2-4x+2y+5=\frac{9}{2}$$

$\Rightarrow \quad 2x^2+2y^2-8x+4y+10=9$

$\Rightarrow \quad 2x^2+2y^2-8x+4y+1=0$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 15. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र x-अक्ष पर है, त्रिज्या 5 है तथा जो बिंदु (2, 3) से होकर गुजरता है।

हल : प्रश्न से, माना वृत्त का केंद्र (h, k) है।

$\therefore$ केन्द्र $=(h, 0)$, त्रिज्या $=5$

अतः वृत्त का समीकरण $(x-h)^2+(y-0)^2=5^2$

$\Rightarrow \quad x^2-2hx+h^2+y^2=25 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2hx+h^2-25=0$ ...(1)

यह वृत्त बिन्दु (2, 3), से गुजरता है

अतः समी० (1) से, $4+9-4h+h^2-25=0$

$\Rightarrow \quad h^2-4h-12=0 \quad \Rightarrow \quad (h-6)(h+2)=0$

$\Rightarrow \quad h=6, h=-2$

अतः जब $h=6$, तो समी० (1) से वृत्त

$x^2+y^2-12x+36-25=0$ या $x^2+y^2-12x+11=0$ उत्तर

तथा जब $h=-2$

$x^2+y^2+4x+4-25=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+4x-21=0$ उत्तर

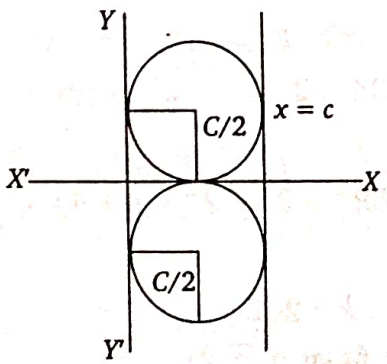
उदाहरण 16. उन वृत्तों का समीकरण ज्ञात करें जो रेखाओं $x=0$, $y=0$ और $x=c$ को स्पर्श करते हैं।

हल : प्रश्न से, वृत्त $x=0$, $y=0$ अर्थात् दोनों अक्षों एवं $x=c$ को स्पर्श करते हैं।

$\therefore$ वृत्त का व्यास $=c$

$\therefore$ त्रिज्या $=\frac{c}{2}$

इन वृत्तों के केंद्र $\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$ तथा $\left(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ होंगे।



अतः वृत्तों के समीकरण $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\left(y\pm\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2$

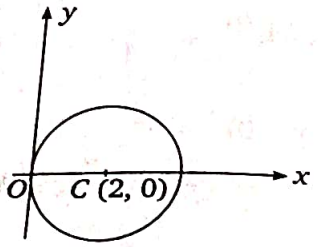
तथा $x^2-cx+\frac{c^2}{4}+y^2\pm cy+\frac{c^2}{4}=\frac{c^2}{4}$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - cx \pm cy + \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 4y^2 - 4cx \pm 4cy + c^2 = 0$$ अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 17. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र बिंदु (2, 0) है तथा वह y-अक्ष को स्पर्श करता है।

हल: प्रश्न से, वृत्त का केंद्र $(h, k) = (2, 0)$



$\Rightarrow \quad h = 2, k = 0$

त्रिज्या $a = OC = 2$

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

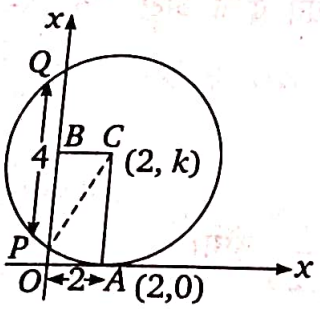
$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$

उदाहरण 18. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष को मूल बिंदु से 2 की दूरी पर स्पर्श करता है तथा y-अक्ष अंत:खंड 4 काटता है।

हल : माना वृत्त x-अक्ष को बिंदु A पर स्पर्श करता है तथा y-अक्ष पर अंत:खंड $PQ = 4$ काटता है। अत: A नियामक $= (2, 0)$ तथा केंद्र के नियामक $(h, k) = (2, k)$



$CB \perp PQ$ डालिए।

जिससे $PB = BQ = 2$ तथा $CB = OA = 2$

समकोण त्रिभुज CPB से

$$CP^2 = CB^2 + BP^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$\therefore \quad CP = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

किंतु त्रिज्या $CP = CA = k \qquad \therefore \quad k = 2\sqrt{2}$

अत: वृत्त का केन्द्र $(2, 2\sqrt{2})$ तथा त्रिज्या $2\sqrt{2}$ है।

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $(x-2)^2 + (y-2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4\sqrt{2}y + 8 = 8$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 4\sqrt{2}y + 4 = 0$ यह अभीष्ट समीकरण है।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. वृत्त का समीकरण जिसका केंद्र (h, k) है तथा त्रिज्या a है : $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$
2. वृत्त का समीकरण जिसका केंद्र $(0, 0)$ तथा त्रिज्या a है : $x^2+y^2=a^2$
3. वृत्त का समीकरण जिसके व्यास के सिरे (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से दिए जाते हैं
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$
4. वृत्त का सामान्य समीकरण
$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ जिसका केंद्र $(-g, -f)$ तथा त्रिज्या $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

प्रश्नावली 15.1

1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(0, 0)$ तथा त्रिज्या 3 है।
2. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र $(0, -5)$ तथा त्रिज्या 4 है।
3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (a, a) तथा त्रिज्या $a\sqrt{2}$ है।
4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ तथा त्रिज्या a है।
5. निम्न वृत्तों के केंद्रों के निर्देशांक और त्रिज्याओं की लंबाई ज्ञात करें।
(i) $(x+2)^2+(y+4)^2=16$ (ii) $4x^2+4y^2+12ax-6ay-a^2=0$
(iii) $x^2+y^2-6x+8y+9=0$ (iv) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**
(v) $(x+5)^2+y^2=49$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]**
(vi) $x^2+(y+2)^2=9$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]**
(vii) $x^2+y^2+3x-7y+1=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]**
6. $(x-y+a)^2+(x+y-a)^2=2a^2$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।
7. यदि वृत्त $4x^2+4y^2-5x+6y+c+7=0$ मूल बिंदु से होकर गुजरता है तो c का मान ज्ञात करें।
8. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र $(2, 3)$ है तथा जो बिंदु $(5, -1)$ से होकर गुजरता है।
9. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र $(3, -4)$ है तथा जो दो सरल रेखाओं $3x-2y-1=0$ तथा $4x+y-27=0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर गुजरता है।
10. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र सरल रेखाओं $x-2y+3=0$ तथा $2x-3y+4=0$ के प्रतिच्छेद बिंदु पर है तथा उसकी त्रिज्या 6 इकाई है।
11. दिखायें कि बिंदु $(1, 1)$ वृत्त $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ के भीतर का कोई बिंदु है।
[संकेत : केंद्र $C(-g, -f)=(2, -3)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{4+9+12}=5$
यदि $P(1, 1)$ हो तो $CP=C$ तथा P के बीच की दूरी $CP=\sqrt{(1-2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{17}<5$ अतः परिणाम]
12. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(5, 4)$ से होकर जाता है और वृत्त $x^2+y^2-8x-12y+15=0$ के संकेंद्रीय है।
13. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो $x^2+y^2+8x+10y-7=0$ के केंद्र से होकर गुजरता है तथा वृत्त $2x^2+2y^2-8x-12y-9=0$ के साथ संकेंद्रीय है।
14. वृत्त $x^2+y^2-3x+ky-5=0$ तथा $4x^2+4y^2-12x-y-9=0$ संकेन्द्रीय हों तो k का मान बताइए।
15. दिखायें वृत्त $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-6y-6=0$ तथा $x^2+y^2-4x-12y-9=0$ की त्रिज्यायें समानांतर श्रेढी में हैं।

16. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के सिरों के नियामक (2, 3) तथा (–1, – 2) हैं। वृत्त का केन्द्र भी ज्ञात करें।

(ii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक (0, 1) तथा (1, 1) हैं।

(iii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक (3, 4) तथा (2, –7) हैं।

(iv) उस वृत का समीकरण ज्ञात करें, जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक (–1, 2) और (4. – 3) हैं।

17. वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदुओं $(a\sin\theta, b\cos\theta)$ तथा $(a\cos\theta, -b\sin\theta)$ को मिलाने वाली सरल रेखा को व्यास मानकर खींचा गया है।

18. सिद्ध कीजिए बिंदु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त का समीकरण वही है जो बिंदुओं (x_1, y_2) तथा (x_2, y_1) को व्यास मानकर खींचा जाता है। बताइए ऐसा क्यों है।

19. $y = 2x$ वृत्त $x^2 + y^2 = 10x$ की कोई जीवा है तो इस जीवा को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त का समीकरण ज्ञात करें।

20. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिंदु से होकर गुजरता है तथा अक्षों से अंत:खंड 2 तथा 3 काटता है।

(ii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से गुजरे तथा अक्षों के धनात्मक भागों से क्रमश: 3 तथा 4 के बराबर अन्त:खण्ड काटे।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2021(S)]

21. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2, 3) है तथा जो x-अक्ष को स्पर्श करता है।

22. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (1, 2) है तथा जो y-अक्ष को स्पर्श करता है।

23. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (1, 1) है तथा जो दोनों अक्षों को स्पर्श करता है।

24. (i) उन वृत्तों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो दोनों अक्षों तथा $x = c$ को स्पर्श करता है।

[संकेत : रेखायें $x = 0, y = 0, x = c$]

(ii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $x = 0, y = 0, x = 2$ तथा $y = 2$ को स्पर्श करता है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]

25. सिद्ध कीजिए सीधी रेखाओं $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$ और $x\sin\alpha + y\cos\alpha = b$ के प्रतिच्छेद बिंदु का बिंदुपथ एक वृत्त है।

[संकेत : रेखाओं के समीकरण को वर्ग कर जोड़ें।]

26. कोई वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है तथा y-अक्ष से अचर लंबाई $2k$ काटता है। सिद्ध कीजिए उसके केंद्र का बिंदुपथ $y^2 - x^2 = k^2$ है।

27. वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।

28. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र (–1, 1) है तथा जो सरल रेखा $x + 2y - 4 = 0$ को स्पर्श करता है।

29. सिद्ध कीजिए वृत्त $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं।

30. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (1, 2) तथा (3, 0) से गुजरता है तथा x-अक्ष पर अंत:खंड 7 काटता है।

31. वृत्त $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$ द्वारा x-अक्ष पर कटे अंत:खंड का मान ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2019(S)]

उत्तरमाला

1. $x^2 + y^2 = 9$

2. $x^2 + y^2 + 10y + 9 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay = 0$

4. $x^2 + y^2 - 2ax\cos\alpha - 2ay\sin\alpha = 0$

5. (i) (–2, – 4), त्रिज्या = 4 (ii) $\left(-\frac{3a}{2}, \frac{3a}{4}\right)$, त्रिज्या $= \frac{7a}{4}$ (iii) (3, – 4), त्रिज्या = 4

(iv) केन्द्र (2, –1), त्रिज्या = 2 (v) केन्द्र (–5, 0), त्रिज्या = 7 (vi) केन्द्र (0, – 2), त्रिज्या = 3

(vii) केन्द्र $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, त्रिज्या $= \sqrt{\frac{27}{2}}$

केन्द्र $(0, a)$, त्रिज्या $= a$

6. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

8. $x^2+y^2-2x-4y-31=0$

10. $x^2+y^2-4x-6y-87=0$

13. $x^2+y^2-x-y-8=0$, क्षेत्रफल $=\frac{17}{2}\pi$

16. (i) $x^2+y^2-5x+3y-22=0$ (ii) $x^2+y^2-x-2y+1=0$

(iii) $x^2+y^2-a(\sin\theta+\cos\theta)x-b(\cos\theta-\sin\theta)y+(a^2-b^2)\sin\theta.\cos\theta=0$ (iv) $x^2+y^2-3x+y-10=0$

17. $x^2+y^2-2x-4y=0$ **20.** (i) $x^2+y^2-2x-3y=0$ (ii) $x^2+y^2-3x-4y=0$

19. $x^2+y^2-2x-6y+4=0$ **22.** $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

21. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

23. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ (ii) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

24. (i) $4x^2+4y^2-4cx\pm4cy+c^2=0$ **28.** $5x^2+5y^2+10x-10y+1=0$

27. केन्द्र $(-g,-f)$; त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}$ **31.** $2\sqrt{2}$

30. $x^2+y^2+x+3y-12=0$

15.8 वृत्त के समीकरण में अचर (Constants in the Equation of Circle)

हम देखते हैं कि वृत्त के सामान्य समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ में तीन अचर h, k तथा a हैं।

इसी तरह समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ में भी तीन अचर g, f तथा c हैं।

अतः इन तीन अज्ञात अचरों के निर्धारण के लिए तीन समीकरणों की आवश्यकता होगी। दूसरे शब्दों में, किसी वृत्त को अद्वितीय रूप में तभी खींचा जा सकता है जब वह तीन स्वतंत्र प्रतिबंधों (समीकरणों) का पालन करता हो।

15.8.1 तीन बिंदुओं से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण (Circle Passing through three given Points)

माना वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

यदि वृत्त तीन दिए गए बिंदुओं से गुजरता है तो ये बिंदु इस समीकरण को संतुष्ट करेंगे, जिससे g, f तथा c में तीन समीकरण प्राप्त होंगे जिन्हें हल कर g, f तथा c का मान प्राप्त किया जा सकता है।

क्रिया विधि निम्न उदाहरणों से सपष्ट है।

विकल्प : यदि वृत्त तीन बिंदुओं $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) से गुजरता है, तो उस वृत्त का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 1), (2, −1) और (3, 2) से होकर जाता है।

हल : दिए गए वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

चूँकि (1) बिंदु (1, 1), (2, −1) तथा (3, 2) से होकर गुजरता है। अतः (i) से

$\therefore \quad 1^2 + 1^2 + 2g \times 1 + 2f \times 1 + c = 0$

$2^2 + (-1)^2 + 2g \times 2 + 2f(-1) + c = 0$

$3^2 + (2)^2 + 2g \times 3 + 2f(2) + c = 0$ ...(i)

अर्थात् $2 + 2g + 2f + c = 0$

$5 + 4g - 2f + c = 0$

$13 + 6g + 4f + c = 0$

(iii) − (ii) से $2g - 4f = -3$ ...(ii)

(iv) − (iii) से $2g + 6f = -8$ ...(iii)

पुनः (vi) − (v) से $10f = -5 \quad \Rightarrow \quad f = -\frac{1}{2}$ ...(iv) ...(v) ...(vi)

पुनः (v) में f का मान रखने पर

$$2g - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 \quad \Rightarrow \quad 2g = -3 - 2 = -5$$

$\therefore \quad g = -\frac{5}{2}$ तथा g एवं f का मान समीकरण (ii) में रखने पर $c = 4$

इन मानों को (i) में रखने पर

$$x^2 + y^2 + 2(-5/2)x + 2(-1/2)y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2. किसी त्रिभुज के शीर्ष के नियामक $A(1, -5)$, $B(5, 7)$ तथा $C(-5, 1)$ हैं तो ABC के परिगत वृत्त का समीकरण प्राप्त करें।

हल : माना वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

∵ वृत्त (1) बिंदुओं (1, −5), (5, 7) तथा (−5, 1) से गुजरता है ...(1)

अतः $1 + 25 + 2g - 10f + c = 0$

अर्थात् $2g - 10f + c + 26 = 0$

तथा $25 + 49 + 10g + 14f + c = 0$ ...(2)

अर्थात् $10g + 14f + c + 74 = 0$

तथा $25 + 1 - 10g + 2f + c = 0$ ...(3)

अर्थात् $-10g + 2f + c + 26 = 0$ ...(4)

(2) − (3) से

$$8g + 24f + 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad g + 3f + 6 = 0 \quad ...(5)$$

(3) − (4) से

$$20g + 12f + 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5g + 3f + 12 = 0 \quad ...(6)$$

(6) – (5) से $4g + 6 = 0 \Rightarrow g = -\frac{3}{2}$

(5) में $g = -\frac{3}{2}$ रखने पर

$-\frac{3}{2} + 3f + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad f = -\frac{3}{2}$

तथा (2) में f तथा g का मान रखने पर

$2\times\left(-\frac{3}{2}\right) - 10\times\left(-\frac{3}{2}\right) + c + 26 = 0$

$\Rightarrow \quad c = 3 - 15 - 26 = -38$

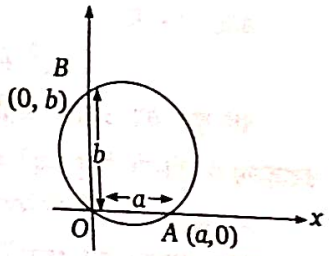
अत: (1) में f, g तथा c का मान रखने पर

$x^2 + y^2 - 3x - 3y - 38 = 0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिंदु से गुजरता है तथा नियामक अक्षों के धनात्मक भाग से (Coordinate Axes) से अंत:खंड a तथा b काटता है।

हल : माना वृत्त x-तथा y-अक्षों को क्रमश: A तथा B बिंदु पर काटता है।



अत: प्रश्न से A के निर्देशांक $= (a, 0)$

B के निर्देशांक $= (b, 0)$

अत: वृत्त मूल बिंदु $(0, 0)$, $(a, 0)$ तथा $(0, b)$ से होकर गुजरता है।

माना वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots(1)$$

$\therefore$ $(0, 0)$ वृत्त पर है।

अत: $0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

(1) में यह मान रखने पर वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0 \qquad \ldots(2)$$

पुन: $A\,(a, 0)$ वृत्त (1) पर है अत:

$a^2 + 0 + 2ag + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a\,(a + 2g) = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0, a = -2g$ अर्थात् $g = -\frac{a}{2}$

पुन: $B\,(0, b)$ वृत्त (1) पर है अत:

$0 + b^2 + 0 + 2bf = 0$

$\Rightarrow \quad b(b + 2f) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0, b = -2f \quad$ या $\quad f = -\frac{b}{2}$

इन मानों को (1) में रखने पर

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{1}{2}a\right)x + 2\left(-\frac{1}{2}b\right)y = 0$$

अर्थात् $\quad x^2 + y^2 - ax - ay = 0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (1, – 2) तथा (4, – 3) से होकर जाता है और जिसका केन्द्र रेखा $3x + 4y = 5$ पर है।

हल : माना वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

यह वृत्त बिंदुओं (1, – 2), (4, – 3) से होकर जाता है।

अतः (1) से

$$1 + 4 + 2g - 4f + c = 0 \quad \ldots(1)$$

$$16 + 9 + 8g - 6f + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2g - 4f + c + 5 = 0$$

$$8g - 6f + c + 25 = 0$$

वृत्त का केंद्र $(-g, -f)$ सरल रेखा $3x + 4y = 5$ पर है।

$$\therefore \quad -3g - 4f = 5 \quad \ldots(2)$$

(2), (3) तथा (4) को हल करने पर

$$g = -3,\ f = 1,\ c = 5 \quad \ldots(3)$$

अतः (1) से

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \quad \ldots(4)$$

यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

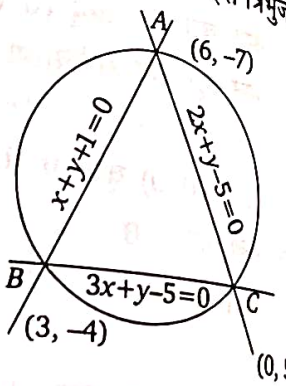
उदाहरण 5. किसी त्रिभुज की भुजायें $x + y + 1 = 0,\ 3x + y - 5 = 0$ तथा $2x + y - 5 = 0$ से दी जाती है। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त का समीकरण ज्ञात करें।

हल : त्रिभुज की भुजायें

$$x + y + 1 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$3x + y - 5 = 0 \quad \ldots(2)$$

$$2x + y - 5 = 0 \quad \ldots(3)$$



(1), (2) तथा (3) को हल करने पर

त्रिभुज के शीर्षों के नियामक (3, – 4), (0, 5) तथा (6, – 7) हैं।

माना परिगत वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

अतः शीर्षों के नियामक (1) को संतुष्ट करेंगे।

अतः

$$25 + 6g - 8f + c = 0 \quad \ldots(1)$$

$$25 + 10f + c = 0 \quad \ldots(2)$$

$$85 + 12g - 14f + c = 0 \quad \ldots(3)$$

(2) – (3) से

$$6g - 18f = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 3f \quad \ldots(4)$$

(4) – (3) से

$$60 + 12g - 24f = 0 \quad \Rightarrow \quad g - 2f + 5 = 0 \quad \ldots(5)$$

(5) से g का मान रखने पर

$$3f - 2f + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad f = -5 \quad \ldots(6)$$

According to New Syllabus 20
Approved by UPBTE und
NEP-2020 & AIC

$g = 3f = 3 \times (-5) = -15$

$\therefore$ मैं $f = -5$ रखने से $c = -25 + 50 = 25$

(3) अत: $x^2 + y^2 - 30x - 10y + 25 = 0$ अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 6. सिद्ध करें बिंदु (2, −4), (3, −1), (3, −3) तथा (0, 0) संवृत्तीय (concyclic) है।

हल : माना (2, −4), (3, −1), (3, −3) तथा (0, 0) से गुजरने वाला वृत्त

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots(1)$$

से दिया जाता है।

$\therefore$ यह (0, 0) से गुजरता है,

$$0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$\therefore$ अत: (1) से वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

बिंदु (2, −4) वृत्त (2) पर है $\ldots(2)$

$\therefore$ $4 + 16 + 4g - 8f = 0$

$\therefore$ $4g - 8f = -20 \quad \Rightarrow \quad g - 2f = -5 \quad \ldots(3)$

$\Rightarrow$ पुन: (3, −1) वृत्त पर है

$\therefore$ $9 + 1 + 6g - 2f = 0 \quad \Rightarrow \quad 3g - f = -5 \quad \ldots(4)$

(3) तथा (4) को हल करने पर

$$g = -1, \; f = 2$$

अत: (2) से वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

अत: यदि (3, −3) इस वृत्त पर है, तो यह इसे संतुष्ट करेगा।

$\therefore$ $(3)^2 + (-3)^2 - 2(3) + 4(-3) = 9 + 9 - 6 - 12 = 0$

अत: बिंदु (3, −3) इस वृत्त पर है, अत: दिए गए बिंदु संवृत्तीय हैं।

महत्वपूर्ण सूत्र

यदि वृत्त तीन बिंदुओं $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) से गुजरता है, तो उस वृत्त का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

प्रश्नावली 15.2

1. यदि किसी वृत्त का केंद्र सरल रेखा $3x + 4y = 7$ पर हो तथा वह बिंदु (1, −2) तथा (4, −3) से होकर गुजरता हो तो उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें।
2. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो (3, −2) तथा (−2, 0) से होकर गुजरता है तथा इसका केंद्र $2x - y = 3$ पर है।
   (ii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो (0, 5) तथा (6, 1) से होकर गुजरता है तथा इसका केंद्र $12x + 5y = 25$ पर है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

(iii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदुओं (2, 2), (−4, 8) से होकर गुजरता है तथा जिसका केंद्र सरल रेखा $2x + 5y = 2$ पर स्थित है।

3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो (4, 5) तथा (6, −4) से होकर गुजरता है तथा उसका केंद्र x-अक्ष पर है।

4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र x-अक्ष पर है तथा जो बिंदु (2, 3) से गुजरता है।

5. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिंदु तथा बिंदु $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ से होकर गुजरता है तथा जिसका व्यास $2x - 3y = 0$ से दिया जाता है।

6. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिंदु से होकर गुजरता है तथा अक्षों पर अंतःखंड 4 तथा 5 काटता है।

(ii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिंदु से होकर गुजरता है तथा अक्षों पर अंतःखंड 3 तथा 4 काटता है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]**

7. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो अक्षों से अंतःखंड −5 तथा 7 काटता है तथा मूल बिंदु से होकर गुजरता है।

8. दिखायें कि बिंदु (1, −6), (5, 2), (7, 0) तथा (−1, −4) संवृत्तीय चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

9. दिखायें कि बिंदु (3, −2), (1, 0), (−1, −2) तथा (1, −4) संवृत्तीय हैं।

10. किसी वर्ग $ABCD$ की भुजा AB की लंबाई a है तो AB तथा AD को निर्देशांक अक्ष पर लेकर इस वर्ग के परिवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए। इसका केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।

[संकेत : वृत्त बिंदु $(0, 0), (a, 0), (a, a)$ तथा $(0, a)$ से होकर गुजरेगा।

11. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो (1, 2), (3, −4) तथा (5, −6) से होकर गुजरता है।

(ii) बिंदुओं (3, 1), (14, −1) और (11, 5) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात करें।

12. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो $x + y = 6$, $2x + y = 4$ तथा $x + 2y = 5$ से दी जाती हैं तो इस त्रिभुज के परिगत वृत्त का समीकरण निकालें।

(ii) उस त्रिभुज के परिगत वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसके शीर्ष (0, 0), (2, 3) तथा (3, 4) हैं, इसका केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]**

13. (i) वृत्त की परिभाषा दें।

(ii) वृत्त का व्यापक समीकरण लिखें।

(iii) उस वृत्त का समीकरण लिखें, जिसका केन्द्र मूल बिंदु तथा त्रिज्या a है।

(iv) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र (2, 0) तथा त्रिज्या 7 है।

(v) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र (2, 0) है तथा जो y-अक्ष को स्पर्श करता है।

(vi) वृत्त का परामितीय समीकरण लिखें।

(vii) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ का केन्द्र बतायें।

(viii) $x^2 + y^2 - 2ax + 2by + b^2 = 0$ की त्रिज्या ज्ञात करें।

(ix) $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ से निरूपित वृत्त का व्यास ज्ञात करें।

(x) $x^2 + y^2 = 9$ को प्राचलिक समीकरण के रूप में व्यक्त करें।

(xi) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ की त्रिज्या ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

यदि वृत्त का केन्द्र (h, k) हो तथा यह x-अक्ष को स्पर्श करता है तो उसकी त्रिज्या होगी—

According to New Syllabus 20
Approved by UPBTE und
& AIC

(b) k (c) $h^2 + k^2$ (d) $\sqrt{h^2 + k^2}$

(a) h

यदि वृत्त दोनों अक्षों को स्पर्श करता है, तो केन्द्र के नियामक—

(a) समान होंगे (b) असमान होंगे

(c) समान या असमान दोनों हो सकते है (d) इनमें से कोई नहीं

यदि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ हो तो इसका केन्द्र होगा—

(a) (g, f) (b) $(-g, -f)$ (c) $\left(\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}f\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}g, -\frac{1}{2}f\right)$

$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ एक वृत्त होगा यदि—

(a) $a = b$ तथा $h = 0$ (b) $a = b, h \neq 0$ (c) $a \neq b, h \neq 0$ (d) $a \neq b, h = 0$

वृत्त $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$ का केंद्र है—

(a) $(1, -1)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(-1, 1)$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $15x^2 + 15y^2 - 94x + 18y + 55 = 0$
2. (i) $x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x - 2y - 15 = 0$

   (iii) $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0$
3. $2x^2 + 2y^2 - 11x - 38 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0,\ x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 0$
6. $x^2 + y^2 - 4x - 5y = 0$
7. $x^2 + y^2 + 5x - 7y = 0$
10. $x^2 + y^2 - a(x + y) = 0$, केंद्र $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, त्रिज्या $= \frac{a}{\sqrt{2}}$
11. (i) $x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 - 17x + 41 = 0$
12. (i) $x^2 + y^2 - 17x - 19y - 50 = 0$

    (ii) $x^2 + y^2 - 23x + 114 = 0$, केंद्र $\left(\frac{23}{2}, \frac{-11}{2}\right)$, त्रिज्या $= \frac{\sqrt{325}}{2}$ इकाई
13. (i) देखें परिभाषा। (ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (iii) $x^2 + y^2 = a^2$

    (iv) $x^2 + y^2 - 4x - 45 = 0$ (v) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

    (vi) $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ (vii) $(-2, 2)$ (viii) a

    (ix) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (x) $x = 3\cos\theta, y = 3\sin\theta$ (xi) 2

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (b) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (a) **5.** (a)

□□□

अध्याय 16

परवलय (Parabola)

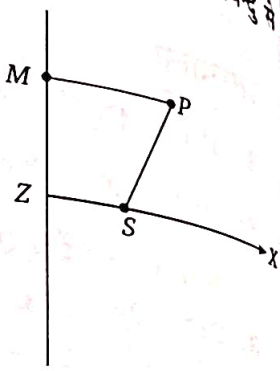
16.1 परिभाषायें (Definitions)

16.1.1. शांकव या शंकु परिच्छेद (Conic or Conic section)

शांकव या शंकु परिच्छेद ऐसे बिंदु का बिंदुपथ है, जो इस प्रकार गति करता है कि इसकी किसी स्थिर बिन्दु से दूरी तथा स्थिर रेखा से लंबात्मक दूरी का अनुपात एक स्थिर राशि होती है।

नाभि (Focus) : नियत बिंदु, जिससे बिंदु पथ पर गतिशील बिंदु की दूरी नापी जाती है, को शांकव की **नाभि** कहते हैं। इसे सामान्यत: S से सूचित किया जाता है।

नियता (Directrix) : नियत स्थिर रेखा, जिससे बिंदुपथ पर किसी बिंदु की लंबात्मक दूरी नापी जाती है, नियता कहलाती है। चित्र में स्थिर सरल रेखा ZM नियता है।



अक्ष (Axis) : नाभि S से गुजरने वाली तथा नियता पर लंब रेखा को शांकव का अक्ष कहते हैं। चित्र में ZX को, जो S से होकर गुजरता है तथा नियता ZM पर लम्ब है, **अक्ष** कहते हैं।

उत्केन्द्रता (Eccentricity) : शांकव पर स्थित बिंदुओं की स्थिर बिंदु (**नाभि**) तथा स्थिर सरल रेखा (**नियता**) से दूरियों का स्थिर अनुपात उत्केन्द्रता कहलाती है। इसे **e** से सूचित किया जाता है। चित्र से $\frac{PS}{PM} = e$

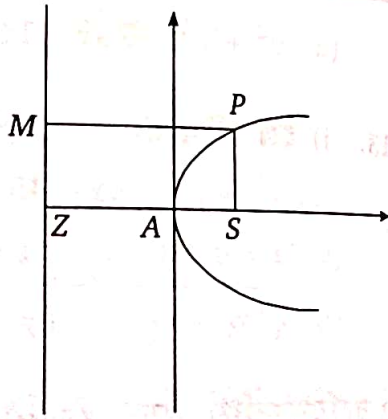
शांकव के प्रकार (Types of Conic)—शांकव

(i) परवलय (Parabola) होगा, यदि $e = 1$ (ii) दीर्घवृत्त (Ellipse) होगा, यदि $e < 1$

(iii) अतिपरवलय (Hyperbola) होगा, यदि $e > 1$

16.2 परवलय (Parabola)

परिभाषा : परवलय उस बिंदु का बिंदुपथ है जो इस प्रकार गति करता है कि उसकी एक स्थिर बिंदु जिसे **नाभि** कहते हैं, से दूरी और एक स्थिर रेखा जिसे **नियता** कहते हैं, से लंबवत् दूरी सदैव बराबर रहती हैं। इसकी उत्केन्द्रता e का मान 1 होता है।



चित्र में स्थिर बिंदु S को परवलय की नाभि (focus) तथा स्थिर सरल रेखा ZM परवलय की नियता (Directrix) कहते हैं।

अक्ष (Axis) : नाभि से होकर जाने वाली तथा नियता पर लम्ब सरल रेखा को परवलय का अक्ष कहते हैं। चित्र में ZSX-अक्ष है।

शीर्ष (Vertex) : परवलय तथा अक्ष के प्रतिच्छेद बिंदु को उसका शीर्ष कहते हैं। चित्र में A परवलय का शीर्ष है। यह नियता तथा नाभि से बराबर दूरी पर होता है। चित्र में $ZA = AS$

अत: यदि $AS = a$ तो $ZS = 2a$

16.2.1 परवलय का मानक समीकरण (Standard Equation of a Parabola)

माना S परवलय की नाभि है तथा DD' इसकी नियता है, बिंदुपथ पर (या) कोई बिन्दु है। P को S से मिलायें तथा $PM \perp DD'$ खींचें।

नाभि S से DD' पर लम्ब SZ डालें तथा SZ को A बिंदु पर परिमाजित करें। अत: यदि $SZ = 2a$ तो $AS = AZ = a$

माना A मूल बिंदु, रेखा AX x-अक्ष तथा A से जाने वाली और उस पर रेखा AY y-अक्ष है।

∴ नाभि S के नियामक $= (a, 0)$

DD' y-अक्ष के समानांतर है तथा इससे a दूरी पर स्थित है

∴ नियता DD' का समीकरण $x = -a$ या $x + a = 0$ ...(1)

तथा Z के नियामक : $(-a, 0)$

पुन: $PM \perp DD'$

$\therefore PM = \dfrac{x + a}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = x + a$ तथा $SP = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$

किंतु परवलय की परिभाषा से, $SP = PM$

$\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a \quad \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2 \quad \Rightarrow y^2 = 4ax$

∴ अभीष्ट परवलय का समीकरण $\mathbf{y^2 = 4ax,\ a > 0}$

यह परवलय का मानक समीकरण कहलाता है।

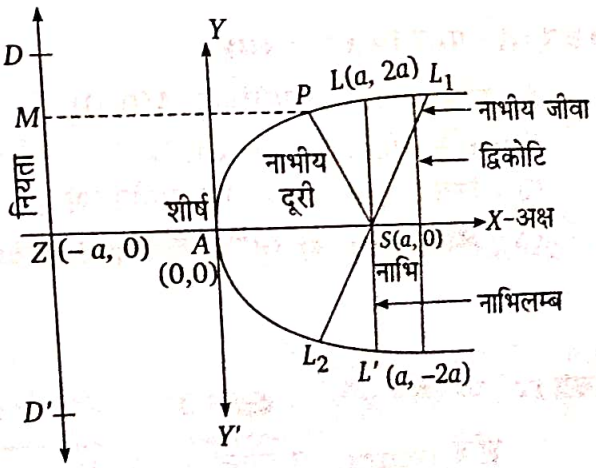
16.3 अन्य परिभाषायें (Other Definitions)

(1) नाभीय दूरी (Focal Distance) : परवलय के किसी बिंदु की उसकी नाभि से दूरी **नाभीय दूरी** कहलाती है, चित्र में PS बिंदु P की नाभीय दूरी है।

(2) जीवा एवं नाभीय जीवा (Chord and Focal Chord) : परवलय पर स्थित दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा उसकी **जीवा** कहलाती है।

यदि यह जीवा परवलय की नाभि से होकर गुजरती है, तो यह जीवा **नाभीय जीवा** कहलाती है।

(3) नाभिलम्ब (Latus Rectum) : यदि किसी परवलय की नाभीय जीवा उसके अक्ष पर लम्ब होती है तो उस नाभीय जीवा को उस परवलय का **नाभिलम्ब** कहते हैं। चित्र में LSL' नाभिलम्ब है क्योंकि यह नाभि S से होकर गुजरता है तथा अक्ष पर लम्ब है।



16.3.1. नाभिलम्ब : शीर्ष, लम्बाई एवं समीकरण

(i) नाभिलम्ब के शीर्ष के नियामक

मान लिया परवलय $y^2 = 4ax$ का नाभिलंब LSL' है (चित्र धारा 16.2.1)।

माना $SL = l$ तो L के निर्देशांक $= (a, l)$

$\therefore l^2 = 4a \times a$ [∵ बिंदु L परवलय पर है]

$\therefore l = \pm 2a$

∴ अत: नाभिलम्ब के सिरे L तथा L' के नियामक $= (a, 2a)$ तथा $(a, -2a)$

(ii) पुनः नाभिलम्ब $LSL' = 2SL = 2 \times 2a = 4a$

$\therefore$ **नाभिलम्ब की लम्बाई = $4a$**

(iii) नाभिलम्ब का समीकरण : चूँकि नाभि मूलबिंदु से a दूरी पर है

अतः **नाभिलम्ब का समीकरण $x = a$**

16.4 परवलय के विभिन्न रूप एवं महत्वपूर्ण परिणाम (Other standard forms of Parabola and Important Results)

▸ रूप I : परवलय का मानक समीकरण $y^2 = 4ax$

(1) शीर्ष के निर्देशांक : $(0, 0)$

(2) नाभि के निर्देशांक : $(a, 0)$

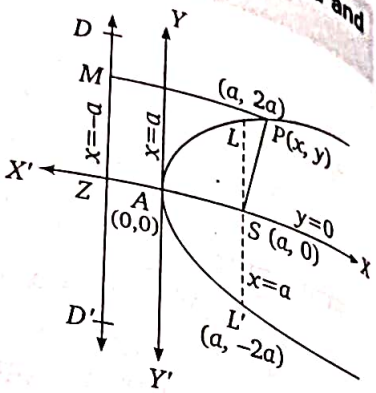
(3) नियता का समीकरण $x = -a$ या $x + a = 0$

(4) अक्ष का समीकरण $y = 0$

(5) बिंदु $P(x, y)$ की नाभीय दूरी $= SP = PM = a + x$

(6) नाभिलम्ब LSL' की लम्बाई $= 2SL = 2SZ = 2 \times 2a = 4a$

(7) $y^2 = 4ax$ को दायीं ओर का परवलय (Right handed Parabola) कहते हैं।



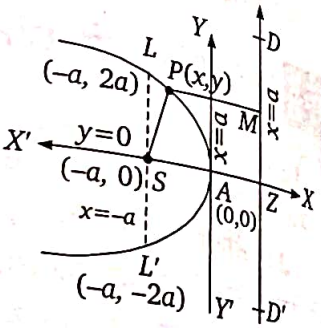
▸ रूप II : परवलय $y^2 = -4ax$

(i) **शीर्ष** (vertex), मूलबिन्दु $A(0, 0)$;

(ii) **नाभि** (focus), $S(-a, 0)$;

(iii) **नियता** (directrix) का समीकरण $x = a$

(iv) **अक्ष** (axis) का समीकरण $y = 0$, अर्थात् x-अक्ष है।



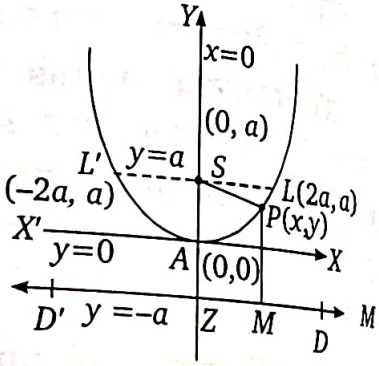
▸ रूप III : परवलय $x^2 = 4ay$

(i) **शीर्ष** (vertex), मूलबिन्दु $A(0, 0)$;

(ii) **नाभि** (focus), $S(0, a)$;

(iii) **नियता** (directrix) का समीकरण $y = -a$

(iv) **अक्ष** (axis) का समीकरण $x = 0$ अर्थात् y-अक्ष है।



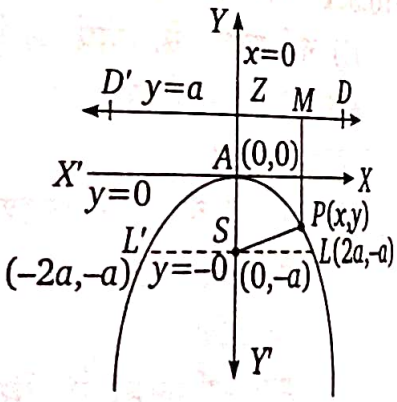
रूप IV : परवलय $x^2 = -4ay$

(i) **शीर्ष** (vertex), मूलबिन्दु $A(0, 0)$;

(ii) **नाभि** (focus), $S(0, -a)$;

(iii) **नियता** (directrix) का समीकरण $y = a$

(iv) **अक्ष** (axis) का समीकरण $x = 0$ अर्थात् y-अक्ष है।



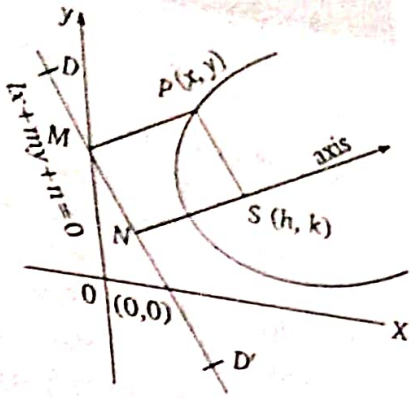
According to New Syllabus 20
Approved by UPBTE und
& AICT

परवलय का व्यापक समीकरण (General Euqation of a Parabola)

उस परवलय का समीकरण ज्ञात करना जिसकी नाभि के निर्देशांक (h, k) तथा नियता कोई सरल रेखा $lx + my + n = 0$ है।

हल : मान लिया परवलय पर गतिमान बिंदु $P(x, y)$ है तथा इसकी नाभि (h, k) है तथा नियता $lx + my + n = 0$ है।

अब $P(x, y)$ से $S(h, k)$ की दूरी = बिन्दु P से $lx + my + n = 0$ पर गए लम्ब की लम्बाई



अर्थात् $PS = PM \quad \Rightarrow \quad PS^2 = PM^2$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = \frac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2}$$

$$\Rightarrow (l^2 + m^2)[(x-h)^2 + (y-k)^2] = (lx + my + n)^2$$

$\Rightarrow (mx - ly)^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, जहाँ g, f, c अचर हैं। [सरल करने पर]

यह परवलय का अभीष्ट व्यापक समीकरण है।

स्पष्ट है कि परवलय का व्यापक समीकरण x तथा y में द्विघात है तथा द्विघात वाले पद पूर्ण वर्ग बनाते हैं।

16.5.1 किसी द्विघात समीकरण द्वारा परवलय को निरूपित करने के लिए आवश्यक प्रतिबंध :

द्विघात समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, किसी परवलय को निरूपित करेगा, यदि

(i) **द्विघात वाले पद पूर्ण वर्ग बनाते हैं**

तथा (ii) $\boldsymbol{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 \neq 0}$

16.6 परवलय का प्राचलिक या परामितीय समीकरण (Parametric Equation of a Parabola)

परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$

माना (x_1, y_1) परवलय (1) पर स्थित बिंदु है, तो $y_1^2 = 4ax_1$ ...(1)

अब $x_1 = at^2$ तथा $y_1 = 2at$ लेने पर, (2) से ...(2)

$$(2at)^2 = 4a \times at^2 \quad \text{या} \quad 4a^2t^2 = 4a^2t^2 \text{ जो सत्य है}$$

$\therefore$ $y^2 = 4ax$, t के प्रत्येक मान के लिए बिन्दु $(at^2, 2at)$ से संतुष्ट हो जाता है।

अतः $\boldsymbol{x = at^2}$ तथा $\boldsymbol{y = 2at}$

परवलय का **प्राचलिक समीकरण** है तथा $(at^2, 2at)$ प्राचलिक निर्देशांक हैं, t को **प्राचल (Parameter)** कहते हैं। संक्षेप में इस बिंदु को बिन्दु t भी कहते हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि (5, 3) और नियता $3x - 4y + 1 = 0$ है।

हल : माना S (5, 3) परवलय की नाभि तथा ZM नियता है जिसका समीकरण

$$3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{...(i)}$$

है।

माना $P(x, y)$ परवलय पर कोई बिंदु है तो $SP = PM$ [परिभाषा से]

$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} = \frac{3x-4y+1}{\sqrt{25}}$$

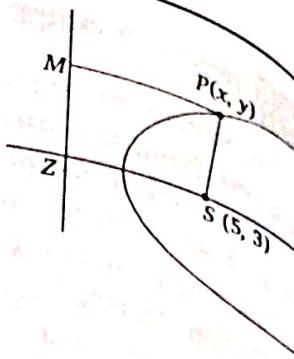
$$\Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2 = \frac{1}{25}(3x-4y+1)^2 \quad \text{(वर्ग करने पर)}$$

$$\Rightarrow 25\{x^2-10x+25+y^2-6y+9\}$$
$$= 9x^2+16y^2-24xy-8y+6x+1$$

$$\Rightarrow 25x^2-250x+625+25y^2-150y+225$$
$$= 9x^2+16y^2-24xy-8y+6x+1$$

$$\Rightarrow 16x^2+9y^2+24xy-256x-142y+849=0$$

या $(4x+3y)^2-256x-142y+849=0$ यह अभीष्ट समीकरण है।



उदाहरण 2. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें, जिसकी नाभि (3, 2) और नियता $x=-4$ है।

हल : माना $P(x, y)$ परवलय पर कोई बिंदु है तथा नाभि $S=(3, 2)$,

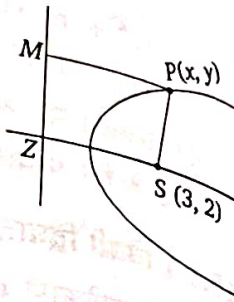
नियता का समीकरण $x=-4$ अर्थात् $x+4=0$

अतः परिभाषा से $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \frac{x+4}{\sqrt{1^2+0}}$ [∵ P से नाभि S की दूरी $=P$ से नियता की दूरी]

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=(x+4)^2 \quad \text{[दोनों तरफ वर्ग करने पर]}$$

$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+4=x^2+8x+16$$

$$\Rightarrow y^2-14x-4y-3=0$$ यह परवलय का अभीष्ट समीकरण है।



उदाहरण 3. शीर्ष (0, 0) और नाभि (0, 1) वाले परवलय का समीकरण ज्ञात करें।

हल : (i) दिया गया है परवलय का शीर्ष $A=(0, 0)$,

परवलय की नाभि $S=(0, 1)$

$\therefore$ $AS=AZ=1$ [चूँकि शीर्ष नाभि और नियता से बराबर दूरी पर होता है]

अतः नियता का समीकरण $y=-1$ या $y+1=0$

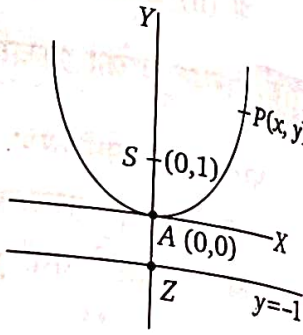
माना $P(x, y)$ परवलय पर कोई बिंदु है, तो

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} = \frac{y+1}{\sqrt{1^2}}$$

[नाभि से बिन्दु P की दूरी $=P$ से नियता की लांबिक दूरी]

$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=(y+1)^2 \Rightarrow x^2+y^2+1-2y=y^2+1+2y \Rightarrow x^2=4y$

यह परवलय का अभीष्ट समीकरण है।



उदाहरण 4. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसका शीर्ष मूल बिंदु है तथा नाभि $(0, 2a)$ है।

हल : दी गई शर्तों से, शीर्ष $A=(0, 0)$, नाभि $S=(0, 2a)$

अतः शीर्ष से नाभि की दूरी = शीर्ष से नियता की दूरी $=2a$

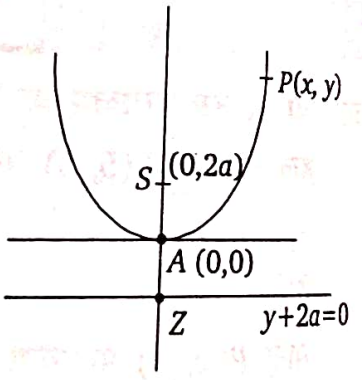
$\therefore$ नियता का समीकरण $y=-2a$ या $y+2a=0$

माना $P(x, y)$ परवलय पर कोई बिंदु है, तो परिभाषा से

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2a)^2} = \frac{y+2a}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

$\Rightarrow x^2+(y-2a)^2=(y+2a)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+4a^2-4ay=y^2+4a^2+4ay$



$x^2 = 8ay$ यह परवलय का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 5. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि $(0, 0)$ तथा नियता $3x - 4y + 2 = 0$ है। **उत्तर**

हल : माना परवलय की नाभि S तथा इस पर कोई बिंदु $P(x, y)$ है, तो $SP = PM$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \frac{3x - 4y + 2}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3x - 4y + 2}{5} \qquad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{(3x - 4y + 2)^2}{25}$$

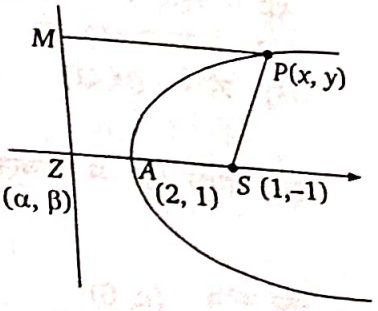
$$\Rightarrow 25(x^2 + y^2) = 9x^2 + 16y^2 + 4 - 24xy + 12x - 16y$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 9y^2 + 24xy - 12x + 16y - 4 = 0 \Rightarrow (4x + 3y)^2 - 12x + 16y - 4 = 0$$

जो परवलय का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 6. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि $(1, -1)$ तथा शीर्ष $(2, 1)$ है।

हल : माना $A(2, 1)$ दिए गए परवलय का शीर्ष, $S(1, -1)$ उसकी नाभि है तथा इसका अक्ष नियता से $Z(\alpha, \beta)$ पर मिलता है।



$\therefore$ A, SZ का मध्य-बिंदु है।

$$\therefore \frac{\alpha + 1}{2} = 2 \Rightarrow \alpha + 1 = 4 \Rightarrow \alpha = 3$$

तथा $\frac{\beta - 1}{2} = 1 \Rightarrow \beta - 1 = 2 \Rightarrow \beta = 3$

$\therefore$ Z के नियामक $(3, 3)$ हैं,

तो शीर्ष को नाभि से मिलाने वाली रेखा ZAS का समीकरण

$$y - 1 = \frac{-1 - 1}{1 - 2}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 2) \Rightarrow 2x - y + 3 = 0 \qquad \ldots(1)$$

नियता ZM जो (1) पर लंब है, का समीकरण $x + 2y + k = 0$

$\therefore$ यदि $Z(3, 3)$ से होकर जाता है, अत: $3 + 2 \times 3 + k = 0 \Rightarrow K = -9$

$\therefore$ नियता का समीकरण $x + 2y - 9 = 0$

माना $P(x, y)$ परवलय पर कोई बिंदु है। यदि P से (1) पर PM लम्ब हो, तो परिभाषा से

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \frac{x + 2y - 9}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 9) \qquad [\because PS = PM]$$

या $5[x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 + 2y] = x^2 + 4y^2 + 81 + 4xy - 18x - 36y$ [दोनों तरफ वर्ग करने पर]

या $5x^2 + 5 - 10x + 5y^2 + 5 + 10y = x^2 + 4y^2 + 81 + 4xy - 18x - 36y$

या $4x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 46y - 71 = 0$

जो अभीष्ट परवलय का समीकरण है।

उदाहरण 7. $y^2 = 36x$ का वह बिंदु ज्ञात करें जिसकी कोटि (ordinates) उसके भुज (abscissa) की तीन गुनी है।

हल : परवलय का समीकरण $y^2 = 36x$ ...(1)

माना भुज $= \alpha$, तो कोटि $= 3\alpha$ अत: अभीष्ट बिंदु के नियामक $(\alpha, 3\alpha)$ होंगे।

यह बिंदु परवलय पर स्थित है। अत: इसके नियामक (1) को संतुष्ट करेंगे

$\therefore$ $(3\alpha)^2 = 36\alpha \Rightarrow 9\alpha^2 = 36\alpha$

या $9\alpha(\alpha - 4) = 0$ या $\alpha(\alpha - 4) = 0$

अत: $\alpha = 0$ या $\alpha = 4$

अत: यदि $\alpha = 0$ तो बिंदु $= (0, 0)$ तथा यदि $\alpha = 4$ तो बिंदु $= (4, 12)$ **उत्तर**

उदाहरण 8. उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करें जो परवलय $y^2 = 8x$ पर स्थित हैं तथा जिनकी नाभीय दूरी 4 है।

हल : $y^2 = 8x = 4 \times 2x \quad \therefore \quad a = 2$ [$y^2 = 4x$ से तुलना से]

माना परवलय पर कोई बिंदु $P(x, y)$ है

$\therefore$ इसकी नाभि S से दूरी $SP = a + x = 2 + x = 4$

या $x = 4 - 2 = 2$ [प्रश्न से]

$y^2 = 8x$ में x का मान रखने पर $y^2 = 8 \times 2$ या $y = \pm 4$

$\therefore$ अभीष्ट बिंदु के निर्देशांक $= (2, \pm 4)$

उदाहरण 9. परवलय $y^2 - 4y - 3x + 1 = 0$ का शीर्ष, नाभि, अक्ष, नियता तथा नाभिलम्ब प्राप्त करें।

हल : परवलय का समीकरण : $y^2 - 4y - 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad y^2 - 4y + 4 - 4 - 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-2)^2 = 3x + 3 = 3(x+1)$

$X = x + 1$ तथा $Y = y - 2$ लेने पर, $Y^2 = 3X = \dfrac{4 \times 3}{4} X$

यह परवलय $Y^2 = 4aX$ रूप का समीकरण है।

अत: परवलय (1) का ...(1)

(i) शीर्ष = (0, 0) अर्थात् $X = 0, \; Y = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0; \; y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1; \; y = 2$

$\therefore$ शीर्ष $(-1, 2)$

(ii) नाभि (1) से परवलय का समीकरण $Y^2 = 3X = 4 \times \dfrac{3}{4} X \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{3}{4}$

[मानक समीकरण $Y^2 = 4aX$ से तुलना करने पर]

अब नाभि : $(a, 0)$ अर्थात् $X = a \quad Y = 0$

$\Rightarrow \quad x + 1 = \dfrac{3}{4}$ तथा $y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{4} - 1 = -\dfrac{1}{4}$ तथा $y = 2$

$\therefore \quad$ नाभि $= \left(-\dfrac{1}{4}, 2\right)$

(iii) नियता $X = -a$ अर्थात् $x + 1 = -\dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{3}{4} - 1 = -\dfrac{7}{4}$

$\therefore \quad$ नियता का समीकरण $x + \dfrac{7}{4} = 0$ या $4x + 7 = 0$

(iv) अक्ष का समीकरण $Y = 0$ अर्थात् $y - 2 = 0$

(v) नाभिलंब का समीकरण $X = a$ $\Rightarrow \quad x + 1 = \dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x + 1 = 0$ उत्तर

(vi) नाभिलंब की लंबाई $X = 4a = 4 \times \dfrac{3}{4} = 3$

हरण 10. परवलय $x^2 = 4ay$ के शीर्ष को नाभिलम्ब जीवा के सिरों से मिलाने वाली रेखाओं के समीकरण बतायें।

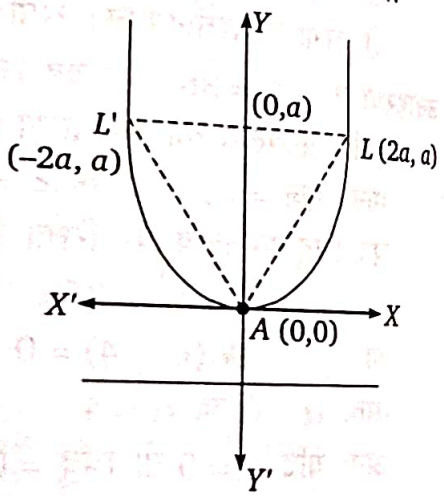
हल : दिया गया परवलय $x^2 = 4ay$ ...(1)

माना A दिये गए परवलय (1) का शीर्ष तथा LL' नाभिलम्ब है, तो शीर्ष

क नियामक $= (0, 0)$

नाभिलम्ब के सिरे L के नियामक $= (2a, a)$

तथा L' के नियामक $= (-2a, a)$



$\therefore \quad$ रेखा AL का समीकरण : $y - 0 = \dfrac{a - 0}{2a - 0}(x - 0)$

[सूत्र $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$]

$\therefore \quad x = 2y$

रेखा AL' का समीकरण : $y = \frac{1}{2}x$ ...(2)

$y - 0 = \frac{a - 0}{-2a - 0}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \quad \therefore \quad x + 2y = 0$ ...(3)

(2) तथा (3) अभीष्ट समीकरण हैं।

11. यदि परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभीय जीवा के सिरे के निर्देशांक $(at_1^2, 2at_1)$ हों तो दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात करो।

हल : माना परवलय $y^2 = 4ax$ का शीर्ष $A\ (0, 0)$ है। ...(1)

माना PQ परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभीय जीवा है।

प्रश्न से, P के नियामक $= (at_1^2, 2at_1)$

तथा माना Q के नियामक $= (at_2^2, 2at_2)$

अत: नाभीय जीवा PQ का समीकरण

$$y - 2at_1 = \frac{2at_2 - 2at_1}{at_2^2 - at_1^2}(x - at_1^2)$$

$$y - 2at_1 = \frac{2a(t_2 - t_1)}{a(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}(x - a_1t_1^2)$$

या

$$y - 2at_1 = \frac{2}{t_2 + t_1}(x - at_1^2)$$ ...(2)

या

किंतु रेखा (2) नाभि $S(a, 0)$ से गुजरती है अत: $0 - 2at_1 = \frac{2}{t_2 + t_1}(a - at_1^2)$

$$-t_1(t_2 + t_1) = 1 - t_1^2 \quad \Rightarrow \quad -t_1t_2 - t_1^2 = 1 - t_1^2$$

$$\Rightarrow \quad t_1t_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad t_2 = -\frac{1}{t_1}$$

$\Rightarrow$

$\therefore$ नाभीय जीवा PQ के दूसरे सिरे Q के नियामक $\left(\frac{a}{t_1^2}, -\frac{2a}{t_1}\right)$ हैं।

नोट :

1. यदि नाभीय जीवा के एक सिरे के नियामक $(at^2, 2at)$ दिये हों, तो दूसरे सिरे के नियामक ज्ञात करने के लिए t के स्थान पर $\left(-\frac{1}{t}\right)$ रखें। अत: दूसरे सिरे के नियामक $\left(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t}\right)$ होंगे।

उदाहरण 12. परवलय $y^2 = 4ax$ के द्विकोटि (Double ordinate) की लम्बाई $8a$ है। सिद्ध करो कि परवलय के शीर्ष से द्विकोटि के दोनों सिरों तक खींची गई रेखायें समकोण पर हैं।

हल : माना परवलय की द्विकोटि PQ है, तो $\quad \therefore \quad PQ = 8a$

माना P तथा Q के x-नियामक h हैं, तो

P के नियामक $= (h, 4a)$ तथा Q के नियामक $= (h, -4a)$

अब $(h, 4a)$ परवलय $y^2 = 4ax$ पर है

अत: $(4a)^2 = 4ah$ या $h = 4a$

$\therefore$ P के नियामक $= (4a, 4a)$ तथा Q के नियामक $= (4a, -4a)$

$\therefore$ अब AP की प्रवणता $m_1 = \frac{4a - 0}{4a - 0} = \frac{4a}{4a} = 1$

तथा AQ की प्रवणता $m_2 = \frac{-4a-0}{4a-0} = -\frac{4a}{4a} = -1$ [सूत्र $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$]

$\therefore \quad m_1 \times m_2 = 1 \times (-1) = -1$

अर्थात् AP तथा AQ परस्पर समकोण पर हैं। $\therefore \quad AP \perp AQ$

उदाहरण 13. दिखायें $(y-k)^2 = 4a(x-b)$ परवलय को निरूपित करता है। शीर्ष के निर्देशांक तथा नियता का समीकरण बतायें।

हल : दिया गया समीकरण $(y-k)^2 = 4a(x-b)$ इति सिद्धम्

$\Rightarrow \quad y^2 - 2yk + k^2 = 4ax - 4ab$

$\Rightarrow \quad y^2 - 2yk - 4ax + k^2 + 4ab = 0$ ...(1)

अब (1) से स्पष्ट है कि समीकरण y में द्विघातीय तथा x में एकघातीय है तथा y वाले पद पूर्ण वर्ग बनाते हैं

समीकरण (2) की तुलना समीकरण ...(2)

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से करने पर

$a = 0, \quad b = 1, \quad c = k^2 + 4ab, \quad h = 0, \quad f = -k, \quad g = -2a$

$\therefore \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 0 \times 1 \times (k^2 + 4ab) + 2(-k)(-2a) \times 0 - 0 \times (-k)^2 - 1 \times (-2a)^2 - (k^2 + 4ab) \times 0$

$= -4a^2 \neq 0$

अत: समीकरण (1) परवलय के लिए आवश्यक प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

अत: (1) एक परवलय है।

पुनः समीकरण (1) में $y - k = Y$ तथा $x - b = X$ रखने पर, $Y^2 = 4aX$

जो $y^2 = 4ax$ रूप का है। अत: (3) में ...(3)

अब (i) **शीर्ष** $= (0, 0)$ अर्थात् $X = 0, Y = 0$ या $x - b = 0$, तथा $y - k = 0$

या $x = b$ तथा $y = k$

$\therefore \quad$ परवलय का शीर्ष (b, k)

(ii) **नियता का समीकरण** $X = -a$ अर्थात् $x - b = -a$ या $x = b - a$

$\therefore \quad$ परवलय की नियता $x = b - a$ उत्तर

उदाहरण 14. दिखाइये कि $y^2 = 4ax$ के अन्तर्गत त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{8a}(y_1 \sim y_2)(y_2 \sim y_3)(y_3 \sim y_1)$ है, जहाँ उत्तर

y_1, y_2, y_3 त्रिभुज के शीर्षों की कोटियाँ हैं।

हल : परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$

माना त्रिभुज के सिरों के भुज, कोटियों y_1, y_2, y_3 के संगत क्रमश: x_1, x_2, x_3 हैं, तो (1) से ...(1)

$$x_1 = \frac{y_1^2}{4a}, \quad x_2 = \frac{y_2^2}{4a} \quad \text{तथा} \quad x_3 = \frac{y_3^2}{4a}$$

$\therefore \quad$ त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $\left(\frac{y_1^2}{4a}, y_1\right), \left(\frac{y_2^2}{4a}, y_2\right)$ तथा $\left(\frac{y_3^2}{4a}, y_3\right)$ हैं।

$\therefore \quad$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left[\frac{y_1^2}{4a}(y_2 - y_3) + \frac{y_2^2}{4a}(y_3 - y_1) + \frac{y_3^2}{4a}(y_1 - y_2)\right]$

$\left[\because \Delta = \frac{1}{2}\Sigma x_1 (y_2 - y_3)\right]$

$= \frac{1}{8a}[y_1^2(y_2 - y_3) + y_2^2(y_3 - y_1) + y_3^2(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{8a}[y_1^2(y_2 - y_3) + y_2^2 y_3 - y_2^2 y_1 + y_3^2 y_1 - y_3^2 y_2]$$

$$= \frac{1}{8a}[y_1^2(y_2 - y_3) + y_2 y_3 (y_2 - y_3) + y_1(y_3^2 - y_2^2)]$$

$$= \frac{1}{8a}(y_2 - y_3)[y_1^2 + y_2 y_3 - y_1(y_3 + y_2)]$$

$$= \frac{1}{8a}(y_2 - y_3)[y_1^2 + y_2 y_3 - y_1 y_3 - y_1 y_2)]$$

$$= \frac{1}{8a}(y_2 - y_3)[y_1(y_1 - y_2) - y_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{8a}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_1 - y_3)$$

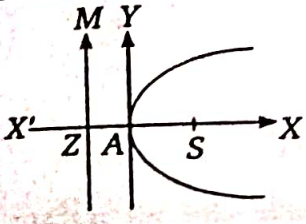
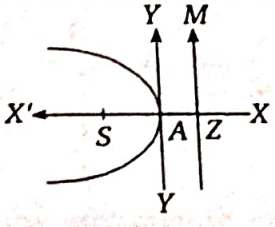
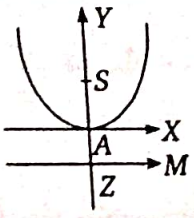
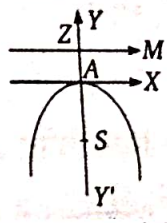
$$= -\frac{1}{8a}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{8a}(y_1 \sim y_2)(y_2 \sim y_3)(y_3 \sim y_1)$ सिद्ध हुआ।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. (a) अक्षों के परितः सममितता की दृष्टि से परवलय के समीकरण निम्न रूप के होते हैं :
(i) $y^2 = 4ax$ (ii) $y^2 = -4ax$ (iii) $x^2 = 4ay$ (iv) $x^2 = -4ay$

(b) इन रूपों से सबंधित मुख्य बातें :

रूप	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
नाभि	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
शीर्ष	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
नियता	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
अक्ष	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
नाभिलम्ब की लम्बाई तथा सिरे	$4a; (a, \pm 2a)$	$4a; (-a, \pm 2a)$	$4a; (\pm 2a, a)$	$4a; (\pm 2a, -a)$
नाभिलम्ब का समीकरण	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$
आकृति				

2. परवलय का व्यापक समीकरण : यदि परवलय की नाभि (h, k) तथा नियता का समीकरण $lx + my + n = 0$ हो, तो परवलय का व्यापक समीकरण

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = \frac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2}$$

3. व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ परवलय को निरूपित करेगा यदि $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 \neq 0$ तथा द्विघात वाले पद पूर्ण वर्ग बनाते हैं।

प्रश्नावली 16.1

1. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि $(2, -3)$ तथा नियता $x + 5 = 0$ है।
2. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें, जिसकी नाभि $(0, 4)$ तथा नियता $y + 4 = 0$ है।
3. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि $(-8, -2)$ और नियता $y = 2x - 9$ है।
4. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें, जिसकी नाभि $(3, 2)$ और नियता $x = -4$ है।
5. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसका शीर्ष $(3, 1)$ तथा नियता $x - y + 1 = 0$ है।
6. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसका शीर्ष $(-2, 0)$ तथा नाभि $(0, 0)$ है।
7. (i) शीर्ष $(0, 0)$ और नाभि $(0, 1)$ वाले परवलय का समीकरण ज्ञात करें।
   (ii) उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूल बिन्दु पर है और नियता $x = 5$ है।
8. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसका शीर्ष मूल बिंदु तथा नाभि $(0, 2a)$ है।
9. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसका शीर्ष $(1, 2)$ तथा नाभि $(3, 4)$ है। नाभिलम्ब का समीकरण भी ज्ञात करें।
10. परवलय $y^2 = 12x$ पर वह बिंदु ज्ञात करें जिसकी कोटि उसके भुज का तिगुना है।
11. उन बिंदुओं के नियामक ज्ञात करें जो परवलय $y^2 = 12x$ पर स्थित हैं और उनकी नाभीय दूरी 4 है।
12. परवलय $y^2 = 6x$ पर स्थित वह बिंदु ज्ञात करें जिसकी शीर्ष से दूरी $6\sqrt{2}$ है।
13. $x^2 + 4x + 2y - 7 = 0$ का शीर्ष, नाभि, अक्ष, नियता तथा नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।
14. $x^2 + 4x - 3y = 0$ का शीर्ष, नाभि, अक्ष तथा नाभिलम्ब जीवा ज्ञात करें।
15. परवलय $4y^2 + 12x - 12y + 39 = 0$ के शीर्ष, नाभि, अक्ष तथा नियता ज्ञात करें।
16. परवलय $(y + 3)^2 = 2(x + 2)$ का शीर्ष, नाभि, अक्ष तथा नियता ज्ञात करें।
17. सिद्ध करें $y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ एक परवलय को निरूपित करता है जिसका अक्ष x-अक्ष के समानांतर है। इस परवलय के शीर्ष के नियामक तथा अक्ष का समीकरण प्राप्त करें।

   [**संकेत :** परवलय $(y + b)^2 = -2a\left(x - \dfrac{b^2 - ac}{2a}\right)$ अब $Y = y + b$, $X = x - \dfrac{b^2 - ac}{2a}$ से $Y^2 = -2aX$]

18. यदि रेखा $x - 1 = 0$ परवलय $y^2 - kx + 8 = 0$ की नियता है, तो k का मान बतायें।

   [**संकेत :** $y^2 = k\left(x - \dfrac{8}{k}\right)$ अब $Y = y$, $k = 4A$, $X = x - \dfrac{8}{k}$ से परवलय $Y^2 = 4AX$ है, जिसकी नियता $X = -A$ होगी।

$$X = -A \Rightarrow x - \frac{8}{k} = \frac{k}{4} \Rightarrow x = \frac{8}{k} + \frac{k}{4}$$

   किन्तु नियता $x = 1$ $\quad\therefore \dfrac{8}{k} + \dfrac{k}{4} = 1$]

19. परवलय $y^2 = 16x$ के अन्तर्गत उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके शीर्ष की कोटियाँ 1, 8, 12 हैं।

उत्तरमाला

1. $y^2 - 14x + 6y - 12 = 0$
2. $x^2 = 16y$
3. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$

$y^2 - 14x - 4y - 3 = 0$

5. $(x + y)^2 - 20x + 4y + 40 = 0$

$y^2 = 8(x + 2)$

7. (i) $x^2 = 4y$ (ii) $y^2 = -20x$ **8.** $x^2 = 8ay$

$x^2 - 2xy + y^2 - 14x - 18y + 31 = 0$, नाभिलम्ब का समीकरण $x + y - 7 = 0$

11. $(1, \pm 2\sqrt{3})$ **12.** $(6, \pm 6)$

$\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

शीर्ष $= \left(-2, \frac{11}{2}\right)$, नाभि $= (-2, 5)$, अक्ष $x + 2 = 0$, नियता $y - 6 = 0$, नाभिलम्ब की लम्बाई $= 2$

शीर्ष $= \left(-2, -\frac{4}{3}\right)$, नाभि $= \left(-2, -\frac{7}{12}\right)$, अक्ष $x + 2 = 0$, नाभिलम्ब की लम्बाई $= 3$,

समीकरण $12y + 7 = 0$

शीर्ष $= \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, नाभि $= \left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{2}\right)$, अक्ष का समीकरण $y = \frac{3}{2}$, नियता का समीकरण $4x + 7 = 0$

शीर्ष $= (-2, -3)$, नाभि $= \left(-\frac{3}{2}, -3\right)$, अक्ष का समीकरण $y + 3 = 0$, नियता का समीकरण $2x + 5 = 0$

शीर्ष $= \left(\frac{b^2 - c}{2a}, -b\right)$, अक्ष $y + b = 0$

$k = 4, -8$

19. क्षेत्रफल $= \frac{77}{8}$ वर्ग इकाई।

□□□

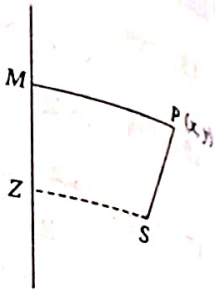
अध्याय

17

दीर्घवृत्त (Ellipse)

17.1 परिभाषा (Definition)

दीर्घवृत्त ऐसे बिंदु का बिंदुपथ है जो इस प्रकार गतिशील होता है कि गतिपथ पर उसकी एक स्थिर बिंदु जिसे **नाभि** कहते हैं, तथा एक स्थिर रेखा जिसे **नियता** कहते हैं, से दूरियों का अनुपात सर्वदा एक स्थिर राशि होती है। इस स्थिर राशि को उत्केन्द्रता कहते हैं, जो e से सूचित किया जाता है तथा इसका मान 1 से कम होता है।



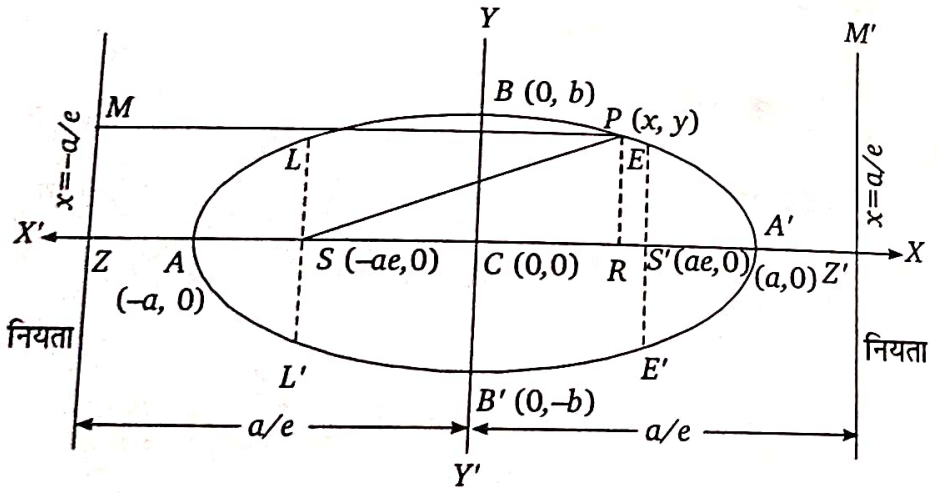
यदि कोई बिंदु P इस प्रकार गतिशील हो कि निश्चित बिंदु S (नाभि) तथा निश्चित सरल रेखा ZM (नियता) से इसकी दूरी का अनुपात

$$\frac{PS}{PM} = e \text{ तथा } e < 1$$

तो P का बिंदुपथ एक दीर्घवृत्त होगा।

17.2 दीर्घवृत्त का मानक समीकरण (Standard Equation of an Ellipse) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ जहाँ $a > b$ तथा a एवं b नियतांक हैं।

माना $P(x, y)$ गतिमान बिंदु है, S नाभि तथा ZM नियता है।



S से नियता ZM पर लम्ब डालें और दोनों ओर बढ़ा दें। अब SZ को A तथा A' पर क्रमशः अन्तः तथा ब इस प्रकार विभाजित करें कि

$$\frac{SA}{AZ} = e \quad \text{तथा} \quad \frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$$

या $$SA = e.AZ$$

तथा $$SA' = e.A'Z$$

परिभाषा से A तथा A' दीर्घवृत्त पर हैं।
और $AA' = 2a$ और C इसका मध्य-बिंदु है, तब $AC = CA' = a$

$$AA' = SA + SA' = e.AZ + e.A'Z \qquad [(1) \text{ तथा } (2) \text{ से}]$$
$$= e(AZ + A'Z) = e \quad [(CZ - CA) + (A'C + CZ)]$$
$$= e \times 2CZ \qquad [\because CA = CA']$$
$$2a = 2e.CZ \qquad [\because AA' = 2a]$$
$$CZ = \frac{a}{e} \qquad \ldots(3)$$

पुनः (2) में से (1) घटाने पर

$$e(A'Z - AZ) = SA' - SA$$
$$= (SC + CA') - (CA - SC) = SC + CA' - CA + SC$$
$$= 2SC \qquad [\because CA = CA']$$
$$e(AA') = 2SC \Rightarrow e \times 2a = 2SC \Rightarrow SC = ae \qquad \ldots(4)$$

$\Rightarrow$ C को मूल बिंदु, CX को x-अक्ष तथा C पर लम्ब रेखा CY को y-अक्ष लेने पर
C के नियामक $= (0, 0)$ तथा नाभि S के नियामक $= (-ae, 0)$ [समी० (3) तथा (4) से]
तथा नियता का समीकरण $\boldsymbol{x = -\frac{a}{e}}$ या $\boldsymbol{x + \frac{a}{e} = 0}$

[$\because$ यह y-अक्ष के समानांतर है तथा C से $\frac{a}{e}$ दूरी पर है]

बिंदु $P(x, y)$ से नियता पर लम्ब $PM \perp ZM$ डाला तथा $PR \perp CA'$ तथा PS को मिलाया।
परिभाषा से, $PS = e.PM \Rightarrow PS^2 = e^2 PM^2$

$$\Rightarrow [\{x - (-ae)\}^2 + (y - 0)^2] = e^2 \times (RZ)^2 = e^2(CZ + CR)^2 \qquad [\because PM = RZ]$$

$$\Rightarrow [(x + ae)^2 + y^2] = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2 \qquad \left[\because CZ = \frac{a}{e}\right]$$

$$\Rightarrow x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2 = \frac{e^2}{e^2}(a + ex)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 + e^2x^2 + 2aex$$

$$\Rightarrow x^2 - e^2x^2 + y^2 = a^2 - a^2e^2 \Rightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(1 - e^2)}{a^2(1 - e^2)} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \text{ जहाँ } \boldsymbol{b^2 = a^2(1 - e^2)},$$

यह दीर्घवृत्त का मानक समीकरण है।

नोट :

- (i) $b^2 = a^2(1 - e^2)$ अतः $\boldsymbol{b < a}$
  अतः उपरोक्त समीकरण के लिए $0 < b < a$ होगा।
- (ii) दीर्घवृत्त का समीकरण x तथा y में समघात है। अतः यह दोनों अक्षों के प्रति सममित होगा। अतः दीर्घवृत्त की दो नाभियाँ S तथा S' एवं दो नाभिलम्ब LSL' तथा ESE' होंगे।
- (iii) इसका दीर्घाक्ष x-अक्ष पर होता है, अतः इसे क्षैतिज दीर्घवृत्त (Horizontal Ellipse) भी कहते हैं। क्षैतिज दीर्घवृत्त में x^2 के गुणांक का हर $\boldsymbol{a^2} > y^2$ के गुणांक का हर $\boldsymbol{b^2}$।

17.3 (क्षैतिज) दीर्घवृत्त संबंधी महत्त्वपूर्ण तथ्य (Important Facts related to a Horizontal Ellipse)

1. केन्द्र (Centre) : नाभियों S तथा S' को मिलाने वाली सरल रेखा का मध्य बिन्दु C दीर्घवृत्त का केन्द्र है (चित्र धारा 17.2) तथा इसके नियामक (0, 0) हैं। C से जाने वाली सभी जीवाएँ C पर समद्विभजित होती हैं।

2. अक्ष (Axes) : दीर्घाक्ष : यह वह सरल रेखा है जो दीर्घवृत्त की नाभियों से गुजरता है तथा इसके शीर्ष दीर्घवृत्त पर होते हैं। **लघुअक्ष :** यह वह सरल रेखा है, जो केन्द्र से होकर जाती है, जो दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष पर लंब होती है एवं इसके शीर्ष बिन्दु दीर्घवृत्त पर होते हैं।

चित्र (धारा 17.2) में रेखायें AA' तथा BB' क्रमश: दीर्घाक्ष एवं लघु अक्ष कहे जाते हैं तथा दोनों को संयुक्त रूप में मुख्य **अक्ष** कहलाते हैं।

(1) चित्र में AA' = दीर्घ अक्ष $= 2a$; अर्द्ध-दीर्घ अक्ष $= a$; BB' = लघु अक्ष $= 2b$; अर्द्ध-लघु अक्ष $= b$

(2) $b^2 = a^2(1 - e^2)$ तथा $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$

3. शीर्ष (Vertex) : दीर्घाक्ष AA' (चित्र धारा 17.2) के बिन्दु A तथा A' दीर्घवृत्त के शीर्ष कहलाते हैं। तथा शीर्ष A' के निर्देशांक : $(a, 0)$; A के निर्देशांक : $(-a, 0)$; तथा B के निर्देशांक : $(0, b)$; B' के निर्देशांक : $(0, -b)$, जहाँ BB' दीर्घवृत्त का लघु अक्ष है।

3. नाभियाँ (Foci) : S तथा S' (चित्र धारा 17.2) दीर्घवृत्त की नाभियाँ हैं तो S के नियामक : $(-ae, 0)$; S' के नियामक : $(ae, 0)$ तथा $CS = CS'$ तथा SS' = नाभियों के बीच की दूरी $= 2ae$

4. नियताएँ (Directrices) : ZM तथा $Z'M'$ (चित्र धारा 17.2) दीर्घवृत्त की नियतायें हैं तथा

(a) नियता ZM का समीकरण $x = -\frac{a}{e}$ तथा नियता $Z'M'$ का समीकरण $x = \frac{a}{e}$

(b) $CZ = CZ' = \frac{a}{e}$ अत: नियताओं के बीच की दूरी $ZZ' = CZ + CZ' = \frac{a}{e} + \frac{a}{e} = \frac{2a}{e}$

5. नाभिलम्ब (Latus Rectum) : LSL तथा ESE' नाभिलम्ब हैं। (चित्र धारा 17.2)

(i) नाभिलम्ब की लम्बाई : माना $LSL' = 2l$ तब $SL = SL' = l$

$\therefore$ L के निर्देशांक : $(-ae, l)$; L बिंदु दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित है।

$$\therefore \quad \frac{(-ae)^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1 \Rightarrow l^2 = b^2(1 - e^2)$$

$$\Rightarrow \quad l^2 = b^2 \times \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow l = \pm\frac{b^2}{a} \qquad [\because b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow 1 - e^2 = \tfrac{b^2}{a^2}]$$

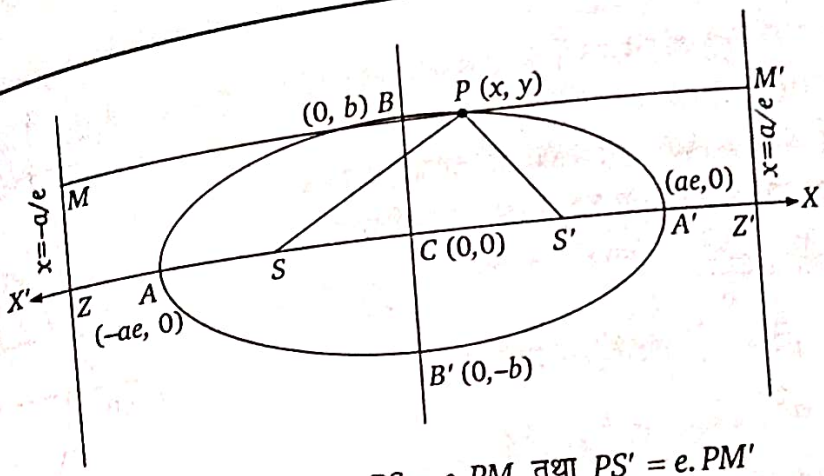
$\therefore$ नाभिलम्ब की लम्बाई $= LL' = EE' = 2l = \mathbf{\frac{2b^2}{a}}$

तथा यह भी स्पष्ट है कि नाभिलंब LSL' के सिरों L तथा L' के निर्देशांक क्रमश: $\left(-ae, \frac{b^2}{a}\right)$ तथा $\left(-ae, \frac{-b^2}{a}\right)$ होंगे।

इसी तरह नाभिलंब ESE' के सिरों E तथा E' के निर्देशांक क्रमश: $\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$ तथा $\left(ae, -\frac{b^2}{a}\right)$ हैं।

(ii) नाभिलंब का समीकरण : नाभिलम्ब y-अक्ष के समानांतर है तथा मूल बिंदु C से ae दूरी पर है। अत: **नाभिलम्ब LSL' का समीकरण $x = -ae$ तथा ESE' का समीकरण $x = ae$**

6. नाभीय दूरियाँ (focal distances) : चित्र में PS तथा PS' बिंदु P की नाभि S तथा S' से नाभीय दूरियाँ कहलाती हैं। दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिंदु की नाभीय दूरियों का योग अचर (constant) होता है तथा इसका मान दीर्घाक्ष की लंबाई के बराबर होता है।



चित्र से, $\frac{PS}{PM} = e$ तथा $\frac{PS'}{PM'} = e$ $\Rightarrow$ $PS = e.PM$ तथा $PS' = e.PM'$

$\therefore$ $PS + P'S' = e(PM + PM') = e \times MM' = e \times ZZ' = e \times 2 \times \frac{a}{e} = 2a$ $\left[\because ZZ' = \frac{2a}{e}\right]$

= दीर्घाक्ष की लम्बाई = अचर राशि

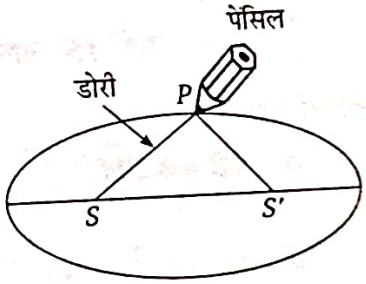
नोट :

- दीर्घवृत्त की परिभाषा इस गुण के आधार पर निम्न रूप में दी जा सकती है :
दीर्घवृत्त उस बिंदु का बिंदुपथ है जो इस प्रकार गतिशील होता है जो किन्हीं दो स्थिर बिंदुओं (नाभि) से इसकी दूरियों का योग सदैव अचर होता है।

17.4 दीर्घवृत्त की यांत्रिक रचना (Construction of an Ellipse)

दीर्घवृत्त की उपरोक्त परिभाषा के आधार पर दीर्घवृत्त की यांत्रिक रचना निम्न रूप में की जा सकती है :

जमीन पर दो स्थिर बिंदुओं S तथा S' का चुनाव करें एवं उन पर कील लगा दें तथा इन दोनों के बीच की दूरी से बड़ी डोरी लेकर इन कीलों में बाँधें। एक पेंसिल P को चित्रानुसार धागे में डालकर धागे की तनी हुई अवस्था में एक पूर्ण चक्कर घुमायें। इससे एक दीर्घवृत्त बनेगा। डोरी की लम्बाई दीर्घ अक्ष की लंबाई के बराबर होगी तथा S तथा S' नाभियाँ होंगी।



17.5 दीर्घवृत्त का दूसरा रूप (Another Form of the Ellipse)

17.5.1 ऊर्ध्वाधर दीर्घवृत्त (Vertical Ellipse)

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ में $a^2 > b^2$ अर्थात् x^2 के गुणांक का हर y^2 के गुणांक के हर से बड़ा है किंतु यदि x^2 के गुणांक का हर y^2 के गुणांक के हर से छोटा हो, तो दीर्घवृत्त का **मुख्य अक्ष y-अक्ष के अनुदिश** होता है तथा यह दिए गए चित्र के रूप का होता है, यह दीर्घवृत्त ऊर्ध्वाधर दीर्घवृत्त कहलाता है। इसका **मानक समीकरण** $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, जहाँ $0 < b < a$ से दिया जा सकता है।

17.5.2 ऊर्ध्वाधर दीर्घवृत्त से संबंधित महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. दीर्घवृत्त का मानक [illegible] $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, जहाँ $0 < b < a$

2. केन्द्र $C(0, 0$[illegible]

3. इसके शीर्ष $A(0, -a)$ तथा $A'(0, a)$ हैं

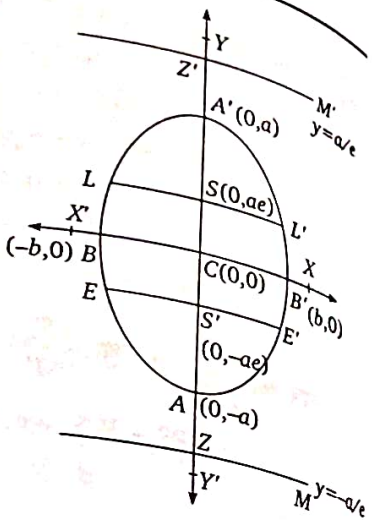
4. नाभि के निर्देशांक $(0, \pm ae)$ हैं

5. दीर्घाक्ष की लम्बाई $= 2a = AA'$; लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = BB'$

6. दीर्घ अक्ष का समीकरण $x = 0$ तथा लघु अक्ष का समीकरण $y = 0$

7. नाभिलम्ब की लम्बाई $= \dfrac{2b^2}{a}$

8. उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$



9. नियता : $y = \pm \dfrac{a}{e}$

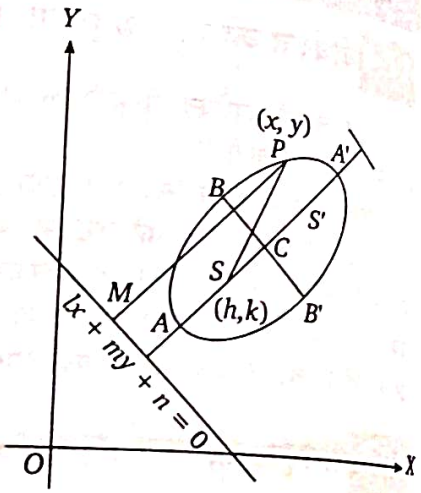
उदाहरण : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, यहाँ ($x^2$ के गुणांक का हर 4) < (y^2 के गुणांक का हर 36)

यह $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ के रूप का है, जहाँ $a^2 > b^2$

17.6 दीर्घवृत्त की नाभि (h, k) तथा नियता $lx + my + n = 0$ हो, तो दीर्घवृत्त का समीकरण

माना $P(x, y)$ दीर्घवृत्त पर कोई बिंदु है। उसकी नाभि $S(h, k)$ है तथा नियता $lx + my + n = 0$ है, तो परिभाषा से

$\dfrac{PS}{PM} = e$, जहाँ PS नाभीय दूरी, PM बिन्दु P की नियता से लांबिक दूरी है।



$\Rightarrow \quad PS = e.PM \qquad \Rightarrow \qquad PS^2 = e^2 PM^2$

$$\Rightarrow \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = e^2 \left(\frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}} \right)^2$$

$$\left[\because PM = \frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}} \right]$$

$$\Rightarrow \quad (l^2 + m^2)\{(x-h)^2 + (y-k)^2\} = e^2 (lx + my + n)^2$$

यह दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

17.6.1 दीर्घवृत्त के सापेक्ष किसी बिन्दु की स्थिति :

कोई बिन्दु (x_1, y_1) दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(a) दीर्घवृत्त के बाहर स्थित होगा, यदि $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} > 1$

(b) दीर्घवृत्त के भीतर स्थित होगा, यदि $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} < 1$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

1. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$ की नाभियों के निर्देशांक, नाभिलम्ब और उत्केन्द्रता ज्ञात करें।

: दीर्घवृत्त का दिया गया समीकरण $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$ अत: $a^2=64, \quad b^2=28$

[मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ से तुलना करने पर]

$\therefore \quad b^2=a^2(1-e^2)$

$a^2>b^2 \Rightarrow a>b$

$28=64(1-e^2)$ या $64e^2=64-28$ या $64e^2=36$ या $e^2=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$

$e=\frac{3}{4}$ अत: उत्केन्द्रता $e=\frac{3}{4}$ उत्तर

नाभिलम्ब $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 28}{8}=7$ उत्तर

नाभियों के निर्देशांक $=(\pm ae, 0)=\left(\pm 8\times\frac{3}{4}, 0\right) \quad [a^2=64 \Rightarrow a=8,\ e=3/4]$

$=(\pm 6, 0)$ उत्तर

2. सिद्ध कीजिए कि समीकरण $x^2+4y^2+10x-16y+5=0$ दीर्घवृत्त निरूपित करता है। इसके नाभियों के शांक ज्ञात करें।

: दिया गया समीकरण $x^2+4y^2+10x-16y+5=0$

$x^2+10x+4y^2-16y=-5$

$x^2+10x+25+4y^2-16y+16=-5+25+16$

$(x+5)^2+4(y^2-4y+4)=36$ या $(x+5)^2+4(y-2)^2=36$

$\frac{(x+5)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

ह दीर्घवृत्त को निरूपित करता है, $x+5=X$ तथा $y-2=Y$ रखने पर $\frac{X^2}{36}+\frac{Y^2}{9}=1$ ...(1)

$a^2=36, b^2=9$ [मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ से तुलना करने पर]

$a=6, b=3$ सूत्र $b^2=a^2(1-e^2)$ से $9=36(1-e^2)$ या $1=4(1-e^2)$

$e^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $\therefore \quad e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

नाभि के निर्देशांक $=(\pm ae, 0) \Rightarrow X=\pm ae, Y=0 \Rightarrow x+5=\pm 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $y-2=0$

$\Rightarrow x+5=\pm 3\sqrt{3}$ तथा $y=2 \quad \therefore x=3\sqrt{3}-5$ या $-3\sqrt{3}-5$ तथा $y=2$

अत: नाभियाँ $=[3\sqrt{3}-5, 2], [-3\sqrt{3}-5, 2]$ उत्तर

ण 3. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि $(-1, 1)$, नियता $x-y+3=0$ तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है। नाभिलंब की लंबाई भी ज्ञात करें।

हल : यहाँ $h=-1, k=1, e=1/2$, नियता $x-y+3=0$

अतः दीर्घवृत्त के समीकरण $(x-h)^2+(y-k)=e^2\ \dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ से

$$(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}\frac{(x-y+3)^2}{(1^2+1^2)}$$

या $\quad 8\{x^2+2x+1+y^2-2y+1\}=x^2+y^2+9-2xy+6x-6y$

या $\quad 8x^2+8y^2+16x-16y+16=x^2+y^2+9-2xy-6y+6x$

या $\quad 7x^2+2xy+7y^2+10x-10y+7=0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

नाभिलम्ब की लम्बाई

$\because$ नाभिलम्ब नियता (1) के समानांतर है अतः नाभिलम्ब का समीकरण $x-y+\lambda=0$ ...(3)

यह नाभि $(-1, 1)$ से होकर गुजरती है

अतः $(-1)-1+\lambda=0 \quad$ या $\quad \lambda=2$

$\therefore$ नाभिलम्ब का समीकरण $x-y+2=0 \quad$ या $\quad x=y-2$

समी० (3) तथा (4) को हल करने पर ...(4)

$$x=-\frac{3}{4},-\frac{5}{4} \text{ तथा } y=\frac{5}{4},\frac{3}{4}$$

$\therefore$ नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक $=\left(-\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$ तथा $\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$

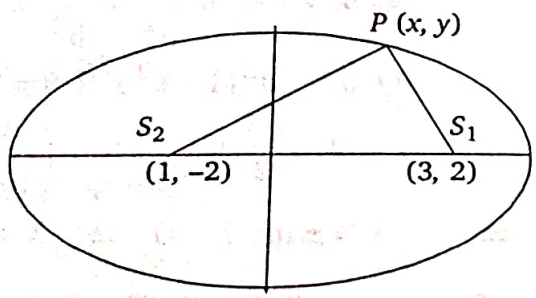
नाभिलम्ब की लम्बाई = बिंदुओं $\left(-\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$ तथा $\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$ के बीच की दूरी

$$=\sqrt{\left\{-\frac{5}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}^2+\left\{\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)^2\right\}}=\sqrt{\left(\frac{-2}{4}\right)^2+\left(\frac{-2}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ नाभिलम्ब की लम्बाई $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

उदाहरण 4. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी दो नाभियाँ (3, 2) तथा (1, – 2) हैं एवं दीर्घाक्ष की लम्बाई 10 इकाई है।

हल : माना नाभियाँ S_1 (3, 2) तथा S_2 (1, – 2) हैं तथा दीर्घवृत्त पर $P(x, y)$ कोई बिंदु है।



अतः $PS_1+PS_2=2a=$ दीर्घाक्ष 10

या $\quad \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2}=10$

या $\quad \sqrt{x^2-2x+1+y^2+4y+4}=10-\sqrt{x^2-6x+9+y^2-4y+4}$

या $\quad \sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}=10-\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}$

$$\text{या } x^2+y^2-2x+4y+5=100+x^2+y^2-6x-4y+13-2\times 10\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}$$

(वर्ग करने पर)

$$\text{या } 4x+8y-108=-20\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}$$

$$\text{या } x+2y-27=-5\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}$$

[पुन: वर्ग करने पर]

$$\text{या } (x+2y-27)^2=25(x^2+y^2-6x-4y+13)$$

$$\text{या } x^2+4y^2+729+4xy-54x-108y=25x^2+25y^2-150x-100y+325$$

$$\text{या } 24x^2+21y^2-96x+8y-404=0$$

यह दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 5. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियाँ (± 2, 0) और जिसका अर्द्ध-लघु अक्ष 2 लम्बाई का है। इस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता भी ज्ञात करें।

हल : माना दिए गए दीर्घवृत्त का अर्द्ध-दीर्घ अक्ष $= a$; अर्द्ध-लघु अक्ष $= b = 2$

उत्केन्द्रता $= e$, नाभि $(\pm ae, 0) = (\pm 2, 0)$

$$ae = 2 \quad \text{या} \quad e = \frac{2}{a} \qquad \ldots(1)$$

$\therefore$

अत:
$$4 = a^2\left\{1-\left(\frac{2}{a}\right)^2\right\} \qquad [(1) \text{ से}] \qquad [\because\ b^2 = a^2(1-e^2) \text{ से}]$$

$$\text{या } 4 = \frac{a^2\{a^2-4\}}{a^2} = a^2-4 \quad \text{या} \quad a^2 = 8$$

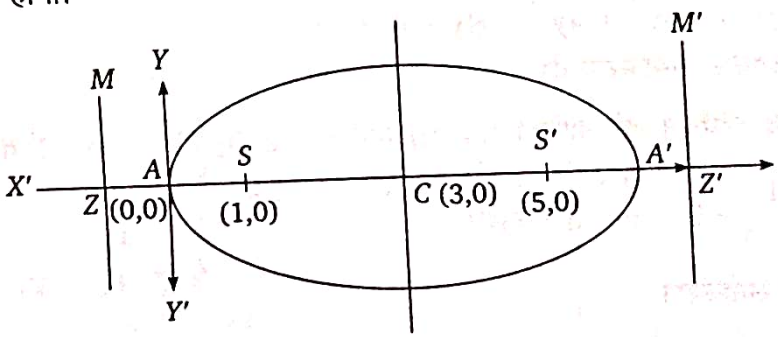
$\therefore$ दीर्घवृत्त का समीकरण $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $\qquad [\because a^2=8, b^2=4]$

पुन: (1) से, उत्केन्द्रता $e = \dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad [\because\ a=\sqrt{8}]$

उत्तर

उदाहरण 6. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियाँ (1, 0) और (5, 0) हैं और शीर्ष मूल बिंदु पर है।

हल : माना $S(1, 0)$ तथा $S'(5, 0)$ दिए गए परवलय की नाभियाँ हैं तथा $A(0, 0)$ शीर्ष है। यदि C इसका केन्द्र हो तो C, SS' का मध्य-बिन्दु होगा।



$\therefore$ C के निर्देशांक $\left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right)$ अर्थात् (3, 0) होंगे।

पुनः यदि दीर्घाक्ष की लम्बाई $2a$ हो तो $a = AC = 3$ $[\because$ शीर्ष मूल बिंदु है]

तथा $\qquad ae = CS = AC - AS = 3-1 = 2 \quad \therefore\ e = \dfrac{2}{a} = \dfrac{2}{3}$

नियता ZM का समीकरण x $\dfrac{-3}{2/3} = -\dfrac{9}{2}$ या $2x+9=0$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण जिसकी नाभि (1, 0) तथा नियता $2x + 9 = 0$ है :

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{(2x+9)^2}{2^2+0^2}$$

या $\quad x^2 + y^2 - 2x + 1 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{4}(4x^2 + 36x + 81)$

या $\quad 9(x^2 + y^2 - 2x + 1) = 4x^2 + 36x + 81$

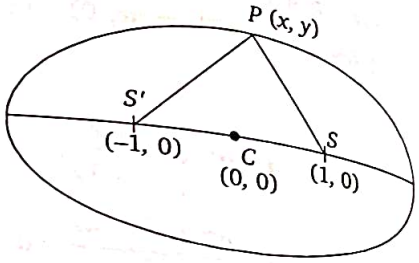
या $\quad 9x^2 + 9y^2 - 18x + 9 = 4x^2 + 36x + 81$

या $\quad 5x^2 + 9y^2 - 54x - 72 = 0$

उदाहरण 7. उस दीर्घवृत्त का समीकरण प्राप्त करें जिसका केन्द्र मूल बिंदु है, नाभियाँ (1, 0) तथा (– 1, 0) हैं एवं उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है।

उत्तर

हल : यहाँ $S(1, 0)$, $S'(-1,0)$, उत्केन्द्रता $e = \frac{1}{2}$



तो नाभीय दूरी $= SS' = 2ae$, जहाँ दीर्घाक्ष $= 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = 2a \times \frac{1}{2} = a \quad [\because SS' = 2ae]$

$\Rightarrow a = 2$

पुनः $SP + S'P = 2a = 2 \times 2 = 4$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = 4$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 16 + (x+1)^2 + y^2 - 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ (वर्ग करने पर)

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2x + 1 - 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\Rightarrow -4x - 16 = -8\sqrt{(x^2 + 2x + 1) + y^2} \quad \Rightarrow x + 4 = 2\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1)}$

$\Rightarrow (x+4)^2 = 4(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ (वर्ग करने पर)

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 4x^2 + 4y^2 + 8x + 4 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$

यह दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उत्तर

दूसरी विधि : यदि दीर्घवृत्त की नाभियों $(ae, 0)$ तथा $(-ae, 0)$ हो तो $ae = 1$ तथा $e = \frac{1}{2}$

∴ $\quad a = \frac{1}{e} = \frac{1}{1/2} = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$$

उदाहरण 8. उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात करें जिसका नाभिलम्ब लघु अक्ष का आधा है।

हल : दिया गया है नाभिलम्ब $= \frac{1}{2} \times$ लघु अक्ष $\Rightarrow \frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2} \times 2b \quad [\because$ लघु अक्ष $= 2b$, दीर्घाक्ष $= 2a]$

$\Rightarrow \quad b = \frac{a}{2}$

अब $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{a^2/4}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

उदाहरण 9. यदि दीर्घवृत्त के अक्ष नियामक अक्षों के अनुदिश हैं और केन्द्र मूल बिंदु है, तो दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए :

(i) यदि दीर्घाक्ष $= 8$ तथा $e = \frac{1}{2}$ (ii) यदि नाभिलम्ब $= 8$, $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

हल : माना दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तो

(1) दिया गया है दीर्घाक्ष $2a = 8$ या $a = 4$ तथा $e = 1/2$

$\therefore \quad b^2 = a^2(1-e^2) = 16\left(1-\frac{1}{4}\right) = 16 \times \frac{3}{4} = 12$

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ या $3x^2 + 4y^2 = 48$ उत्तर

$\therefore$

(ii) नाभिलम्ब $= \frac{2b^2}{a} = 8$ $\quad \therefore \quad b^2 = 4a$

उत्केन्द्रता $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \therefore$ सूत्र $b^2 = a^2(1-e^2)$ से

$$4a = a^2\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} \text{ या } 4a = a^2\left\{1-\frac{1}{2}\right\}$$

या $\quad 4 = \frac{1}{2}a \quad$ या $\quad a = 8 \quad \therefore \quad a^2 = 64 \quad$ तथा $b^2 = 4 \times a = 4 \times 8 = 32$

$\therefore$ दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1 \quad$ या $\quad x^2 + 2y^2 = 64$ उत्तर

उदाहरण 10. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र मूल बिंदु है, दीर्घाक्ष x-अक्ष है तथा जो बिंदु (4, 3) तथा (−1, 4) से गुजरता है।

हल : माना दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a^2 > b^2$ [∵ दीर्घाक्ष x-अक्ष पर है] ...(i)

बिंदु (4, 3) दीर्घवृत (1) पर है

$\therefore \quad \frac{4^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$ ...(ii)

पुनः बिंदु (−1, 4) दीर्घवृत्त (1) पर है

$\therefore \quad \frac{(-1)^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$ ...(iii)

समी० (ii) तथा (iii) को हल करने पर $\alpha = \frac{7}{247} = \frac{1}{a^2}, \beta = \frac{15}{247} = \frac{1}{b^2}$

[हल करने के लिए $\frac{1}{a^2} = \alpha$ तथा $\frac{1}{b^2} = \beta$ लें जिससे $16\alpha + 9\beta = 1$ तथा $\alpha + 16\beta = 1$]

समी० (i) $\frac{7}{247}x^2 + \frac{15}{247}y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 7x^2 + 15y^2 = 247$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 11. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसके शीर्ष $(0, \pm 13)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 5)$ हैं।

हल : दिए गए दीर्घवृत्त की नाभि y-अक्ष पर है। अत: यह ऊर्ध्वाधर दीर्घवृत्त है।

माना दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, जहाँ $a^2 > b^2$

दिया गया है,

शीर्ष $= (0, \pm a) = (0, \pm 13)$ $\quad \therefore \quad a = 13$ ...(1)

तथा नाभियाँ $= (0, \pm ae) = (0, \pm 5)$ $\quad \therefore \quad ae = 5$ या $13 \times e = 5$ $\quad \therefore \quad e = \frac{5}{13}$

अब $\quad b^2 = a^2(1 - e^2) = 169\left(1 - \frac{25}{169}\right) = 169 \times \left(\frac{169 - 25}{169}\right) = 169 \times \frac{144}{169}$

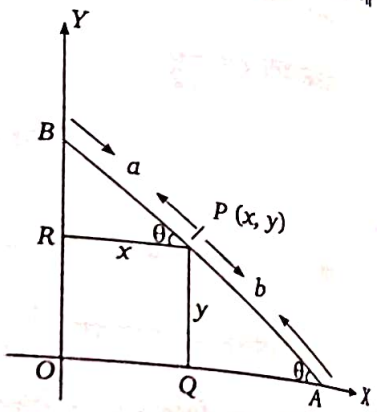
$\therefore \quad b^2 = 144$ तथा $a^2 = (13)^2 = 169$

$\therefore$ (1) से दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

उदाहरण 12. दी हुई लम्बाई की एक छड़ दो लम्बवत् रेखाओं के बीच इस प्रकार गमन करती है कि उसके सिरे लम्बवत रेखाओं पर रहते हैं। दिखाइए कि छड़ द्वारा अंकित किसी बिंदु का बिंदुपथ दीर्घवृत्त है।

हल : माना छड़ AB पर $P(x, y)$ कोई बिंदु है तथा $AP = b$, $BP = a$

P से $PQ \perp OX$ तथा $PR \perp OY$ लम्ब डाला, जहाँ OX तथा OY क्रमश: x-अक्ष तथा y-अक्ष हैं।



माना $\angle QAP = \angle RPB = \theta$

ΔAQP से $\quad \sin\theta = \frac{PQ}{AP} = \frac{y}{b}$ ...(1)

तथा ΔRPB से $\quad \cos\theta = \frac{PR}{PB} = \frac{x}{a}$ ...(2)

समी० (1) तथा (2) को वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \quad \text{या} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

जो दीर्घवृत्त का समीकरण है। अत: दिए गए छड़ पर अंकित किसी बिंदु का बिंदुपथ दीर्घवृत्त है।

उदाहरण 13. एक बिना सिरे की लूप के आकार की डोरी की सहायता से जो कि दो पिनों से होकर निकलती है, दीर्घवृत्त उल्लेखित किया गया है। यदि उसके अक्षों की लम्बाई 6 सेमी तथा 4 सेमी है, तो डोरी की आवश्यक लम्बाई तथा पिनों के बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल : माना दीर्घवृत्त की नाभियाँ S तथा S' हैं तथा दीर्घाक्ष एवं लघु अक्ष क्रमशः $2a$ तथा $2b$ हैं।

अत: $\quad 2a = 6, \quad$ या $\quad a = 3$ तथा $2b = 4$ या $b = 2$

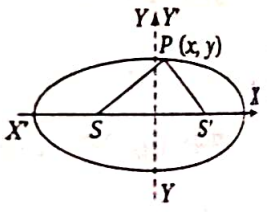
माना $P(x, y)$ दीर्घवृत्त पर कोई बिंदु है तथा e उत्केन्द्रता है, तो

डोरी की लम्बाई $= PS + PS' = 2a = 6$

पुन: $\quad b^2 = a^2(1 - e^2)$ $\quad$ या $\quad 4 = 9(1 - e^2)$

या $\quad e^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ $\quad \therefore \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

उत्तर



पिनों (नाभियों) S तथा S' के निर्देशांक क्रमश: $(ae, 0)$ तथा $(-ae, 0)$ हैं अर्थात् $(\sqrt{5}, 0)$ तथा $(-\sqrt{5}, 0)$ हैं

$\therefore \quad ae = \frac{\sqrt{5}}{3} \times 3 = \sqrt{5}$

उत्तर

∴ फिनों के बीच की दूरी $= SS' = 2ae = 2\sqrt{5}$

महत्वपूर्ण सूत्र एवं तथ्य

1. समीकरण
   (i) क्षैतिज दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a^2 > b^2$
   (ii) ऊर्ध्वाधर दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a^2 > b^2$
   (iii) यदि नाभि के नियामक (h, k) तथा नियता $lx + my + n = 0$ हो तो दीर्घवृत्त का व्यापक समीकरण
   $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = e^2 \frac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2}$$
2. दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिंदु P की नाभीय दूरियों का योग $PS + PS' = 2a$, जहाँ नाभि S तथा दीर्घाक्ष $= 2a$
3. दीर्घवृत्त के विभिन्न अंग :

मानक समीकरण (Standard Equation)	क्षैतिज दीर्घवृत्त (Horizontal Ellipse) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ 0 < b < a$	ऊर्ध्वाधर दीर्घवृत्त (Vertical Ellipse) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ 0 < b < a$
अंग		
(i) केन्द्र	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(ii) शीर्ष	$(-a, 0), (a, 0)$	$(0, -a), (0, a)$
(iii) नाभि	$(-ae, 0), (ae, 0)$	$(0, -ae), (0, ae)$
(iv) दीर्घाक्ष की लम्बाई	$2a$	$2a$
(v) लघु अक्ष की लम्बाई	$2b$	$2b$
(vi) दीर्घाक्ष का समीकरण	$y = 0$	$x = 0$
(vii) लघु अक्ष का समीकरण	$x = 0$	$y = 0$
(viii) नाभिलम्ब की लम्बाई	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
(ix) उत्केन्द्रता e	$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$	$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
(x) नियताएँ	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{a}{e}$

प्रश्नावली 17.1

1. दीर्घवृत्त $2x^2 + 3y^2 = 1$ की नाभिलम्ब जीवा, नाभियों के निर्देशांक तथा उत्केन्द्रता ज्ञात करें।
2. दीर्घवृत्त $2x^2 + 3y^2 = 6$ का नाभिलम्ब, उत्केन्द्रता और नाभियों के निर्देशांक ज्ञात करें।
3. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ के दीर्घाक्ष तथा लघु अक्ष की लम्बाई, शीर्ष के नियामक, नाभियाँ, उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात करें।

4. दिए गए दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$ के दीर्घ अक्ष तथा लघु अक्ष की लम्बाई, शीर्ष के नियामक, नाभियाँ, उत्केन्द्र
नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात करें।

5. दिए गए दीर्घवृत्त $16x^2 + y^2 = 16$ के दीर्घ अक्ष, लघु अक्ष, शीर्ष, नाभियाँ, उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब ज्ञात करें।

6. $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ का केन्द्र, नाभियाँ, उत्केन्द्रता तथा अक्षों के बीच की लम्बाई एवं अक्षो का समीकरण ज्ञात
करें।
[संकेत : $x - 1 = X$ तथा $y + 3 = Y$ लें]

7. दीर्घवृत्त $x^2 - 4x + 4y^2 + 8y - 8 = 0$ का केन्द्र, शीर्ष, उत्केन्द्रता, नाभियाँ, नाभिलम्ब की लम्बाई तथा निय
समीकरण ज्ञात करें।
[संकेत : दिया गया समीकरण $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$] [पूर्ण वर्ग बनाकर मानक रूप में लाने पर]

8. दीर्घवृत्त $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$ की उत्केन्द्रता, नाभिलम्ब तथा नाभियों के निर्देशांक ज्ञात करें।

9. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$, नाभि (3, 4) और नियता $3x + 4y = 5$ है।

10. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि (6, 7), नियता $x + y + 2 = 0$ तथा उत्केन्द्रता $1/\sqrt{3}$ है।

11. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियाँ (± 2, 3) और जिसके अर्द्ध-लघु अक्ष की लम्बाई $\sqrt{5}$ है।

12. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि (± 3, 0) और अर्द्ध-दीर्घ अक्ष 5 है।

13. (i) उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियाँ (±1, 0) तथा उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है।

(ii) उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियाँ (± 4, 0) तथा उत्केन्द्रता 1 / 3 है।

14. दिखायें यदि उत्केन्द्रता शून्य हो तो दीर्घवृत्त वृत्त बन जाता है।

15. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र मूल बिंदु है, नाभिलम्ब 5 तथा उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$ है।

16. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियों के बीच की दूरी 8 और नियताओं के बीच की दूरी 18 है।

17. उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात करें जिसका नाभिलम्ब दीर्घाक्ष का आधा है।

18. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका दीर्घाक्ष x-अक्ष पर है तथा जो बिंदु (4, 3) तथा (6, 2) से गुजरता है।

19. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र मूल बिंदु हो, दीर्घाक्ष y-अक्ष पर हो तथा जो (3, 2) तथा (1, 6) होकर गुजरता है।

20. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो बिन्दु (–1, 3) से होकर जाता है तथा जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{\sqrt{5}}$ है।

21. एक रेस कोर्स में दौड़ता हुआ धावक पाता है कि मैदान के दो ध्वज-दंडों से उसकी दूरी हमेशा 10 मीटर रहती है। यदि दो ध्वज-दंडों के बीच की दूरी 8 मीटर हो तो धावक का बिंदुपथ ज्ञात करें।
[संकेत : यदि ध्वज-दंड को नाभि माना जाए तो दीर्घवृत्त की परिभाषा से बिंदुपथ एक दीर्घवृत्त है, जहाँ $2a = 10$ त
$2ae = 8$]

22. एक बिना सिरे की लूप के आकार की डोरी की सहायता से, जो दो स्थिर पिनों से होकर निकलती है, एक दीर्घवृत्त की रच
की गई है। इसका दीर्घाक्ष तथा लघु अक्ष की लम्बाई क्रमशः 12 तथा 6 हो तो डोरी की लम्बाई तथा पिनों के बीच की दू
ज्ञात करें।

उत्तरमाला

नाभिलम्ब $= \frac{2\sqrt{2}}{3}$, नाभियाँ $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$, उत्केन्द्रता $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

नाभिलम्ब $= \frac{4}{\sqrt{3}}$, उत्केन्द्रता $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, नाभियाँ $(\pm 1, 0)$

दीर्घाक्ष = 8 इकाई, लघु अक्ष = 6 इकाई; शीर्ष $(-4, 0), (4, 0)$; नाभियाँ $(-\sqrt{7}, 0), (\sqrt{7}, 0)$; उत्केन्द्रता $\frac{\sqrt{7}}{4}$; नाभिलम्ब $= \frac{9}{2}$ इकाई

दीर्घाक्ष = 20 इकाई, लघु अक्ष = 10 इकाई; शीर्ष $(0, -10), (0, 10)$; नाभियाँ $(0, -5\sqrt{3}), (0, 5\sqrt{3})$; उत्केन्द्रता $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, नाभिलम्ब = 5 इकाई

दीर्घाक्ष = 8 इकाई, लघु अक्ष = 2 इकाई; शीर्ष $(0, -4), (0, 4)$; नाभियाँ $(0, -\sqrt{15}), (0, \sqrt{15})$; उत्केन्द्रता $= \frac{\sqrt{15}}{4}$, नाभिलम्ब $= \frac{1}{2}$ इकाई

केन्द्र = (1, −3); नाभियाँ = (5, −3), (−3, −3); उत्केन्द्रता $e = 4/5$, अक्षों के बीच की लम्बाइयाँ = 10, 6; अक्षों के समीकरण $x - 1 = 0, y + 3 = 0$

केन्द्र (2, −1);, शीर्ष (6, −1) तथा (−2, −1); नाभियाँ $(\pm 2\sqrt{3} + 2, -1)$; नाभिलम्ब जीवा = 2; नाभिलम्ब के समीकरण $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$; नियताओं के समीकरण $x = 2 \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$

8. उत्केन्द्रता $= \frac{2}{3}$, नाभिलम्ब $= \frac{10}{3}$, नाभियाँ = (0, 5), (0, 1)

9. $9x^2 - 96xy - 19y^2 - 150x - 200y + 1025 = 0$

10. $5x^2 + 5y^2 - 2xy - 76x - 88y + 506 = 0$

11. $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{5} = 1$

12. $16x^2 + 25y^2 = 400$

13. (i) $3x^2 + 4y^2 = 12$

(ii) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$

15. $20x^2 + 36y^2 = 405$ 16. $5x^2 + 9y^2 = 180$ 17. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 18. $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$

19. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$ 20. $4x^2 + 5y^2 = 49$ 21. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

22. डोरी की लम्बाई = 12, पिनों के बीच की दूरी $= 6\sqrt{3}$

□□□

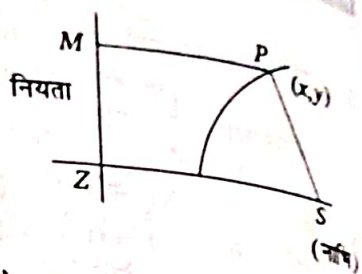
अध्याय

18

अतिपरवलय (Hyperbola)

18.1 परिभाषा (Definition)

अतिपरवलय उस बिंदु का बिंदुपथ है जिसकी एक स्थिर बिंदु जिसे नाभि कहते हैं तथा एक स्थिर सरल रेखा जिसे नियता कहते हैं, से दूरियों का अनुपात एक स्थिर राशि होती है तथा स्थिर अनुपात उसकी उत्केंद्रता कहलाती है। इसका मान 1 से अधिक होता है।



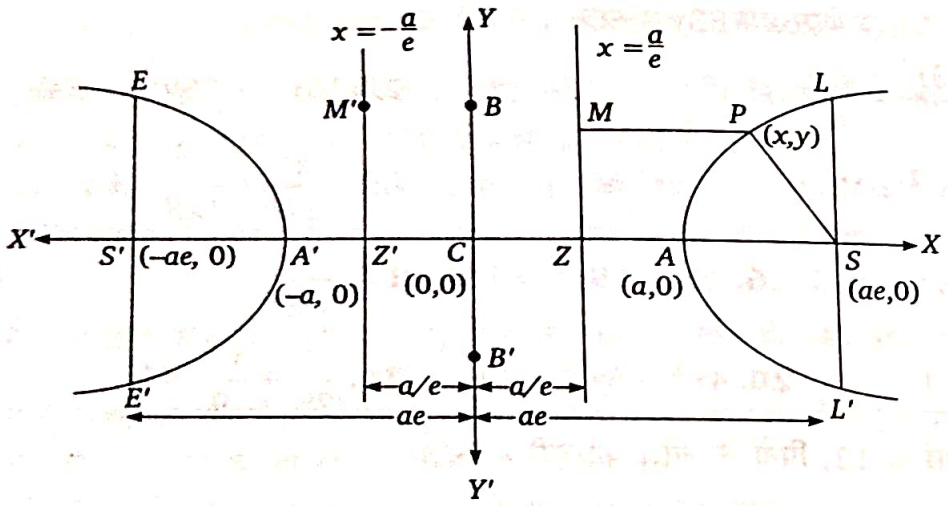
यदि P कोई गतिशील बिंदु, ZM नियता तथा S इसकी नाभि हो, तो

$$\frac{PS}{PM} = \text{अचर} = e, \quad e > 1$$

जहाँ PM, P बिंदु से नियता ZM पर लंब तथा PS बिंदु P की नाभीय दूरी है।

18.2 अतिपरवलय का मानक समीकरण (Standard Equation of a Hyperbola)

माना S अतिपरवलय की नाभि तथा ZM नियता है। माना P इस अतिपरवलय पर कोई बिंदु है। P से नियता ZM पर लंब डाला।



तो $\frac{SP}{PM} = \frac{e}{1}$ जहाँ e अतिपरवलय की उत्केन्द्रता है।

पुनः $SZ \perp ZM$ खींचा तथा SZ को अंतः तथा बाह्यतः A तथा A' पर $e:1$ में विभाजित किया, जिससे

$$\frac{SA}{AZ} = \frac{e}{1} \Rightarrow SA = e \cdot AZ \quad \ldots(
$$

$\Rightarrow \quad SA' = e.A'Z$ ...(3)

$\frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$

AA' को C बिन्दु पर समद्विभाजित किया। माना $AA' = 2a$ तो $AC = CA' = a$

AC को मूलबिंदु, CA को x-अक्ष तथा इस पर लंब रेखा CX को y-अक्ष मानने पर, C के निर्देशांक $= (0, 0)$

(2) तथा (3) को जोड़ने पर

$SA + SA' = e(AZ + A'Z) \quad \Rightarrow \quad (CS - CA) + (CS + CA') = e \times AA'$

$CS + CS - CA + CA' = e \times AA' \quad \Rightarrow \quad 2CS = e \times 2a \Rightarrow CS = ae \quad [\because \ CA = CA' = a]$

$\Rightarrow$ S के निर्देशांक $= (ae, 0)$

$\therefore$ (3) में से (2) घटाने पर $SA' - SA = e(A'Z - AZ) \Rightarrow AA' = e[(CZ + CA') - (CA - CZ)]$

$2a = e \times 2CZ \quad \Rightarrow \quad a = e.CZ \quad \therefore \ CZ = \frac{a}{e} \quad [\because \ CA = CA']$

$\Rightarrow$ अतः Z के नियामक $= \left(\frac{a}{e}, 0\right)$ $\quad \therefore$ **नियता का समीकरण** $\boldsymbol{x - \frac{a}{e} = 0}$

माना बिंदु P के नियामक (x, y) हैं, तो

अब परिभाषा से, $SP = e.PM \quad \Rightarrow \quad SP^2 = e^2 PM^2$

$$\Rightarrow (x-ae)^2 + (y-0)^2 = \frac{e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2}{1} \Rightarrow x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2\left(x^2 + \frac{a^2}{e^2} - \frac{2a}{e}x\right)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 + a^2 - 2aex$$

$$\Rightarrow x^2(e^2-1) - y^2 = a^2(e^2-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

[दोनों तरफ $a^2(e^2-1)$ से भाग देने पर]

या $\quad \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, जहाँ $\boldsymbol{b^2 = a^2(e^2-1)}$ तथा $\boldsymbol{e > 1}$

यह अतिपरवलय का मानक समीकरण है।

नोट :

- $b^2 = a^2(e^2-1) \quad \Rightarrow \quad e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$, जहाँ e उत्केन्द्रता है।

18.2.1. अतिपरवलय संबन्धी अन्य परिभाषायें (Definitions related to a Hyperbola)

(i) **केंद्र (Centre) :** अतिपरवलय के नाभियों को जोड़ने वाली सरल रेखा मध्य बिन्दु इसका केन्द्र कहलाता है। (चित्र धारा 18.2) चित्र में C केन्द्र है तथा $CS = CS'$ है।

(ii) (a) **अनुप्रस्थ अक्ष (Transverse axis) :** शीर्ष बिंदु A तथा A' को मिलाने वाली रेखा AA' अतिपरवलय का अनुप्रस्थ अक्ष कहलाती है तथा $AA' = 2a$ होता है। इसका समीकरण $y = 0$ से दिया जाता है।

(b) **संयुग्मी अक्ष (Conjugate Axis) :** केन्द्र C से होकर जाने वाली रेखा जो अनुप्रस्थ अक्ष पर लंब होती है, अतिपरवलय का संयुग्मी अक्ष कहलाती है। यह नाभियों से होकर गुजरता है। (चित्र धारा 18.2) चित्र में BB' संयुग्मी अक्ष है तथा $BB' = 2b$ । इसका समीकरण $x = 0$ से दिया जाता है।

(iii) **शीर्ष :** (चित्र धारा 18.2) वे बिन्दु जिस पर अतिपरवलय अनुप्रस्थ अक्ष को काटता है, अतिपरवलय के शीर्ष कहलाते हैं। चित्र में $A(a, 0)$ तथा $A'(-a, 0)$ अतिपरवलय के शीर्ष हैं। B तथा B' के निर्देशांक क्रमशः $(0, b)$ तथा $(0, -b)$ हैं।

(iv) **सममिति (Symmetry) :** अतिपरवलय के समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ में x तथा y की समघात हैं, अतः वक्र दोनों अक्षों के परितः सममित होता है।

(v) **अतिपरवलय की नाभियाँ (Foci of a hyperbola) :** अतिपरवलय की दो नाभियाँ $S(ae, 0)$ तथा $S'(-ae, 0)$ होते हैं। नाभियों के बीच की दूरी $SS' = 2ae$

(vi) **अतिपरवलय की नियतायें (Directrices of a hyperbola) :** स्पष्ट है दो नाभियों के संगत उसकी दो नियतायें होती हैं। चित्र में ZM तथा $Z'M'$ दो नियतायें हैं तथा इनके समीकरण क्रमशः $x = \frac{a}{e}$ तथा $x = -\frac{a}{e}$ हैं।

(vii) **अतिपरवलय के नाभिलंब (Latus rectum of a hyperbola) :** अतिपरवलय की वह जीवा जो नाभि होकर जाती है तथा अनुप्रस्थ अक्ष AA' पर लंब होती है, नाभिलंब कहलाती है। चित्र में (धारा 18.2) LSL' तथा $ES'E'$ नाभिलंब है।

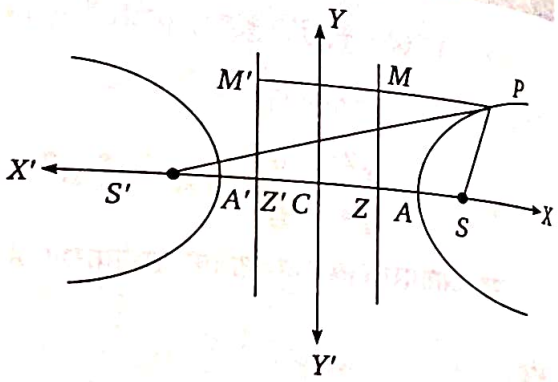
(viii) नाभिलंब LSL' का समीकरण $x = ae$ तथा नाभिलंब $ES'E'$ का समीकरण $x = -ae$

(ii) नाभिलम्ब के शीर्ष के **निर्देशांक** $\left(ae, \pm \frac{b^2}{a}\right)$ **तथा** $\left(-ae, \frac{\pm b^2}{a}\right)$

(iii) **नाभिलंब की लंबाई** $= \frac{2b^2}{a}$

18.3 अतिपरवलय का नाभीय गुण (Focal Property of a Hyperbola)

साध्य : अतिपरवलय पर स्थित किसी बिंदु से नाभियों की दूरियों का अंतर अचर होता है तथा उसका मान अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई $2a$ के बराबर होता है।



चित्र से, $\frac{PS}{PM} = e \Rightarrow PS = e.PM$ ...(1)

तथा $\frac{PS'}{PM'} = e \Rightarrow PS' = e.PM'$ ...(2)

$\therefore$ (2) में से (1) को घटाने पर

$PS' - PS = ePM' - ePM$

$= e(PM' - PM) = eMM' = eZZ'$

$= e \times \frac{2a}{e}$ [$\because$ नियताओं के बीच की दूरी $= \frac{2a}{e}$]

$= 2a =$ अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई $=$ अचर राशि

सिद्ध हुआ।

18.4 समकोणिक अतिपरवलय (Rectangular Hyperbola)

ऐसा अतिपरवलय जिसके दोनों अक्षों की लंबाइयाँ बराबर हों अर्थात् $a = b$ हो, समकोणिक अतिपरवलय कहलाता है।

स्पष्टतः इसका समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

या $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$ होगा।

तथा $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ में $a^2 = b^2$ से

$a^2 = a^2(e^2 - 1)$ या $e^2 - 1 = 1$ या $e^2 = 2$ $\therefore$ $e = \sqrt{2}$

$\therefore$ समकोणिक अतिपरवलय की उत्केंद्रता $e = \sqrt{2}$

8.5 अतिवलय का प्राचलिक समीकरण (Parametric Equation of a Hyperbola)

बिंदु $(a \sec \phi, b \tan \phi)$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को संतुष्ट करता है अत: अतिपरवलय के प्राचलिक

करण $x = a \sec \phi$, $y = b \tan \phi$ हैं।

8.6 अतिपरवलय का सामान्य समीकरण (General Equation of a Hyperbola)

माना लिया अतिवलय की नाभि S के निर्देशांक (h, k) तथा नियता का समीकरण $lx + my + n = 0$ तथा केंद्रता e है, यदि $P(x, y)$ इस पर कोई बिंदु हो तथा PM, नियता पर लंब है, तो

$$\frac{PS}{PM} = e \Rightarrow PS = e.PM \Rightarrow PS^2 = e^2 PM^2 \Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = e^2 \left\{\frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}\right\}^2$$

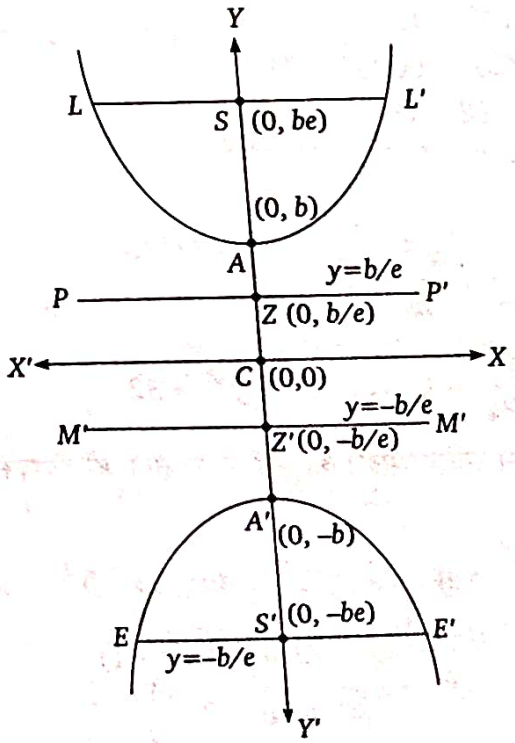
या $\mathbf{(l^2 + m^2)\{(x-h)^2 + (y-k)^2\} = e^2(lx + my + n)^2}$

यह अतिपरवलय का सामान्य समीकरण है।

8.7 संयुग्मी अतिपरवलय (Conjugate Hyperbola)

अतिपरवलय जिसकी अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष क्रमश: दिए गए अतिपरवलय के संयुग्मी एवं अनुप्रस्थ अक्ष हों, दिए गए अतिपरवलय का संयुग्मी कहलाता है।

यदि $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ कोई अतिपरवलय हो तो $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ अर्थात् $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$



इसका संयुग्मी अतिपरवलय होगा तथा इस **अतिपरवलय की नाभियाँ y-अक्ष पर होंगी। स्पष्टतः इस अतिपरवलय में y-अक्ष अनुप्रस्थ अक्ष तथा x-अक्ष संयुग्मी अक्ष होंगे।**

नोट :

• अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ परस्पर संयुग्मी अतिपरवलय हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. अक्षों को निर्देशाक्ष मानकर उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसके अनुप्रस्थ अक्ष तथा संयुग्मी अक्ष क्रमशः 8 और 6 हैं।

हल : दिया गया है अनुप्रस्थ अक्ष $2a=8$ या $a=4$

तथा संयुग्मी अक्ष $2b=6$ या $b=3$

$\therefore$ मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ में इन मानों को रखने पर

या $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ या $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2. निर्देशाक्षों को अक्ष मानकर उस अतिपरवलय का मानक समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियों के बीच की दूरी 16 तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है।

हल : यहाँ $e=\sqrt{2}$ तथा नाभियों के बीच की दूरी $= 16$

अर्थात् $2ae=16 \Rightarrow ae=8$

पुनः $e=\sqrt{2} \Rightarrow a\times\sqrt{2}=8$

$\Rightarrow a=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

पुनः $b^2=a^2(e^2-1)$

$=(4\sqrt{2})^2\{(\sqrt{2})^2-1\}$

$=32\times(2-1)$

$=32\times1$

$=32$

अभीष्ट समीकरण $\frac{x^2}{(4\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{32}=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{32}=1 \Rightarrow x^2-y^2=32$ उ●

उदाहरण 3. निर्देशांकों को अक्ष मानकर उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी उत्केंद्रता 3 तथा नाभिलंब 4 है।

हल : दिया गया है, $e=3$

तथा नाभिलंब $=4 \Rightarrow \frac{2b^2}{a}=4 \Rightarrow 2b^2=4a \Rightarrow b^2=2a$ ...(1)

पुनः $b^2=a^2(e^2-1) \Rightarrow 2a=a^2(3^2-1) \Rightarrow 2a=8a^2 \Rightarrow 4a=1$

$\therefore a=\frac{1}{4}$ $\therefore b^2=2a=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ [(1) से]

अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{(1/4)^2} - \frac{y^2}{1/2} = 1$ या $16x^2 - 2y^2 = 1$

यह अभीष्ट समीकरण है। उत्तर

उदाहरण 4. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियाँ $(\pm 2, 0)$ तथा उत्केन्द्रता 3/2 है।

हल : माना अतिपरवलय की नाभियाँ S तथा S' एवं उत्केन्द्रता e हो, तो

प्रश्न से नाभि S के निर्देशांक $= (2, 0)$; नाभि S' के निर्देशांक $= (-2, 0)$ तथा $e = \frac{3}{2}$

केन्द्र $C = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0, 0)$ तथा $SS' = \sqrt{(2+2)^2 + 0} = 4$

$\therefore$ $SS' = 2ae = 4 \Rightarrow 2a \times \frac{3}{2} = 4$

किंतु $3a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{16}{9}$

$\Rightarrow$ पुनः $b^2 = a^2(e^2 - 1) = \frac{16}{9}\left(\frac{9}{4} - 1\right)$

$= \frac{16}{9} \times \frac{5}{4} = \frac{२०}{९}$

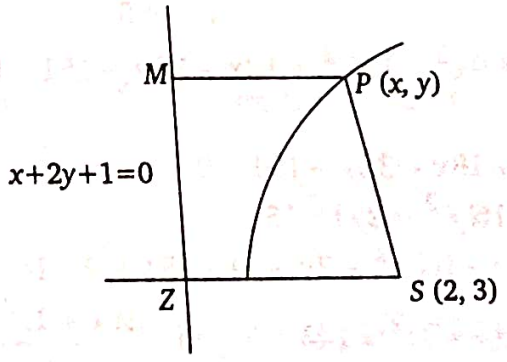
$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण $\frac{(x-0)^2}{\frac{16}{9}} - \frac{(y-0)^2}{\frac{20}{9}} = 1$ या $\frac{9x^2}{16} - \frac{9y^2}{20} = 1$ अभीष्ट समीकरण है।

[$\because$ यदि केंद्र (h, k) हो तो अतिपरवलय $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$]

उदाहरण 5. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसकी नियता $x + 2y + 1 = 0$, नाभि $(2, 3)$ तथा उत्केंद्रता $\sqrt{2}$ है।

हल : अतिपरवलय की नाभि $S = (2, 3)$; $e = \sqrt{2}$, नियता ZM का समीकरण $x + 2y + 1 = 0$

यदि $P(x, y)$ अतिपरवलय पर कोई बिन्दु हो,



या $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2\frac{(x+2y+1)^2}{5}$ [$\because PS = e\,PM \Rightarrow PS^2 = e^2 PM^2$]

या $5\{x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9\} = 2(x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 4y + 2x)$

या $5x^2 - 20x + 20 + 5y^2 - 30y + 45 = 2x^2 + 8y^2 + 2 + 8xy + 8y + 4x$

या $3x^2 - 3y^2 - 8xy - 24x - 38y + 63 = 0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 6. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के शीर्ष, अक्ष, नाभियाँ तथा उत्केन्द्रता ज्ञात करें।

हल : दिया गया समीकरण $9x^2 - 16y^2 = 144$ या $\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$ या $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

अत: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ तथा $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

(i) शीर्ष $= (\pm a, 0) = (4, 0)$

(ii) अनुप्रस्थ अक्ष $= 2a = 2 \times 4 = 8$ तथा संयुग्मी अक्ष $= 2b = 2 \times 3 = 6$

केन्द्र $= (0, 0)$

(iii) उत्केन्द्रता : $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow 9 = 16(e^2 - 1)$

$\Rightarrow 16e^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow e = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

(iv) नाभियाँ $= (\pm ae, 0)$ अर्थात् नाभियाँ $= (\pm 4 \times 5/4, 0) = (\pm 5, 0)$.

उदाहरण 7. अतिपरवलय $16x^2 - 25y^2 = 400$ की उत्केंद्रता, नाभियाँ तथा नियताओं के समीकरण ज्ञात करें।

हल : दिया गया समीकरण $16x^2 - 25y^2 = 400$

$\Rightarrow \frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ तथा $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ ...(1)

अब $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ से (1) की तुलना करने पर

(i) उत्केंद्रता : $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow 16 = 25(e^2 - 1)$

$\Rightarrow 25e^2 = 41 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{41}}{5}$ $[\because e > 1]$

(ii) नाभियाँ : $(\pm ae, 0)$ अर्थात् $\left(\pm 5 \times \frac{\sqrt{41}}{5}, 0\right) = (\pm \sqrt{41}, 0)$

(iii) नियतायें : $x = \pm \frac{a}{e}$ अर्थात् $x = \pm \frac{5}{\frac{\sqrt{41}}{5}} = \pm \frac{25}{\sqrt{41}}$ नियता के समीकरण हैं।

उदाहरण 8. दिए गए अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 151 = 0$ का केंद्र, नाभियाँ, नियतायें, नाभिलंब तथा उत्केंद्रता ज्ञात करें।

हल : $9x^2 - 16y^2 + 18x + 32y - 151 = 0$

$\Rightarrow 9(x^2 + 2x) - 16(y^2 - 2y) = 151$

$\Rightarrow 9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1) = 151 + 9 - 16$

$\Rightarrow 9(x+1)^2 - 16(y-1)^2 = 144 \Rightarrow \frac{9(x+1)^2}{144} - \frac{16(y-1)^2}{144} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ ...(1)

(1) में $x + 1 = X$ तथा $y - 1 = Y$ रखने से समीकरण $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$ ...(2)

अत: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ तथा $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

अत: (i) $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow 9 = 16(e^2 - 1) \Rightarrow 16e^2 = 25$

$e = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ अर्थात् उत्केंद्रता $e = \frac{5}{4}$

(ii) केंद्र : $X = 0, Y = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ तथा $y-1=0 \Rightarrow y=1$

$\therefore$ केंद्र $= (-1, 1)$

(iii) नाभियाँ : नाभियों के निर्देशांक $X = \pm ae, Y = 0$ अर्थात् $x+1 = ae$ तथा $y-1=0$

$\therefore \quad x+1 = \pm 4 \times \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm 5 - 1 \Rightarrow x = 5-1 = 4 \Rightarrow x = -5-1 = -6$

तथा $Y = 0 \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$

$\therefore$ नाभियाँ $= (4, 1)$ तथा $(-6, 1)$

(iv) नियतायें $X = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x+1 = \pm \frac{4}{5/4} \Rightarrow x+1 = \pm \frac{16}{5} \Rightarrow 5(x+1) = \pm 16$

$\therefore$ नियतायें $5(x+1) = 16 \Rightarrow 5x - 11 = 0$ तथा $5(x+1) = -16 \Rightarrow 5x + 21 = 0$

(v) नाभिलंब $= 2 \times \frac{b^2}{a} = 2 \times \frac{3^2}{4} = \frac{9}{2}$

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ और $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$ सदैव एक अतिपरवलय पर मिलती हैं, जहाँ m अचर है।

हल : दिए गए समीकरण $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ तथा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$

$\therefore \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = m \times \frac{1}{m}$ तथा $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$

जो अतिपरवलय के समीकरण को निरूपित करता है।

उदाहरण 10. यदि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ की उत्केंद्रतायें e_1 तथा e_2 हों तो सिद्ध करें

$$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$$

हल : दिया गया प्रथम अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा इसकी उत्केंद्रता $= e_1$

$\therefore$ प्रथम अतिपरवलय में, $b^2 = a^2(e_1^2 - 1) \Rightarrow e_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$ ...(1)

तथा द्वितीय अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ऊर्ध्वाधर है तथा इसकी उत्केंद्रता $= e_2$ है

अत: $a^2 = b^2(e_2^2 - 1) \Rightarrow e_2^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$ ...(2)

$\therefore$ (1) तथा (2) से, $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 11. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा अतिपरवलय $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = \frac{1}{25}$ की नाभियाँ समान हैं तो b^2 का मान बतायें।

हल : दिया गया अतिपरवलय $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ या $\frac{x^2}{\frac{144}{25}}-\frac{y^2}{\frac{81}{25}}=1$

$$a^2=\frac{144}{25} \Rightarrow a=\frac{12}{5} \quad \text{तथा} \quad b^2=\frac{81}{25} \Rightarrow b=\frac{9}{5}$$

अब $b^2=a^2(e^2-1) \Rightarrow \frac{81}{25}=\frac{144}{25}(e^2-1) \Rightarrow 144e^2=144+81=225$

$$\Rightarrow \quad e^2=\frac{225}{144} \quad \therefore \quad e=\sqrt{\frac{225}{144}}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

$\therefore$ अतिपरवलय की नाभियाँ $=(\pm ae, 0)=\left(\pm \frac{12}{5}\times\frac{5}{4}, 0\right)=(\pm 3, 0)$

पुनः दिए गए दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ से $a^2=16$,

चूँकि दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय की नाभियाँ समान हैं

अतः दीर्घवृत्त की नाभियाँ $=(\pm ae, 0)=(\pm 3, 0) \quad \therefore \quad ae=3$

किंतु $b^2=a^2(1-e^2) \Rightarrow a^2e^2=a^2-b^2 \Rightarrow a^2-b^2=3^2$ $[\because ae=3]$

$\Rightarrow 16-b^2=9$ या $b^2=7$

उत्तर

महत्वपूर्ण सूत्र

1. (i) अतिपरवलय का मानक समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{जहाँ } b^2=a^2(e^2-1), \quad e>1$$

(ii) अनुप्रस्थ अक्ष : x-अक्ष (ii) संयुग्मी अक्ष : y-अक्ष

2. संयुग्मी अतिपरवलय (i) मानक समीकरण $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ या $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, जहाँ $a^2=b^2(e^2-1)$

(ii) अनुप्रस्थ अक्ष : y-अक्ष (iii) संयुग्मी अक्ष : x-अक्ष (iv) नाभियाँ y-अक्ष पर होती हैं

3. समकोणिक अतिपरवलय

(i) संयुग्मी अक्ष तथा अनुप्रस्थ अक्ष बराबर होते हैं अर्थात् $a=b$

(ii) मानक समीकरण $x^2-y^2=a^2$

(iii) उत्केंद्रता $e=\sqrt{2}$

4. अतिपरवलय तथा संयुग्मी अतिपरवलय से सम्बन्धित परिणाम

	समीकरण	अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	संयुग्मी अतिपरवलय $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
1.	केन्द्र	(0, 0)	(0, 0)
2.	शीर्ष	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$
3.	नाभियाँ	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$
4.	अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई	$2a$	$2b$

5.	संयुग्मी अक्ष की लम्बाई	$2b$	$2a$
6.	अनुप्रस्थ अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$x = 0$
7.	संयुग्मी अक्ष का समीकरण	$x = 0$	$y = 0$
8.	नियताओं के समीकरण	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{b}{e}$
9.	उत्केन्द्रता	$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$	$e = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b}$
10.	नाभिलम्ब का लम्बाई	$2b^2/a$	$2a^2/b$
11.	किसी बिन्दु की नाभीय दूरी	$ex \pm a$	$ey \pm b$
12.	नाभीय दूरियों का अन्तर, $(PS' - PS)$	$2a$	$2b$
13.	प्रांचलिक निर्देशांक	$(a \sec\theta, b \tan\theta)$	$(b \sec\theta, a \tan\theta)$

प्रश्नावली 18.1

1. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसके अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई 3 तथा संयुग्मी अक्ष की लंबाई 4 है।
2. अक्षों को निर्देशाक्ष मानकर उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसका अनुप्रस्थ अक्ष 12 एवं संयुग्मी अक्ष 10 है।
3. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ तथा अनुप्रस्थ अक्ष 8 है।
4. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसके शीर्ष $(\pm 6, 0)$ तथा नाभियाँ $(\pm 8, 0)$ हैं।
5. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसके शीर्ष $(0, \pm 5)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 8)$ हैं।
6. (i) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसका संयुग्मी अक्ष 5 तथा नाभियों के बीच की दूरी 13 है।
   (ii) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र $(-4, 1)$, शीर्ष $(2, 1)$ तथा अर्द्धसंयुग्मी अक्ष 4 है।
7. उस अतिरवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसकी नाभिलंब जीवा 8 तथा उत्केंद्रता $\frac{3}{\sqrt{5}}$ है।
8. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि $(1, 1)$, नियता $2x + y + 1 = 0$ तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{3}$ है।
9. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नाभि $(2, 0)$, उत्केंद्रता 2 तथा नियता $x - y = 0$ है।
10. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के शीर्ष, अक्ष, नाभियाँ तथा उत्केन्द्रता ज्ञात करें।
11. निम्नांकित अतिपरवलयों
    (i) (a) $25x^2 - 9y^2 = 225$ (b) $3y^2 - x^2 = 108$
    के लिए (i) अक्षों की लंबाई (ii) शीर्ष (iii) नाभियाँ (iv) उत्केंद्रता तथा (v) नाभिलंब की लंबाई ज्ञात करें।
    (ii) अतिपरवलय $16x^2 - 25y^2 = 400$ की उत्केंद्रता, नाभियाँ तथा नियताओं के समीकरण ज्ञात करें।
12. दिखायें समीकरण $9x^2 - 16y^2 - 18x + 32y - 151 = 0$ अतिपरवलय को निरूपित करता है। अतिपरवलय का (i) केंद्र (ii) शीर्ष (iii) अक्षों की लंबाई (iv) अक्षों के समीकरण (v) नाभियाँ (vi) नाभिलंब जीवा की लंबाई (vii) नाभिलंबों के समीकरण (viii) नियताओं के समीकरण ज्ञात करें।
13. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ की (i) उत्केंद्रता, (ii) केंद्र (iii) शीर्ष (iv) नाभियाँ (v) अक्षों के समीकरण तथा लंबाई और (vi) नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात करें।
14. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 - 108x - 160y = 220$ के नाभियों के निर्देशांक ज्ञात करें।

15. उस बिंदु का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जिसकी बिंदुओं (5, 0) तथा (– 5, 0) से दूरियों का अंतर 2 है।
[**संकेत :** यदि $P(x, y)$ दिया गया बिंदु है तो प्रश्न से, $PS' - PS = 2$, जहाँ $S = (5, 0)$, $S' (-5, 0)$]

16. सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ और $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$ सदैव एक अतिपरवलय पर मिलती है, जहाँ m अचर है।

उत्तरमाला

1. $16x^2 - 9y^2 = 144$

2. $25x^2 - 36y^2 = 900$

3. $9x^2 - 16y^2 = 144$

4. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$

5. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$

6. (i) $25x^2 - 144y^2 = 900$ (ii) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 18y - 89 = 0$

7. $4x^2 - 5y^2 = 100$ **8.** $7x^2 - 2y^2 + 12xy + 2x + 16y - 7 = 0$

9. $x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 4 = 0$

10. शीर्ष : (± 4, 0), अक्ष : 8, 6; नाभियाँ (± 5, 0), उत्केंद्रता = 5/4

11. (i) (a) (i) 6 इकाई, 10 इकाई (ii) (± 3, 0) (iii) $(\pm \sqrt{34}, 0)$ (iv) $\frac{\sqrt{34}}{3}$ (v) $16\frac{2}{3}$ इकाई

(b) (i) 12 इकाई, $12\sqrt{3}$ इकाई (ii) (0, ± 6) (iii) (0, ± 12) (iv) 2 (v) 36 इकाई

(ii) नाभियाँ (± 41, 0), नियतायें $x = \pm \frac{25}{\sqrt{41}}$, उत्केन्द्रता $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$

12. (i) (1, 1) (ii) (5, 1), (–3, 1) (iii) 8, 6 (iv) $y - 1 = 0$, $x - 1 = 0$ (v) (6, 1), (–3, 1) (vi) $\frac{9}{2}$

(vii) $x - 6 = 0$, $x + 4 = 0$ (viii) $5x - 21 = 0$, $5x + 11 = 0$

13. (i) 5/4 (ii) केंद्र (1, – 2) (iii) शीर्ष (5, – 2), (–3, – 2) (iv) नाभि (6, – 2), (–4, – 2)
(v) अक्ष : $y + 2 = 0$, $x - 1 = 0$, लंबाई = 8, (vi) नाभिलंब जीवा = 9/2

14. (11, – 5), (1, – 5)

15. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{24} = 1$

अध्याय 19

सदिशों का योग, अन्तर एवं वियोजन (Addition, Subtraction and Resolution of Vectors)

(पुनरावृत्ति)

19.1 प्रस्तावना (Introduction)

दैनिक जीवन में हमें दो प्रकार की भौतिक राशियाँ मिलती हैं। पहले प्रकार की राशियों में केवल परिमाण होता है। जैसे—दूरी, समय, द्रव्यमान, आयतन इत्यादि। दूसरे प्रकार की राशियों में परिमाण के साथ-साथ निश्चित दिशा भी होती है। जैसे—बल, वेग, त्वरण, विस्थापन आदि।

पहले प्रकार की राशियाँ अदिश (Scalars) तथा दूसरे प्रकार की राशियाँ सदिश (Vectors) कहलाती हैं।

अतः इनकी परिभाषा निम्न रूप में दी जा सकती हैं—

अदिश राशि (Scalar Quantity)—अदिश राशि एक ऐसी भौतिक राशि है जिसमें केवल परिमाण होता है। इससे किसी निश्चित दिशा का ज्ञान नहीं होता।

सदिश राशि (Vector Quantity)—सदिश राशि एक ऐसी भौतिक राशि है जो पूर्णतः अपने परिमाण तथा दिशा दोनों से निर्दिष्ट होती है।

19.2 सदिश राशि का निरूपण (Representation of a Vector)

किसी सदिश राशि को तीरयुक्त रेखाखंड (Directed Line Segment) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। सरल रेखाखंड की लम्बाई उसके परिमाण तथा उस पर लगा हुआ तीर उसकी दिशा को बताता है। प्रतीक रूप में किसी सदिश को निरूपित करने के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के दो अक्षरों के ऊपर एक तीर खींच देते हैं।



चित्र में $\vec{AB}$ एक सदिश को निरूपित करता है जिसका परिमाण AB की लम्बाई से निरूपित है तथा दिशा A से B की ओर है जहाँ A सदिश प्रारंभिक बिंदु (Initial Point) तथा B अंतिम बिंदु (Terminal Point) है।

व्यवहार में सदिश को निरूपित करने के लिए अंग्रेजी वर्णमाला का कोई अक्षर (Capital या Small) लिखकर उस पर तीर लगा देते हैं। जैसे—$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ इत्यादि। पुस्तकों में इसे bold letter **a, b, c** या $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ से भी प्रदर्शित किया जाता है।

19.3 कुछ मुख्य परिभाषायें (Some Important Definitions)

(i) सदिश का मापांक (Modulus of a Vector)—किसी सदिश का मापांक वह धनात्मक राशि है जो उस सदिश के परिमाण को बतलाता है।

किसी सदिश $\vec{a}$ अथवा $\vec{AB}$ के मापांक को $|\vec{a}|$ या $|\vec{AB}|$ से निरूपित करते हैं।

(ii) शून्य सदिश (Zero or Null Vector)—जिस सदिश के आदि एवं अंतिम बिंदु संपाती (incident) हों, शून्य सदिश कहलाता है। इसका मापांक शून्य और इसकी दिशा अज्ञात होती है। इसे $\vec{0}$ या **0** या $\vec{AA}$, $\vec{BB}$ आदि से सूचित किया जाता है।

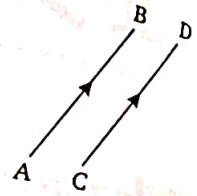
(iii) एकक या इकाई सदिश (Unit Vector)—जिस सदिश का मापांक इकाई हो उसे एकक या इकाई सदिश कहते हैं। इकाई सदिश को सदिश के ऊपर प्रतीक $\wedge$ लगाकार सूचित करते हैं। जैसे : $\hat{\mathbf{a}}$, सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा में इकाई सदिश है।

इसका मान सदिश में उसके मापांक से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

अर्थात् $\hat{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$ की दिशा में इकाई सदिश $= \dfrac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}$

(iv) समान सदिश (Equal Vectors)—यदि दो सदिशों के मापांक बराबर हों और उनकी दिशा एक ही हो तो वे समान सदिश कहलाते हैं।

इनके आदि बिंदु कहीं भी हो सकते हैं।



चित्र में $\vec{AB} = \vec{CD}$ क्योंकि $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ तथा $\vec{AB}$ और $\vec{CD}$ की दिशा समान है।

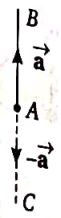
(v) समरेखीय सदिश (Collinear Vectors)—दो सदिश समरेख कहे जाते हैं यदि वे एक ही रेखा पर हों या एक ही सरल रेखा के समान्तर हों।

यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ समरेखीय सदिश हों, तो $\vec{\mathbf{a}} = \lambda \vec{\mathbf{b}}$ या $\vec{\mathbf{b}} = \lambda \vec{\mathbf{a}}$, जहाँ λ कोई अदिश है।

(vi) समदिश सदिश एवं असमदिश सदिश (Like Vectors and Unlike Vectors)—यदि समरेख सदिशों की दिशायें एक ही हों तो वे समदिश या सदृश सदिश तथा विपरीत दिशा में हों तो असमदिश या असदृश सदिश कहलाते हैं। इनका परिमाण भिन्न अथवा विशेष दशा में समान हो सकता है।

ऊपर के चित्र में $\vec{AB}$ तथा $\vec{CD}$ समदिश सदिश हैं।

(vii) समतलीय सदिश (Coplanar Vector)— वे सदिश जो एक ही तल में हों या जिनकी दिशायें एक ही तल के समानांतर हों एकतलीय या समतलीय सदिश कहलाते हैं।



यदि वे एक तल के समानांतर न हों तो **नैकतलीय (Non-coplanar)** सदिश कहलाते हैं।

(viii) ऋण सदिश (Negative Vector)—यदि दो सदिशों के मापांक बराबर हों किन्तु दिशायें विपरीत हों तो वे परस्पर ऋणात्मक सदिश कहलाते हैं।

यदि $\vec{AB} = \vec{\mathbf{a}}$ तो $\vec{BA} = -\vec{\mathbf{a}}$। यदि बिन्दु A, BC के बीच इस प्रकार हो कि $AB = AC$ तथा $\vec{AB} = \vec{\mathbf{a}}$ तो $\vec{AC} = -\vec{\mathbf{a}}$

19.4 सदिश का वास्तविक संख्या या अदिश से गुणनफल (Multiplication of a Vector by a Real Number or Scalar)

यदि m एक वास्तविक धनात्मक संख्या तथा $\vec{OA}$, सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को निरूपित करता है तो $m\vec{\mathbf{a}}$ उस सदिश को निरूपित करेगा जिसकी दिशा $\vec{OA}$ की दिशा में होगी किन्तु उसका मापांक $\vec{OA}$ के मापांक का m गुना होगा।

इसी प्रकार $-m\vec{\mathbf{a}}$ उस सदिश को निरूपित करेगा जिसकी दिशा $\vec{OA}$ की दिशा के विपरीत होगी तथा मापांक $\vec{OA}$ का m गुणा होगा। जैसे : $3\vec{\mathbf{a}}$ परिमाण में सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का तीन गुना या $\vec{\mathbf{a}}$ की समान दिशा में है जबकि $-3\vec{\mathbf{a}}$ परिमाण में $\vec{\mathbf{a}}$ का तीन गुना किन्तु विपरीत दिशा में है।

गुण : यह क्रम विनिमेय साहचर्य तथा वितरण नियम का पालन करता है।

(i) $m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}m$ [क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law)]

(ii) $m(n\vec{\mathbf{a}}) = n(m\vec{\mathbf{a}}) = mn\,\vec{\mathbf{a}}$ [साहचर्य नियम (Associative Law)]

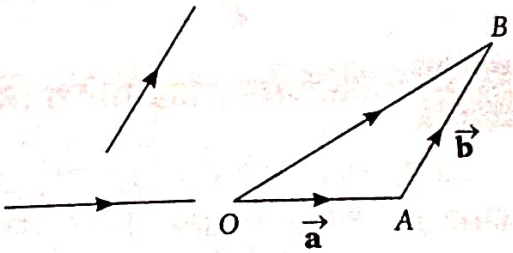
(iii) $m(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = m\vec{\mathbf{a}} + m\vec{\mathbf{b}}$ [वितरण नियम (Distributive Law)]

19.5 सदिशों का योग त्रिभुज नियम (Triangle Law of Addition of Vectors)

यदि किसी त्रिभुज की क्रम से ली गई दो भुजाएँ दो सदिशों को परिमाण तथा दिशा में निरूपित करती हैं तो उसी क्रम में ली गई त्रिभुज की तीसरी भुजा सदिशों के योग अथवा परिणामी को सूचित करती है।

यह नियम सदिश योग त्रिभुज नियम कहलाता है।

माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ कोई दो सदिश हैं। यदि $\vec{a}$ के अंतिम बिंदु को $\vec{b}$ के आदि बिंदु के रूप में इस प्रकार लें कि $\vec{OA} = \vec{a}$ तथा $\vec{AB} = \vec{b}$ तो $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ को $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का परिणामी (Resultant) अथवा योग (Sum) कहते हैं।

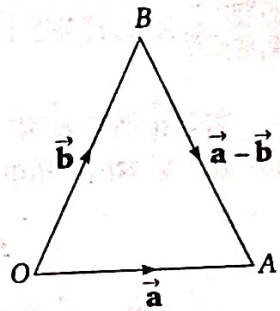


इस प्रकार $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$

19.6 सदिशों को घटाना (Subtraction of Vectors)

$\vec{a}$ से सदिश $\vec{b}$ को घटाने का अर्थ है $-\vec{b}$ को $\vec{a}$ से जोड़ना

अर्थात् $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$



मान लिया $\vec{OA} = \vec{a}$ तथा $\vec{OB} = \vec{b}$

$\vec{OB} = \vec{b} \Rightarrow \vec{BO} = -\vec{b}$

अत: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{OA} + \vec{BO}$

किन्तु $\vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BA} \Rightarrow \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ अत: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$

19.7 सदिश योग के गुण (Properties of Addition of Vectors)

सदिश योग क्रम विनिमेय नियम तथा साहचर्य नियम का पालन करता है।

अत:

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [क्रम विनिमेय नियम]

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ [साहचर्य नियम]

19.8 स्थिति सदिश (Position Vectors)

परिभाषा : किसी निर्देश बिन्दु (Reference point) O के सापेक्ष किसी बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{OP}$ से दिया जाए तो सदिश $\vec{OP}$ को O के सापेक्ष P का स्थिति सदिश कहते हैं।

यदि $\vec{OP} = \vec{r}$ तो P को सामान्यत: $P(\vec{r})$ से व्यक्त करते हैं।

चित्र में $\vec{OA}$ तथा $\vec{OB}$ क्रमश: बिन्दु A तथा B के स्थिति सदिश हैं।



19.8.1 सदिश को उसके सिरे के स्थिति सदिशों के पदों में व्यक्त करना।

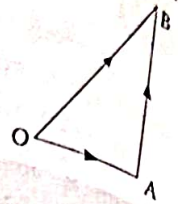
चित्र (i) से $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

या $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ = बिन्दु B का स्थिति सदिश - बिन्दु A का स्थिति सदिश

इसी तरह

$\vec{AC}$ = बिन्दु C का स्थिति सदिश − बिंदु A का स्थिति सदिश $= \vec{OC} - \vec{OA}$

$\vec{BC}$ = बिन्दु C का स्थिति सदिश − बिंदु B का स्थिति सदिश $= \vec{OC} - \vec{OB}$

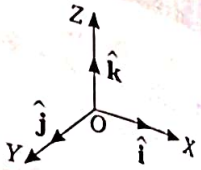


19.9 समकोणिक इकाई सदिश (Rectangular Unit Vectors)

समकोणिक अक्षों OX, OY तथा OZ का धन दिशा के अनुदिश इकाई सदिशों को क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ से सूचित किया जाता है।

इन इकाई सदिशों के लिए $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

इन सदिशों का उपयोग समकोणीय निर्देश तंत्र (Rectangular system of coordinates) में अक्षों की दिशायें निरूपित करने के लिए किया जाता है।



19.10 सदिशों का वियोजन (Rectangular of Vectors)

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो असंरेखीय सदिश हों तथा $\vec{A}$ उसी समतल में कोई सदिश हो, तो $\vec{A}$ को $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के पदों में निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\vec{A} = x\vec{a} + y\vec{b}, \text{ जहाँ } x \text{ तथा } y \text{ अदिश राशियाँ है।}$$

$x\vec{a}$ तथा $y\vec{b}$ क्रमशः सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ की दिशा में सदिश $\vec{A}$ के घटक कहलाते हैं।

(i) द्विविमीय आकाश (Two-dimensional Space)—माना OX तथा OY दो समकोणिक अक्ष हैं तथा $P(x, y)$ द्विविमीय आकाश में कोई बिंदु है, तो $OQ = x, QP = y$ [चित्र (i)]

माना $\hat{i}$ तथा $\hat{j}$ समकोणिक अक्ष की दिशा में इकाई सदिश है, तो $\vec{OQ} = x\hat{i}$, $\vec{QP} = y\hat{j}$

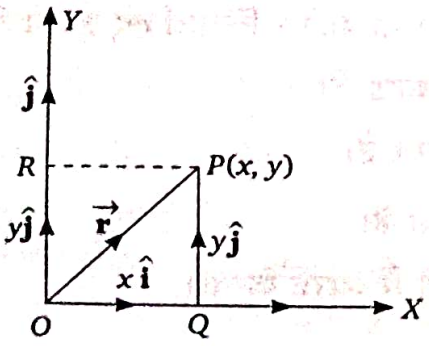
माना बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{OP} = \vec{r}$ से दिया जाता है, तो $\vec{OP} = \vec{r} = \vec{OQ} + \vec{QP} = x\hat{i} + y\hat{j}$

[योग के त्रिभुज नियम से]

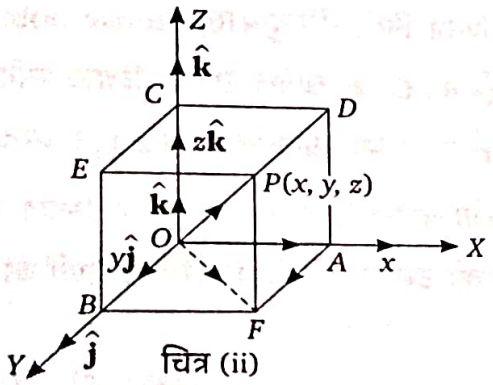
तथा समकोण ΔOQP से $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$

$\Rightarrow \quad OP^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

सदिश $\vec{OP}$ का **मापांक** $= |\vec{OP}| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



चित्र (i)



चित्र (ii)

(ii) त्रिविमीय आकाश (Three-dimensional space)—माना OX, OY तथा OZ तीन समकोणिक अक्ष हैं तथा $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ इनके समानांतर इकाई सदिश हैं। [चित्र (ii)]

माना $\vec{OP} = \vec{r}$ तथा बिंदु P के नियामक (x, y, z) हैं, तथा $OA = x, OB = y, OC = z$ तो चित्र से

$\vec{OA} = x\hat{i}, \vec{OB} = y\hat{j}$ तथा $\vec{OC} = z\hat{k}$

अब $\vec{OP} = \vec{OF} + \vec{FP}$

$\Rightarrow \vec{OP} = (\vec{OA} + \vec{AF}) + \vec{FP} \Rightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \Rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$[\because \vec{AF} = \vec{OC}, \vec{FP} = \vec{OC}]$

तथा $OP^2 = OF^2 + FP^2 = (OA^2 + AF^2) + FP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\left[\because \begin{matrix} AF = OB = y \\ FP = OC = z \\ OA = x \end{matrix}\right]$

$\Rightarrow OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

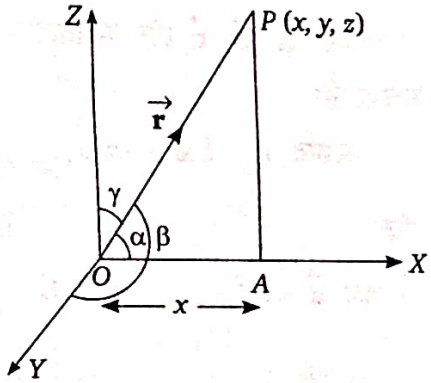
अर्थात् सदिश $\vec{OP}$ का मापांक $= OP$

$$|\vec{OP}| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

19.11 दिक् कोज्याएँ (Direction Cosines)

कोई सदिश समकोणिक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ जो कोण बनाता है, उनकी कोज्याओं (cosines) को उसकी दिक् कोज्याएँ कहते हैं।

माना कोई सदिश $\vec{OP}$ समकोणिक अक्षों OX, OY तथा OZ की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाता है, तो **cos** α, **cos** β तथा **cos** γ उसकी दिक् कोज्याएँ कहलाती हैं। इसे सामान्यतः l, m, n से व्यक्त करते हैं।



अर्थात् $\boldsymbol{l = \cos\alpha, m = \cos\beta}$ तथा $\boldsymbol{n = \cos\gamma}$

α, β तथा γ दिक् कोण (direction angles) कहलाते हैं

तथा $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$

गुण : (i) यदि $\vec{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

तो $$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

तथा $\vec{OP}$ की दिक् कोज्याएँ $\cos\alpha, \cos\beta$ तथा $\cos\gamma$ हों

तो $$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

अर्थात् $\cos\alpha = \dfrac{\hat{i} \text{ का गुणांक}}{\text{सदिश } \vec{r} \text{ का मापांक}}; \cos\beta = \dfrac{\hat{j} \text{ का गुणांक}}{\text{सदिश } \vec{r} \text{ का मापांक}}; \cos\gamma = \dfrac{\hat{k} \text{ का गुणांक}}{\text{सदिश } \vec{r} \text{ का मापांक}}$

(ii) दिक् कोज्याओं के वर्गों का योग हमेशा 1 होता है।

(i) से $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$

अर्थात् $l^2 + m^2 + n^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(iii) x-अक्ष तथा y-अक्ष की दिक् कोज्याएँ क्रमशः 1, 0, 0; 0, 1, 0 तथा 0, 0, 1 से दी जाती हैं, क्योंकि वे अक्षों से क्रमशः $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$ कोण बनाती हैं।

नोट :

- यदि $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ कोई दो बिन्दु हों तो PQ के दिक् अनुपात (direction ratios) $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ तथा $z_2 - z_1$ से दिये जाते हैं तथा **दिक् कोज्याएँ** $\frac{x_2-x_1}{r}, \frac{y_2-y_1}{r}$ तथा $\frac{z_2-z_1}{r}$ से दिए जाते हैं, जहाँ

$$r = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

19.12 समतलीय सदिश एवं असमतलीय सदिशों से संबधित महत्वपूर्ण परिणाम (Important Results on Planar and Non-coplanar Vectors)

परिभाषा : तीन या तीन से अधिक अशून्य सदिश समतलीय सदिश कहलाते हैं यदि वे एक ही समतल में हों या एक ही समतल के समानांतर हों।

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन समतलीय सदिश हों तो किसी भी एक सदिश को अन्य दो सदिशों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

अर्थात् $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$, जहाँ l तथा m अदिश हैं।

नोट :

- यदि $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$; $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$; $\vec{c} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\hat{k}$ तथा

(i) यदि $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$ *i.e.*, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

तो सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय होंगे।

(ii) यदि $\Delta \neq 0$ तो सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ असमतलीय (non-coplanar) होंगे।

कुछ अन्य महत्वपूर्ण परिणाम

1. दो बिन्दुओं के बीच की दूरी : यदि निर्देश बिन्दु O के सापेक्ष दो बिन्दु P_1 तथा P_2 के नियामक क्रमशः (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) हों, तो

$$OP_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$
$$OP_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

$\therefore \quad \vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

अर्थात् बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

दो सदिशों की समता : दो सदिश $\vec{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ तथा $\vec{r_1} = \vec{r_2}$ हो, तो $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$

संरेख सदिश :

(i) दो सदिश $\vec{r}$ तथा $\vec{a}$ संरेख होंगे यदि $\vec{r} = x\vec{a}$ या $\vec{a} = x\vec{r}$, जहाँ x अदिश है।

(ii) तीन बिन्दु A, B, C जिनमें स्थिति सदिश क्रमश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हों संरेख होंगे, यदि $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ तथा $x + y + z = 0$, जहाँ x, y, z (सभी शून्य नहीं) अदिश राशियाँ हैं।

(iii) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ संरेख होंगे यदि उनका सदिश गुणनफल शून्य सदिश हो *i.e.*, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्न सदिशों के मापांक बतायें—

(i) $3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ (ii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

हल : हम जानते हैं कि $|x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

अतः (1) $|3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$ उत्तर

तथा (ii) $|\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $\vec{r_1} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, तो

(i) $\vec{r_1} + \vec{r_2}$ का मान ज्ञात करें। (ii) $\vec{r_1} - \vec{r_2}$ का मान ज्ञात करें।

(iii) $|\vec{r_1} + \vec{r_2}|$ तथा $|\vec{r_1} - \vec{r_2}|$ का मान ज्ञात करें।

(iv) $\vec{r_1}$ तथा $\vec{r_2}$ के योग के समानांतर इकाई सदिश ज्ञात करें।

हल : यहाँ $\vec{r_1} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$; $\vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(i) $\vec{r_1} + \vec{r_2} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 2\hat{i} + \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{j} - 5\hat{k} + 3\hat{k} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

(ii) $\vec{r_1} - \vec{r_2} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 2\hat{i} - \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{j} - 5\hat{k} - 3\hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

(iii) $\because \quad \vec{r_1} + \vec{r_2} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{r_1} + \vec{r_2}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$ उत्तर

तथा $\vec{r_1} - \vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k} \quad \therefore |\vec{r_1} - \vec{r_2}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{1 + 4 + 64} = \sqrt{69}$ उत्तर

(iv) सदिश $(\vec{r_1} + \vec{r_2})$ के समानांतर इकाई सदिश

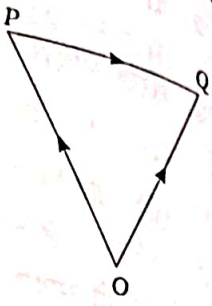
$$\frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{|\vec{r_1} + \vec{r_2}|} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{49}} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{7} = \frac{1}{7}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ तो $\vec{a}$ की दिशा में संगत इकाई सदिश निकालें।

हल : $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k} \quad \therefore \quad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$

अत: इकाई सदिश $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7} = \dfrac{2}{7}\hat{i} + \dfrac{3}{7}\hat{j} - \dfrac{6}{7}\hat{k}$

उदाहरण 4. यदि बिन्दु P तथा Q के स्थिति सदिश क्रमश: $-\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $7\hat{i} - 6\hat{k}$ हों, तो $\vec{PQ}$ निकालें। उत्तर



हल : माना O मूल बिन्दु है।

यहाँ $\vec{OP} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$; $OQ = 7\hat{i} - 6\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (7\hat{i} - 6\hat{k}) - (-\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$= 7\hat{i} + \hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k} + 3\hat{k}$

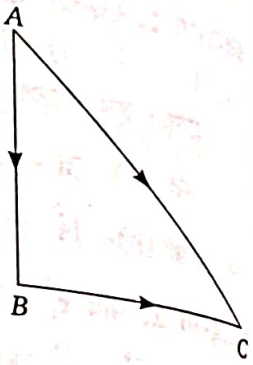
$= 8\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

उदाहरण 5. सिद्ध कीजिए कि सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं। उत्तर

हल : मान लिया $\vec{AB} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{BC} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$; $\vec{AC} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

अब $\quad \vec{AB} + \vec{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} + \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k} = \vec{AC}$

अत: दिए गए सदिशों से एक त्रिभुज बनता है।



अब $\quad |\vec{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

$\therefore \quad \vec{AB} = |\vec{AB}|^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$

तथा $\quad |\vec{BC}| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$

$\therefore \quad BC^2 = |\vec{BC}|^2 = 35$

तथा $\quad |\vec{AC}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41}$

$\therefore \quad AC^2 = |\vec{AC}|^2 = 41$

अब $\because AB^2 + BC^2 = 6 + 35 = 41 = AC^2$

$\therefore \quad \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण 6. प्रमाणित करें कि $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : मान लिया O मूल बिंदु है तथा दिए गए बिन्दु क्रमश: A, B, C हैं।

तो $\vec{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{OB} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$; $\vec{OC} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{j} - 5\hat{k} - \hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}) - (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

तथा $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

अब $\vec{AB} + \vec{BC} = (-\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}) + (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k} = \vec{AC}$

$\therefore$ अत: A, B, C एक त्रिभुज के शीर्ष हैं।

पुन : $AB^2 = |\vec{AB}|^2 = (-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2 = 1 + 4 + 36 = 41$

$BC^2 = |\vec{BC}|^2 = (2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 4 + 1 + 1 = 6$

$AC^2 = (\vec{AC})^2 = 1^2 + (-3)^2 + (-5)^2 = 1 + 9 + 25 = 35$

अब $BC^2 + AC^2 = 6 + 35 = 41 = AB^2$

A (2, -1, 1)

$\therefore$ ΔABC एक समकोण Δ है।

उदाहरण 7. सदिश $3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ की दिक् कोज्याएँ ज्ञात करें तथा दिखायें कि $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

हल : माना $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$, तो a का दिक् अनुपात 3, –4, 12

$\therefore$ $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore$ $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}}{13} = \dfrac{3}{13}\hat{i} - \dfrac{4}{13}\hat{j} + \dfrac{12}{13}\hat{k}$

$\therefore$ अभीष्ट दिक् कोज्याएँ $l = \cos\alpha = \dfrac{3}{13}$; $m = \cos\beta = -\dfrac{4}{13}$; $n = \cos\gamma = \dfrac{12}{13}$

$\therefore$ अब $l^2 + m^2 + n^2 = \left(\dfrac{3}{13}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{13}\right)^2 [3^2 + 4^2 + 12^2]$

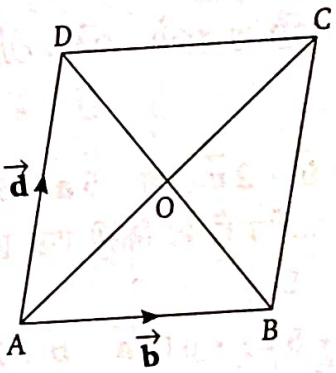
$= \dfrac{1}{169} \times [9 + 16 + 144] = \dfrac{169}{169} = 1$

सिद्ध हुआ।

ज्यामिति पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 8. सदिश विधि से सिद्ध करें कि समानांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

हल : मान लिया $ABCD$ एक समानांतर चतुर्भुज है। यदि A मूल बिंदु हो तथा A के सापेक्ष B तथा D के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{b}$ तथा $\vec{d}$ हों, तो $\vec{AB} = \vec{b}$ तथा $\vec{AD} = \vec{d}$



अब $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{b} + \vec{d}$

$\therefore$ $\vec{AC}$ के मध्य-बिंदु का स्थिति सदिश $= \dfrac{\vec{AC}}{2} = \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$ ...(1)

$\vec{BD}$ के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश $= \dfrac{\vec{AB} + \vec{AD}}{2} = \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$ ...(2)

(1) तथा (2) से

$\vec{AC}$ के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश = $\vec{BD}$ के मध्य बिंदु का स्थिति सदिश

$\therefore$ $\vec{AC}$ तथा $\vec{BD}$ एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

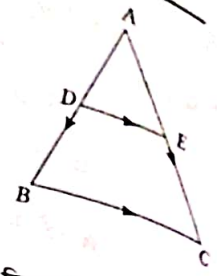
उदाहरण 9. सदिश विधि से सिद्ध करें कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदु को मिलाने वाली सरल रेखा तीसरी भुजा के समानांतर तथा उसकी आधी होती है।

हल : माना ΔABC में AB का मध्य-बिंदु D तथा AC का मध्य-बिन्दु E है।

माना A के सापेक्ष B तथा C के स्थिति सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं तो $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$

अब $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{c} - \vec{b}$

$\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$



$\therefore \quad \vec{DE} \parallel \vec{BC}$ तथा $|\vec{DE}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}|$

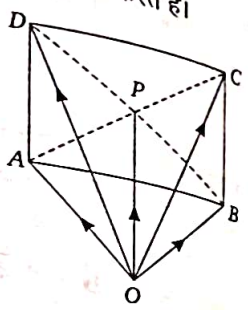
अर्थात् $DE = \frac{1}{2}BC$

अर्थात् DE, BC के समानांतर तथा उसके आधे के बराबर है।

उदाहरण 10. किसी समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु P है तथा O कोई बिन्दु है तो सिद्ध करें $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OP}$.

हल : माना $ABCD$ एक समानांतर चतुर्भुज है तथा विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को P पर समद्विभाजित करते हैं।

चित्र से, P का स्थिति सदिश $\vec{OP} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$



या $\vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{OP}$ ...(1)

तथा $\vec{OP} = \frac{\vec{OB} + \vec{OD}}{2}$

या $\vec{OB} + \vec{OD} = 2\vec{OP}$ ...(2)

(1) तथा (2) को जोड़ने पर

$2\vec{OP} + 2\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} + \vec{OD}$ या $4\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$

यही सिद्ध करना था।

समरैखिक एवं समतलीय सदिशों पर प्रश्न

उदाहरण 11. सिद्ध करें $3\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}$, $4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ तथा $-6\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c}$ समतलीय हैं।

हल : हम जानते हैं कि यदि तीन सदिश समतलीय हों तो किसी एक सदिश को अन्य दो के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

माना $-6\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c} = \alpha(3\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}) + \beta(4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$ जहाँ, α तथा β अदिश हैं।

दोनों तरफ से गुणांकों की तुलना करने पर

$$3\alpha + 4\beta = -6$$

$$\alpha - \beta = 5 \quad \text{...(1)}$$

$$5\alpha + 2\beta = 4 \quad \text{...(2)}$$

हल करने पर $\alpha = 2, \beta = 3$ ...(3)

α तथा β के ये मान समीकरण (3) को संतुष्ट करते हैं।

$\therefore$ ये सदिश समतलीय हैं।

उदाहरण 12. सिद्ध करें कि $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ तथा $8\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ समरेख हैं।

हल : माना O मूलबिन्दु है तथा दिए गए सदिश क्रमशः A, B, C हैं।

तो $\vec{OA} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{OB} = 5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$; $\vec{OC} = 8\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$

$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) - (2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

तथा $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (8\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}) - (5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{BC}$

यह तभी सम्भव है, जब दिए गए बिन्दु A, B तथा C संरेख हों।

उदाहरण 13. यदि सदिश $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} - \lambda\hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ समतलीय हैं तो λ का मान ज्ञात करें।

हल : चूँकि दिए हुए सदिश समतलीय हैं

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(5\lambda - 2) - (-4)(-5 - 3) + 5(2 + 3\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10\lambda - 4 - 32 + 10 + 15\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 25\lambda = 26 \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{26}{25}$$

उदाहरण 14. दो बिन्दुओं $(3, 4, 5)$ तथा $(-1, 3, 3)$ के बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल : यहाँ $x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5, x_2 = -1, y_2 = 3, z_2 = -3$

यदि $A = (3, 4, 5)$ तथा $B = (-1, 3, 3)$ तो

$$AB = \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\}^{1/2}$$
$$= \{(-1 - 3)^2 + (3 - 4)^2 + (-3 - 5)^2\}^{1/2}$$
$$= \{16 + 1 + 64\}^{1/2} = \sqrt{81} = 9$$

उत्तर

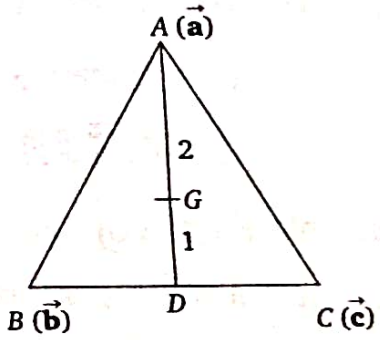
उदाहरण 15. सदिश विधि से सिद्ध करें कि त्रिभुज की माध्यिकायें (Medians) संगामी होती हैं।

हल : मान लिया ΔABC के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ हैं।

मान लिया BC का मध्य-बिन्दु D है, तो D का स्थिति सदिश $= \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

$\therefore$ माध्यिका AD को $2:1$ में बाँटने वाले बिंदु G का स्थिति सदिश

$$= \frac{2 \times \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \vec{a}}{2 + 1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



सममिति (Symmetry) से स्पष्ट है कि बिंदु $G\left(\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right)$ शेष दोनों माध्यिकाओं पर भी स्थित है। इसलिए तीनों माध्यिकायें $G\left(\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right)$ से गुजरती हैं।

$\therefore$ वे संगामी होती हैं।

नोट :

- त्रिभुज के केन्द्रक (centroid) का स्थिति सदिश $= \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \dfrac{1}{3} \times$ शीर्षों के स्थिति सदिश का योग।

उदाहरण 16. दिखाइये कि किसी त्रिभुज के शीर्षों को विपरीत भुजाओं के मध्य-बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं की दिशाओं में सदिशों का बीजगणितीय योग शून्य सदिश होता है।

हल : माना त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B तथा C को सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से मिलाने वाली रेखायें AD, BE तथा CF हैं,

तो ΔABD से, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \dfrac{1}{2}\vec{BC}$ [$\because D$ भुजा BC का मध्य-बिंदु है]

ΔBEC से, $\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}$ [$\because$ E भुजा AC का मध्य-बिन्दु है]

तथा ΔCAF से, $\vec{CF} = \vec{CA} + \vec{AF} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ [$\because$ F भुजा AB का मध्य-बिन्दु है]

$$\therefore \quad \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}\right) + \left(\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}\right) + \left(\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right)$$

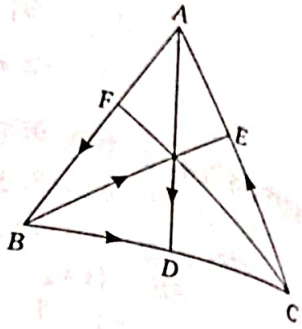
$$= \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC} + \frac{3}{2}\vec{CA}$$

$$= \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})$$

$$= \frac{3}{2}(\vec{AC} + \vec{CA}) \qquad [\because \ \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}]$$

$$= \frac{3}{2}(\vec{AC} - \vec{AC}) \qquad [\because \ \vec{CA} = -\vec{AC}]$$

$$= \frac{3}{2} \times 0 = 0$$



प्रश्नावली 19.1

1. (a) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{c} = -5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो

(i) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ का मान बतायें।

(ii) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ का मान बतायें।

(b) (i) यदि सदिश $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ और $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ तो $\vec{a} - \vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि सदिश $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ और $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ तो $\vec{a} + \vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

(iii) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तो $|\vec{a}|$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

2. यदि $\vec{a} = 7\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{c} = -11\hat{i} + 6\hat{j} + 15\hat{k}$ तो

(i) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ का मान बतायें।

(ii) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ का मान बतायें।

(iii) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ का मापांक बतायें।

सिद्ध करें सदिशों $(2, -1, 0)$, $(3, 2, 1)$, $(-4, 0, 5)$ और $(1, 2, -3)$ का योग $(2, 3, 3)$ है।

$3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ की दिक् कोज्या प्राप्त करें।

(i) यदि $\vec{OP} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{OQ} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$, तो $\vec{PQ}$ की दिक् कोज्या प्राप्त करें तथा $\vec{PQ}$ के संगत इकाई सदिश प्राप्त करें।

(ii) $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ के संगत इकाई सदिश प्राप्त करें।

(iii) यदि सदिश $\vec{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{OB} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $\vec{AB}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(iv) यदि बिन्दुओं P तथा Q के स्थिति सदिश क्रमशः $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ और $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ है तो सदिश $\vec{PQ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

यदि $\vec{r_1} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तो इनके योग के समानांतर इकाई सदिश प्राप्त करें।

सिद्ध करें $3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ एक समबाहु त्रिभुज की भुजायें हैं।

सिद्ध करें कि $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(i) सिद्ध करें कि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज की भुजायें हैं।

(ii) सिद्ध कीजिये कि सदिशों $3\hat{i} - 2\hat{j} + k$, $\hat{i} - 3\hat{j} + 5k$ और $2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ से समकोण त्रिभुज बनता है।

दिखायें (3, – 2, 4), (6, 3, 7), (5, 7, 8) तथा (2, 2, 5) समतलीय बिंदु हैं।

सिद्ध कीजिए $3\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}$, $4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ तथा $-6\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c}$ समतलीय हैं, जबकि $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ कोई सदिश हैं।

सिद्ध कीजिए कि वे चार बिंदु जिनके स्थिति सदिश $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ समतलीय हैं।

λ का मान ज्ञात करें ताकि सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ एक समतल में हों, जहाँ $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} + 4\hat{k}$।

यदि सदिश $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} - \lambda\hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ समतलीय हैं, तो λ का मान ज्ञात करें।

सिद्ध करें सदिश $\hat{i} - 3\hat{j} + 2k$, $2\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ असमतलीय सदिश हैं।

[संकेत : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$]

(i) सिद्ध करें बिन्दु $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ तथा $7\vec{a} - \vec{c}$ संरेख हैं।

(ii) सिद्ध करें कि तीन बिन्दु $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ तथा $-7\vec{b} + 10\vec{c}$ संरेख हैं।

λ के किस मान के लिए बिंदु $2\vec{a} + \vec{b}$, $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} - 2\vec{b}$ संरेख हैं ?

सिद्ध कीजिए किसी त्रिभुज की माध्यिकीय संगामी होती हैं और एक-दूसरे को 2 : 1 में काटती हैं।

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. यदि $\vec{a}$ एक अचर सदिश है तो—
   (a) इसकी दिशा स्थिर होगी
   (b) परिणाम स्थिर होगा
   (c) इसकी दिशा एवं परिणाम दोनों स्थिर होंगे
   (d) कोई नहीं

2. शून्य सदिश का—
   (a) प्रारंभिक बिंदु मूलबिंदु है
   (b) अंतिम बिंदु मूलबिंदु पर होता है
   (c) आरंभिक तथा अंतिम बिंदु दोनों मूलबिंदु पर होता है
   (d) कोई भी नहीं।

3. यदि $\vec{a} = \vec{b}$ तो—
   (a) दोनों की दिशा एक होगी
   (b) दोनों के परिमाण व दिशा एक होंगे
   (c) दोनों विपरीत दिशा में होंगे
   (d) कोई भी नहीं।

4. यदि $\vec{OA} = a$ तथा $\vec{OB} = b$ तो—

(a) $\vec{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ (b) $AB = \vec{b} - \vec{a}$ (c) $\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ (d) $\vec{AB} = 0$

5. यदि दो बिंदुओं A तथा B के स्थिति सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हो, तो $\vec{AB}$ का मध्य बिंदु होगा—

(a) $\vec{a} + \vec{b}$ (b) $\vec{a} - \vec{b}$ (c) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ (d) $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

6. यदि बिंदुओं P तथा Q के स्थिति सदिश क्रमशः $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ और $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ हैं, तो सदिश $\vec{PQ}$ का मान—

(a) $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ (b) $6\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ (c) $\hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k}$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (a) (i) $\hat{i}$ (ii) 1 (b) (i) $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ (ii) $4\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$ (iii) $\sqrt{14}$

2. (i) $21\hat{i} - 5\hat{j} - 12\hat{k}$ (ii) $38\hat{i} + \hat{j} - 13\hat{k}$ (iii) $\sqrt{374}$

4. $\frac{3}{\sqrt{61}}, \frac{4}{\sqrt{61}}, \frac{-6}{\sqrt{61}}$

5. दिक् कोज्या (i) $\frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{-7}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}$; इकाई सदिश $= \frac{1}{\sqrt{59}}[\hat{i} - 7\hat{j} + 3\hat{k}]$

(ii) $\frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{29}}$ (iii) $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ (iv) $\hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k}$

6. $\frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{7}$ **13.** $-\frac{23}{7}$ **14.** $\lambda = \frac{26}{25}$ **17.** $\lambda = 2$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (c) **2.** (c) **3.** (b) **4.** (b)
5. (c) **6.** (c)

अध्याय

20

दो सदिशों का अदिश या बिन्दु गुणन

(Scalar or Dot Product of Two Vectors)

20.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछले अध्याय में आपने किसी सदिश को अदिश से गुणा करने के सम्बन्ध में पढ़ा। इस अध्याय में हम दो सदिशों के अदिश गुणन के बारे में जानेंगे।

सदिशों के गुणन दो प्रकार के होते हैं—

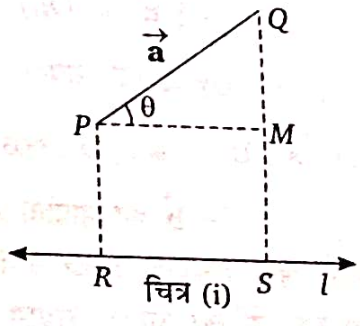
(i) अदिश गुणन या बिंदु गुणन (Scalar Product or Dot Product)

(ii) सदिश गुणन या वज्र गुणन (Vector Product or Cross Product)

इनके बारे में जानने से पहले हम सदिश के प्रक्षेप के बारे में जानेंगे।

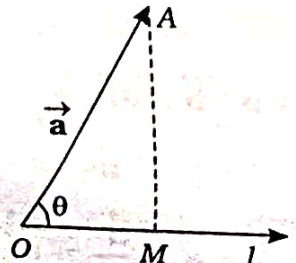
20.2 किसी सदिश का किसी सरल रेखा पर प्रक्षेप (Projection of a Vector on a Line)

माना $\vec{PQ} = \vec{a}$ कोई दिया गया सदिश तथा l कोई सरल रेखा है। यदि बिन्दु P तथा Q से सरल रेखा l पर डाले गए लंब इससे बिन्दु R तथा S पर मिलते हैं [चित्र (i)] तो RS को सरल रेखा l पर सदिश $\vec{a}$ का प्रक्षेप (Projection) कहते हैं।



चित्र (i)

यदि $\vec{OA} = \vec{a}$ तथा सरल रेखा l, O से गुजरती है [चित्र (ii)], तो OM, $\vec{a}$ का l पर प्रक्षेप होगा।



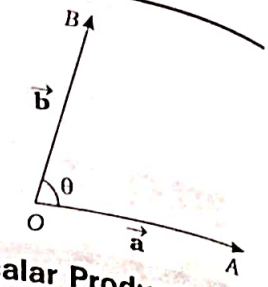
चित्र (ii)

20.3 अदिश या बिन्दु गुणन (Scalar or Dot Product)

माना $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो अशून्य सदिश हैं तथा उनके बीच का कोण θ है, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का अदिश गुणन उनके मापांक तथा उनके बीच के कोण की कोज्या (cosine) के गुणनफल के बराबर होता है तथा इसे $\vec{a} . \vec{b}$ से सूचित करते हैं।

अत: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

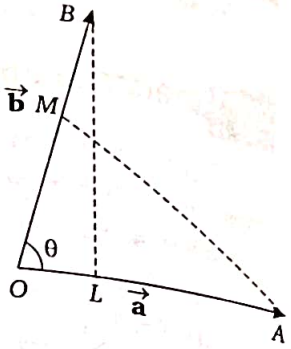
$= a\,b\cos\theta$, जहाँ $0 \le \theta \le \pi$



$\vec{a}\,.\,\vec{b}$ को "$\vec{a}$ dot $\vec{b}$" पढ़ते हैं। यह एक अदिश राशि होती है।

20.4 अदिश गुणन का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Interpretation of Scalar Product)

माना $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ तथा $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ दो सदिश हैं तथा $\overrightarrow{OA}$ एवं $\overrightarrow{OB}$ के बीच का कोण θ है।



$BL \perp OA$ तथा $AM \perp OB$ खींचे।

अब ΔOBL से $\cos\theta = \dfrac{OL}{OB}$

$\therefore \quad OL = OB\cos\theta = \vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप ...(i)

तथा ΔOAM से $\cos\theta = \dfrac{OM}{OA}$

$\therefore \quad OM = OA\cos\theta = \vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप ...(ii)

अब $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\,(OB\cos\theta)$ [$\because\ |\vec{b}| = OB$]

$= |\vec{a}| \times (OL)$ [(i) से]

$= \vec{a}$ का मापांक $\times$ ($\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप)

पुन: $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta = |\vec{b}|\,(OA\cos\theta) = |\vec{b}| \times (OM)$ ...(iii) [(ii) से]

$= \vec{b}$ का मापांक $\times$ $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप ...(iv)

(iii) तथा (iv) से स्पष्ट है कि

दो सदिशों का अदिश गुणन उनमें से एक सदिश के मापांक तथा उसकी दिशा में दूसरे सदिश के प्रक्षेप के गुणनफल के बराबर होता है।

यही इसका ज्यामितीय अर्थ है।

20.4.1 सदिश $\vec{a}$ की दिशा में सदिश $\vec{b}$ का प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\,.\,\vec{b} = \hat{a}\,.\,\vec{b}$

सदिश $\vec{b}$ की दिशा में सदिश $\vec{a}$ का प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}\,.\,\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}\,.\,\hat{b}$

20.5 अदिश गुणन के गुण एवं अन्य परिणाम (Properties and Other Results of Scalar Product)

(i) यह क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law) का पालन करता है। अर्थात्

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$$

प्रमाण : परिभाषा से, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = |\vec{b}||\vec{a}| \cos\theta = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(ii) $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$

जहाँ m अदिश गुणक है।

प्रमाण : $\because m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = m|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = (m|\vec{a}|)|\vec{b}| \cos\theta$

$= |m\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = (m\vec{a}) \cdot \vec{b}$ ...(i)

पुनः $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = m|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = |\vec{a}||m\vec{b}| \cos\theta = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$ ...(ii)

(i) तथा (ii) से $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$

(iii) यदि m और n दो अदिश हों, तो $m\vec{a} \cdot n\vec{b} = mn(\vec{a} \cdot \vec{b})$

प्रमाण : $m\vec{a} \cdot n\vec{b} = |m\vec{a}||n\vec{b}| \cos\theta = m|\vec{a}|n|\vec{b}| \cos\theta = mn|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = mn(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(iv) यदि $\vec{a}$ कोई अशून्य सदिश हो, तो $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

क्योंकि $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0° = |\vec{a}|^2 = a^2$, जहाँ $|\vec{a}| = a$ [समान सदिशों के बीच का कोण $= 0°$]

अतः किसी सदिश का स्वयं के साथ अदिश गुणन उनके मापांक का वर्ग होता है।

(v) दो अशून्य सदिशों के लंब होने का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि उनका अदिश गुणन शून्य होगा

अर्थात् $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

क्योंकि $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90° = 0$ [$\because \cos 90° = 0$]

(vi) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ **एक ही दिशा** में हों या **समानांतर** हों, तो $\theta = 0°$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 0° = |\vec{a}||\vec{b}|$ [$\because \cos 0° = 1$]

(vii) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ **विपरीत दिशा में हों**, तो $\theta = \pi$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos\pi = |\vec{a}||\vec{b}| \times (-1) = -|\vec{a}||\vec{b}|$

अर्थात् $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ जब $\theta = \pi$

(viii) $\vec{a} \cdot (-\vec{b}) = -(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(ix) वितरण नियम (Distributive Law) : यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हों, तो

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(x) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$

प्रमाण : $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot [\vec{b} + (-\vec{c})] = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot (-\vec{c})$ (वितरण नियम से)

$= \vec{a} \cdot \vec{b} + [-(\vec{a} \cdot \vec{c}] = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$

20.6 इकाई सदिशों ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) का अदिश गुणन (Scalar Prouduct of Unit Vectors)

माना OX, OY तथा OZ तीन समकोणीय अक्ष हैं तथा इन अक्षों के अनुदिश इकाई सदिश क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ हैं।

स्पष्टतः $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

अब $\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}| \cdot |\hat{j}| \cos\frac{\pi}{2}$ [$\because \hat{i} \perp \hat{j}$]

$= 1 \times 1 \times 0 = 0$

$\therefore \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$

पुनः $\hat{i} \cdot \hat{k} = |\hat{i}||\hat{k}| \cos\frac{\pi}{2}$ $[\because \hat{i} \perp \hat{k}]$

$= 1 \times 1 \times 0 = 0$

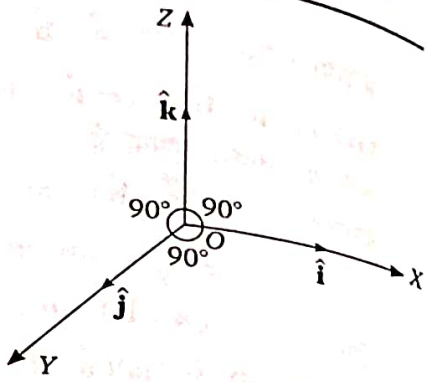
तथा $\hat{j} \cdot \hat{k} = |\hat{j}||\hat{k}| \cos\frac{\pi}{2}$ $[\because \hat{i} \perp \hat{k}]$

$= 1 \times 1 \times 0 = 0$

$\therefore \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

पुनः $\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}| \cos 0° = 1 \times 1 \times 1 = 1$

इसी तरह $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1; \ \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad \therefore \ \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$



20.6.1 आयताकार घटक के पदों में अदिश गुणन (Scalar Product in Terms of Rectangular Components)

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

इस तरह दो सदिशों का अदिश गुणनफल उनके संगत घटकों के गुणनफल के योग के बराबर होता है।

जैसे—यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 = 2 + 6 + 12 = 20$

20.7 दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between two Vectors)

यदि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच कोण θ हो, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \therefore \quad \boxed{\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \ 0 < \theta \le \pi}$$

पुनः यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$; $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_1^2 + b_3^2}$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad \text{अतः } \theta = \cos^{-1}\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

20.8 दो सदिशों के समानांतर तथा लंब होने का प्रतिबंध

(i) **यदि सदिश समानांतर हैं :** मान लिया दो सदिश $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ हैं, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के **समानांतर** होंगे, यदि

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}$$

अर्थात् दोनों सदिशों में $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के गुणांक समान अनुपात में हैं।

(ii) **यदि सदिश लंब हैं :** यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ लंब हैं तो उनके बीच का कोण $\theta = \frac{\pi}{2}$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$

अतः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परस्पर लम्ब होंगे यदि $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

अर्थात् दोनों सदिशों में $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के संगत गुणांकों के गुणनफल का योग शून्य होगा।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्नलिखित का मान बतायें—

(i) $\hat{j} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (ii) $(2 + \hat{i}) \cdot (2 - \hat{i})$

हल : दिया गया गुणन

(i) $\hat{j} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{j} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 + 1 + 0 = 1$ [$\because$ $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ तथा $\hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$]

(ii) $(2 + \hat{i}) \cdot (2 - \hat{i}) = 2 \times 2 - 2\hat{i} + 2\hat{i} - \hat{i} \cdot \hat{i} = 4 - 0 - 1 = 3$ [$\because$ $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$]

उदाहरण 2. यदि $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ तो

(i) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ का मान निकालें। (ii) $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

हल : (i) $\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= (2\hat{i}) \cdot (6\hat{i}) + (2\hat{j}) \cdot (-3\hat{j}) + (-\hat{k}) \cdot (2\hat{k})$

[यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$]

$= 12\hat{i} \cdot \hat{i} - 6\hat{j} \cdot \hat{j} - 2\hat{k} \cdot \hat{k} = 12 \times 1 - 6 \times 1 - 2 \times 1$

$= 12 - 6 - 2 = 12 - 8 = 4$ [$\because$ $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$]

(ii) यहाँ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4$

$|\vec{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{B}| = |6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{4}{3 \times 7} = \frac{4}{21}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right]$

अर्थात् $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{21}$ जहाँ θ सदिशों $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण है।

उदाहरण 3. (i) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करें यदि उनके मापांक क्रमशः 2 तथा 1 हैं तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$

(ii) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ तो इनके बीच का कोण ज्ञात करें।

हल : (i) यहाँ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$; $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$

माना इनके बीच का कोण θ है,

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ **उत्तर**

(ii) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 0 \cdot \hat{k}) = 3 \times 2 + (-2)(3) + 1 \times 0 = 6 - 6 + 0 = 0$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{0}{\sqrt{14}\sqrt{13}} = 0$

अर्थात् $\cos\theta = 0 = \cos\dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$ अत: $\vec{a} \perp \vec{b}$

उदाहरण 4. (i) दिखायें कि $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ और $-3\hat{i} + 3\hat{j}$ परस्पर लंब हैं।

(ii) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो p का मान ज्ञात करें।

(iii) यदि सदिश $a\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ परस्पर लंब हैं तो a का मान ज्ञात करें।

(iv) यदि $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{C} = 3\hat{i} + \hat{j}$ तो t का मान ज्ञात करें जबकि $\vec{A} + t\vec{B}$ सदिश $\vec{C}$ पर लंब है।

(v) p के किस मान के लिए $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$ समानांतर हैं ?

हल : (i) माना $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$; $\vec{B} = -\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{C} = -3\hat{i} + 3\hat{j}$

अब $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \cdot (-\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$

$= -\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot 2\hat{k}$ $[\because \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0]$

$= -1 - 1 + 2$ $[\because \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1]$

$= 0 \qquad \therefore \quad \vec{A} \perp \vec{B}$

पुन: $\vec{B} \cdot \vec{C} = (-\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k})$ ...(1)

$= 3\hat{i} \cdot \hat{i} - 3\hat{j} \cdot \hat{j} - 0 = 3 \times 1 - 3 \times 1 = 3 - 3 = 0 \qquad \therefore \quad \vec{B} \perp \vec{C}$ ...(2)

तथा $\vec{C} \cdot \vec{A} = (-3\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$= -3\hat{i} \cdot \hat{i} + 3\hat{j} \cdot \hat{j} + 0\hat{k} \cdot \hat{k} = -3 + 3 = 0 \qquad \therefore \quad \vec{C} \perp \vec{A}$ ...(3)

(1), (2) तथा (3) से, तीनों सदिश एक-दूसरे के लंबवत हैं।

(ii) **हल :** यहाँ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$; $\vec{b} = 3\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}$

$\because \quad \vec{a} \perp \vec{b} \qquad \therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

अर्थात् $(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$

या $2 \times 3 + 3 \times p + 6 \times 2 = 0$ [गुणन सूत्र से]

अर्थात् $6 + 12 + 3p = 0$

या $3p = -18 \qquad \therefore \quad p = \dfrac{-18}{3} = -6$ उत्तर

(iii) दिये गए सदिश परस्पर लंब हैं, अत: $(a\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow \quad 3a + 8 + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad 3a = -12 \Rightarrow a = -4$

(iv) यहाँ $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{C} = 3\hat{i} + \hat{j}$

$\therefore \quad \vec{A} + t\vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t(-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= (1-t)\hat{i} + (2+t)\hat{j} + (3+t)\hat{k}$ ...(1)

यदि $\vec{A} + t\vec{B}$ सदिश $\vec{C}$ पर लंबवत् है, तो $(\vec{A} + t\vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$

या $\{(1-t)\hat{i} + (2+t)\hat{j} + (3+t)\hat{k}\} \cdot \{(3\hat{i} + 2\hat{j} + 0.\hat{k}\} = 0$

या $(1-t)\times 3 + (2+t)\times 2 + (3+t)\times 0 = 0$

या $3 - 3t + 4 + 2t + 0 = 0$ या $7 - t = 0$ या $t = 7$ उत्तर

(v) यहाँ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समानांतर हैं तो $\frac{3}{1} = \frac{2}{p} = \frac{9}{3}$

$\left[\because \quad a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = 0 \text{ और } b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = 0 \text{ समानांतर हैं तो } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}\right]$

अब $\frac{2}{p} = 3 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{3}$ उत्तर

उदाहरण 5. यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ तो सिद्ध करें कि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लंबवत् हैं।

हल : दिया गया है $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \quad \Rightarrow \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$ [दोनों तरफ वर्ग करने पर]

$\Rightarrow \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$ [वितरण नियम से]

$\Rightarrow \quad |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$\Rightarrow \quad 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore \quad \vec{a} \perp \vec{b}$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6. समतल में कोई सदिश $\vec{a}$ है तो दिखायें $(\vec{a} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{a} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{a} \cdot \hat{k})\hat{k} = \vec{a}$

हल : माना $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2023]**

तो $\vec{a} \cdot \hat{i} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \hat{i} = a_1\hat{i} \cdot \hat{i} + a_2\hat{j} \cdot \hat{i} + a_3\hat{k} \cdot \hat{i}$

$= a_1 \times 1 + 0 + 0$

$= a_1$ $[\because \quad \hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0]$

$\vec{a} \cdot \hat{j} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \hat{j} = a_1\hat{i} \cdot \hat{j} + a_2\hat{j} \cdot \hat{j} + a_3\hat{k} \cdot \hat{j} = 0 + a_2 \times 1 + 0 = a_2$

तथा $\vec{a} \cdot \hat{k} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \hat{k} = a_1\hat{i} \cdot \hat{k} + a_2\hat{j} \cdot \hat{k} + a_3\hat{k} \cdot \hat{k} = 0 + 0 + a_3 \times 1 = a_3$

$\therefore \quad (\vec{a} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{a} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{a} \cdot \hat{k})\hat{k} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = \vec{a}$ [परिकल्पना से] सिद्ध हुआ।

उदाहरण 7. सदिश $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात करें। $\vec{B}$ का $\vec{A}$ पर भी प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए सदिश $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

$|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$ ...(1)

...(2)

तथा $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$

$= 1 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3 = 2 - 1 + 3 = 5 - 1 = 4$

अब $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{B}| \times$ सदिश $\vec{A}$ का सदिश $\vec{B}$ पर प्रक्षेप

$\therefore$ सदिश $\vec{A}$ का सदिश $\vec{B}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$ ...(3) [(2) तथा (3) से]

पुनः सदिश $\vec{B}$ का सदिश $\vec{A}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ [(1) तथा (3) से]

उदाहरण 8. यदि $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ दो मात्रक सदिश हैं, जिनके बीच का कोण θ है, तो सिद्ध करें—

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$$

हल : $\because \quad |\hat{a} - \hat{b}|^2 = (\hat{a} - \hat{b}) \cdot (\hat{a} - \hat{b})$ $[\because \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2]$

$= \hat{a} \cdot \hat{a} - \hat{a} \cdot \hat{b} - \hat{b} \cdot \hat{a} + \hat{b} \cdot \hat{b}$

$= |\hat{a}|^2 - 2\hat{a} \cdot \hat{b} + |\hat{b}|^2$

$= |\hat{a}|^2 - 2|\hat{a}||\hat{b}|\cos\theta + |\hat{b}|^2$ $[\because \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta]$

$= 1 - 2\cos\theta + 1$ $[\because |\hat{a}| = |\hat{b}| = 1]$

$= 2 - 2\cos\theta = 2(1 - \cos\theta) = 2 \times 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

अर्थात् $|\hat{a} - \hat{b}|^2 = 4\sin^2\dfrac{\theta}{2} \Rightarrow \sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{4}|\hat{a} - \hat{b}|^2 \Rightarrow \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 9. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ऐसे सदिश हैं कि $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 3$ और प्रत्येक दूसरे दो के योग के लंबवत् हैं, तब $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ का मान बतायें।

हल : दिया गया है :

$|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4$ तथा $|\vec{c}| = 3$ तथा $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{b} \perp (\vec{c} + \vec{a})$ तथा $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b})$

अब $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$ या $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ...(1)

इसी प्रकार $\vec{b} \perp (\vec{c} + \vec{a}) \Rightarrow \vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$ या $\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$ ...(2)

तथा $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ या $\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ ...(3)

(1) + (2) + (3) से

$$2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \quad \text{...(4)}$$

अब $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}$

$= |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 5^2 + 0 + 4^2 + 3^2$ [(1) तथा (4) से]

$= 25 + 16 + 9 = 50$

$\therefore \quad |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ उत्तर

उदाहरण 10. किन्हीं दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए

(i) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$ (ii) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$

(iii) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

हल : (i) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$ $[\because \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2]$

$= (\vec{a}+\vec{b}).\vec{a} + (\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}$ [वितरण नियम से]

$= \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b}$

अर्थात् $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2$ $[\because \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}]$

(ii) भाग (i) की तरह हल करें।

(iii) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a}+\vec{b}).\vec{a} - (\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}$ [वितरण नियम से]

$= \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ $[\because \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}]$

उदाहरण 11. दिखायें $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$, $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

हल : माना $\vec{AB} = \vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{BC} = \vec{b} = \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$; $\vec{AC} = \vec{c} = 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$

अब $\vec{a}+\vec{b} = (2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) + (\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}) = 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k} = \vec{c}$

अर्थात् $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$ ∴ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ त्रिभुज की भुजायें हैं।

पुनः $\vec{a}.\vec{b} = (2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$

$= 2\times 1 + (-1)(-3) + 1\times(-5) = 2+3-5 = 5-5 = 0$

∴ $\vec{a} \perp \vec{b}$ अर्थात् $\vec{AC} \perp \vec{CB}$

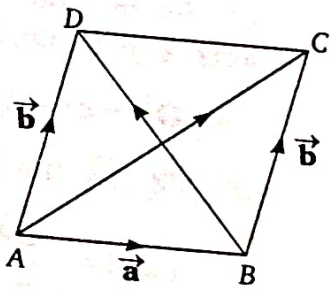
∴ ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण 12. सिद्ध करें समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं।

हल : माना $ABCD$ एक समचतुर्भुज है जिसमें

$\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$ ∴ $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a}+\vec{b}$

$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}-\vec{a}$



अब $\vec{AC}.\vec{BD} = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}-\vec{a})$

$= \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a}$

$= |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$ $[\because \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}]$

∴ विकर्ण $\vec{AC}$ तथा $\vec{BD}$ परस्पर लंब हैं।

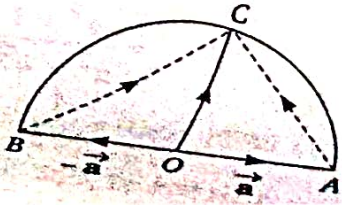
उदाहरण 13. सदिश विधि से सिद्ध करें कि अर्द्धवृत्त में बना कोण एक समकोण होता है। सिद्ध हुआ।

हल : माना अर्द्धवृत्त का केन्द्र O है तथा $\vec{OA} = \vec{a}$ ∴ $\vec{OB} = -\vec{a}$

माना $\vec{OC} = \vec{r}$

तो $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{r}-\vec{a}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{r} - (-\vec{a}). = \vec{r}+\vec{a}$



अब $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} + \vec{a})$

$= \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{r} - \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{r}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$ $[\because |\vec{r}| = |\vec{a}| =$ त्रिज्या]

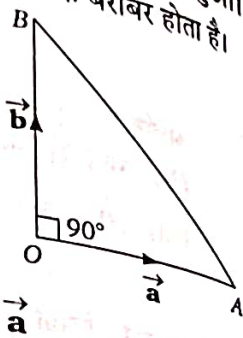
$\therefore \quad \vec{AC} \perp \vec{BC}$

$\therefore \quad \angle BCA =$ अर्द्धवृत का कोण $= 90°$ अर्थात् अर्द्धवृत्त का कोण समकोण है। सिद्ध हुआ।

उदाहरण 14. सदिश विधि से सिद्ध करें कि समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल : माना OAB एक त्रिभुज है जिसमें $\angle AOB = 90°$ तथा AB कर्ण है,

माना O मूल बिंदु है तथा



A का स्थिति सदिश $= \vec{OA} = \vec{a}$ एवं B का स्थिति सदिश $= \vec{OB} = \vec{b}$

$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

अब $\vec{OA} \perp \vec{OB} \quad \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

तथा $|\vec{AB}|^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a}$

$= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2$ $[\because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0]$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

अर्थात् $AB^2 = OA^2 + OB^2$

उदाहरण 14. (i) घन के कर्ण द्वारा घन के किसी कोर के साथ बनने वाले कोण को ज्ञात करें। सिद्ध हुआ

(ii) दिखायें कि किसी घन के दो विकर्णों के बीच का कोण $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ है।

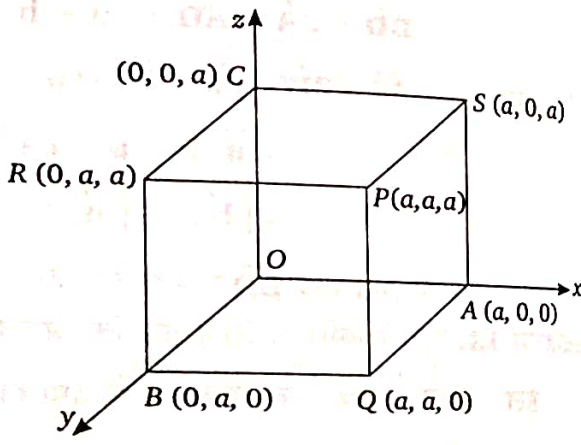
हल : (i) माना कि घन की प्रत्येक भुजा a है तथा $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ क्रमशः X-अक्ष, Y-अक्ष तथा Z-अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश हैं।

OP घन का विकर्ण है।

स्पष्ट है P के नियामक (a, a, a) तथा A के नियामक $(a, 0, 0)$ हैं।

अब $\vec{OP} = a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$ तथा $\vec{OA} = a\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = a\hat{i}$

अब यदि $\vec{OA}$ तथा $\vec{OP}$ के बीच का कोण θ हो, तो



$$\cos\theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OP}}{|\vec{OA}||\vec{OP}|}$$

$$= \frac{a\hat{i} \cdot (a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k})}{\sqrt{a^2 + 0^2 + 0^2}\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}}$$

$$= \frac{a^2\hat{i} \cdot \hat{i} + 0 + 0}{a \times \sqrt{3}\, a} \quad [\because \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0]$$

$$= \frac{a^2 \times 1}{a^2 \times \sqrt{3}}$$

अर्थात् $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) चित्र से स्पष्ट है कि OP, AR, BS तथा CQ दिए गए घन के विकर्ण हैं।

अब $\vec{OP} = a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$

$\vec{AR} = R$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश $= (0\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}) - (a\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) = -a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$

यदि $\vec{OP}$ तथा $\vec{AR}$ के बीच का कोण α हो, तो

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OP}.\vec{AR}}{|\vec{OP}||\vec{AR}|} = \frac{(a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}).(-a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k})}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}\sqrt{(-a)^2 + (a)^2 + (a)^2}} = \frac{-a^2 + a^2 + a^2}{\sqrt{3}\,a \times \sqrt{3}\,a} = \frac{1}{3}$$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{3}$

इसी तरह अन्य विकर्ण-युग्मों के बीच का कोण $= \cos^{-1}\frac{1}{3}$ है।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो अशून्य सदिश हैं, जिनके बीच का कोण θ है, तो

   (i) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ तथा $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

   (ii) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}| \times (\vec{a}$ की दिशा में $\vec{b}$ का प्रक्षेप$) = |\vec{b}| \times (\vec{b}$ की दिशा में $\vec{a}$ का प्रक्षेप$)$

2. (i) $\vec{a}$ की दिशा में $\vec{b}$ का प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b}.\hat{a}$ (ii) $|\vec{b}|$ की दिशा में $\vec{a}$ का प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\hat{b}$

   (iii) $|\vec{b}|$ का $\vec{a}$ की दिशा में वियोजित भाग $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$

   (iv) $|\vec{a}|$ का $\vec{b}$ की दिशा में वियोजित भाग $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$

3. (i) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (क्रम विनिमेय नियम)

   (ii) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (वितरण नियम)

   (iii) $m\vec{a}.\vec{b} = m(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.\,m\vec{b}$, जहाँ m अदिश है

   (iv) $m\vec{a}.n\vec{b} = mn(\vec{a}.\vec{b}) = (m\,n\,\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(mn\,\vec{b})$, जहाँ m, n अदिश हैं

4. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

5. (i) $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$, जहाँ $|\vec{a}| = a$ (ii) $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

   (iii) $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

6. यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, तो

   (i) $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (ii) $\cos\theta = \dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

प्रश्नावली 20.1

1. निम्नलिखित के मान बतायें—

(i) $2\hat{i} \cdot (3\hat{j} + 4\hat{k})$ (ii) $(\hat{i} - 4\hat{k}) \cdot (\hat{j} + 5\hat{k})$ (iii) $(2 + \hat{i}) \cdot (2 - \hat{i})$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ का मान ज्ञात करें, यदि

(i) $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2024]

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ (iii) $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

(iv) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = -3\hat{i} + 3\hat{j}$ (v) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

3. (i) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

(ii) सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

(iii) सदिशों $\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ के मध्य बने कोण का मान ज्ञात करें।

(iv) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ के मध्य बने कोण का मान ज्ञात करें।

(v) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ के मध्य बने कोण का मान ज्ञात करें।

4. (i) सिद्ध करें कि सदिश $\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k}$ परस्पर लंब हैं।

(ii) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तो दिखायें $\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} - \vec{b}$ परस्पर लंब हैं।

(iii) यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ तो सिद्ध करें कि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लंब हैं।

(iv) दिखाइये सदिश $\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ और $-3\hat{i} + 3\hat{j}$ परस्पर लंब हैं।

(v) सिद्ध करें सदिश $-4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ परस्पर लंब है।

5. (i) यदि सदिश $a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-\hat{i} + 5\hat{j} + a\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो a का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि $\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{B} = 2a\hat{i} + a\hat{j} - 4\hat{k}$ तो a का वह मान प्राप्त करें जिसके लिए $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर लंबवत् हैं।

(iii) अदिश x का मान ज्ञात करें ताकि सदिश $x\hat{i} - 2x\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ परस्पर लंबवत् हों।

(iv) a का वह मान ज्ञात करें जिसके लिए $2\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $a\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ परस्पर समानांतर हैं।

(v) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो p का मान ज्ञात करें।

(vi) यदि $a\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो a का मान ज्ञात करें।

(vii) p के किस मान के लिए $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$ समानांतर है।

(viii) यदि सदिश $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ और $a\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ पर लंब हैं, तो a का मान ज्ञात करें।

(ix) यदि सदिश $\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो λ का मान ज्ञात करें।

(x) सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$ परस्पर लंब हैं तो p का मान ज्ञात करें।

6. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

7. यदि $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ तो सिद्ध कीजिए कि या तो $\vec{a} = 0$ अथवा $\vec{b} = \vec{c}$ अथवा $\vec{a}$ और $\vec{b} - \vec{c}$ परस्पर लंबवत् हैं।

8. यदि $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ दो मात्रक सदिश (unit vectors) हैं और उनके बीच का कोण θ है तो सिद्ध करें—

(i) $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} + \hat{b}|$ (ii) $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$ (iii) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|\hat{a} - \hat{b}|}{|\hat{a} + \hat{b}|}$

9. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश हैं, जिनके मापांक a तथा b हैं तो सिद्ध करें कि $\left(\frac{\vec{a}}{a^2} - \frac{\vec{b}}{b^2}\right)^2 = \left(\frac{\vec{a} - \vec{b}}{ab}\right)^2$

10. दिखायें कि $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

11. दिखायें कि बिंदु $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j}$ समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

12. सदिश विधि से सिद्ध करें—
(i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (ii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$

13. सदिश विधि से सिद्ध करें—
(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. दो सदिशों $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - \hat{k}$ के बीच का कोण—
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

2. सदिश $m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $-\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ एक-दूसरे के लबवत् हैं, तो m का मान होगा—
(a) 4 (b) 1 (c) 0 (d) कोई नहीं

3. यदि सदिश $2\hat{i} + m\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो m का मान होगा—
(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) कोई नहीं

4. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $\cos\theta$ का मान है—
(a) 4/21 (b) 2/21 (c) 1/2 (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (i) 0 (ii) – 20 (iii) 3 **2.** (i) 3 (ii) – 7 (iii) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (iv) 0 (v) 7

3. (i) $\cos^{-1}\frac{4}{21}$ (ii) $\cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{41}}$ (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) $\cos^{-1}\frac{5}{7\sqrt{3}}$

5. (i) – 5 (ii) 2, – 1 (iii) $x = 1$ (iv) $\frac{4}{3}$ (v) – 6 (vi) – 4

(vii) $p = \frac{2}{3}$ (viii) $\frac{7}{3}$ (ix) 1 (x) –15 **6.** $\frac{19}{9}$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (d) **2.** (b) **3.** (b) **4.** (a)

□□□

अध्याय

21

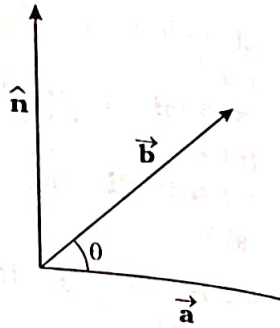
सदिश या वज्र गुणन

(Vector or Cross Produc

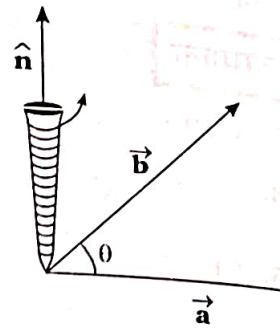
21.1 सदिश (या वज्र) गुणन

परिभाषा : यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो अशून्य एवं असमानांतर सदिश हों, तो सदिश गुणन $\vec{a} \times \vec{b}$ ($\vec{a}$ क्रॉस $\vec{b}$) निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है—

$$\therefore \quad \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n} = ab \sin\theta\, \hat{n}}$$



जहाँ a तथा b क्रमश: सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मापांक हैं, θ उनके बीच का कोण है तथा $\hat{n}$ इकाई सदिश है जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के समतल पर अभिलंब हैं। $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\hat{n}$ की दिशायें दक्षिणावर्ती तंत्र (Right Handed System) बनाती हैं। स्पष्ट है कि इस सदिश की दिशा दोनों सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के भी लंबवत् होगी।



टिप्पणी : (i) चूँकि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच '×' (Cross) का प्रयोग किया गया है अत: इसे वज्र गुणन (cross product) भी कहा जाता है।

(ii) दक्षिणावर्ती तंत्र (Right Handed System) का अर्थ यह है कि यदि $\vec{a}$ को $\vec{b}$ की ओर θ कोण से घुमाया जाए तो पेंच (Screw) $\hat{n}$ की ओर उठेगा।

इसे **दक्षिणावर्ती पेंच नियम** (Right Handed Screw Rule) कहते हैं। $\hat{n}$ का मान घड़ी की दिशा (clockwise direction) में –ve तथा घड़ी की विपरीत दिशा (anticlockwise direction + ve लेते हैं।

21.2 दो सदिशों के सदिश गुणन का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Vector Product

मान लिया $\vec{OA} = \vec{a}$; $\vec{OB} = \vec{b}$ समानांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजायें हैं और $\angle AOB = \theta$,

तो $\quad \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{OA}||\vec{OB}| \sin\theta\, \hat{n}$

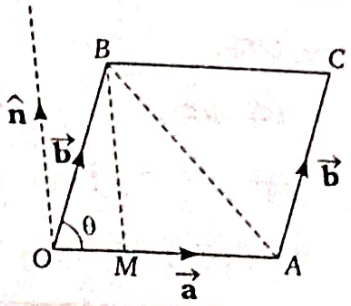
$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = OA \,.\, OB \sin\theta \qquad [\because\ |\vec{OA}| = OA, |\vec{OB}| = OB]$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} OA \,.\, OB \sin\theta\right) = 2 \times \frac{1}{2} OA \,.\, BM \qquad \left[\because\ \frac{BM}{OB} = \sin\theta\right]$$

= समानांतर चतुर्भुज $OACB$ का क्षेत्रफल

अत: $\vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{a} \times \vec{b}$ = स० च० $OACB$ का सदिश क्षेत्रफल

अत: $\vec{a} \times \vec{b}$ उस सदिश को निरूपित करता है जिसका परिमाण उस समानांतर चतुर्भुज के सदिश क्षेत्रफल के बराबर होता है जिसकी दो आसन्न भुजायें $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ से दी जाती हैं।

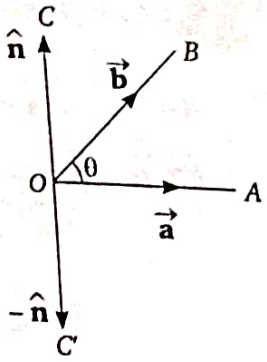


21.3 गुण तथा अन्य परिणाम (Properties and Other Results)

(i) दो सदिशों का सदिश गुणन क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law) का पालन नहीं करता।

अर्थात् यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो अशून्य असमानान्तर सदिश हैं, तो

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$



प्रमाण : परिभाषा से $\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\theta\, \hat{n}$ ...(i)

तथा $\vec{b} \times \vec{a} = (ba \sin\theta)(-\hat{n}) = -ab \sin\theta\, \hat{n}$ ...(ii)

$\therefore$ $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ [(i) तथा (ii) से]

किन्तु (i) तथा (ii) से यह भी स्पष्ट है कि

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})}$$

(ii) यदि m कोई अदिश राशि है तो $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$

(iii) सदिश गुणन वितरण नियम का पालन करता है, अर्थात्

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

तथा $$\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}$$

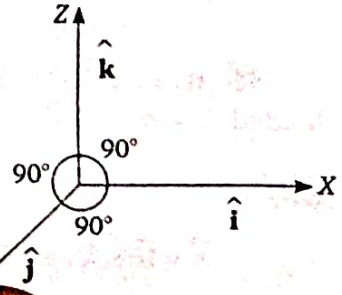
(iv) दो अशून्य सदिश समानांतर या संरेख (Collinear) होंगे यदि और केवल यदि (iff) उनका सदिश गुणन शून्य हो, अर्थात् यदि $\theta = 0$ या $180°$ तो $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ [$\because \sin 0 = 0, \sin\pi = 0$]

(v) दो समान सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य होता है, अर्थात् $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

प्रमाण : $\vec{a} \times \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \sin 0 \,.\, \hat{n} = a \times a \times 0 \times \hat{n} = 0$

21.4 परस्पर लंब इकाई सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ का सदिश गुणन (Vector Product of Unit Vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$ and $\hat{k}$)

(i) हम जानते हैं कि $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ परस्पर लंबवत् इकाई सदिश हैं। अत: इनमें से किन्हीं दो सदिशों से होकर खींचा गया समतल, तीसरे सदिश के लंबवत् होगा। अर्थात् $\hat{i}$ और $\hat{j}$ से होकर खींचा गया समतल तीसरे सदिश $\hat{k}$ के लम्बवत् होगा। इसलिए सदिश $\hat{i} \times \hat{j}$ की अभिदिशा $\hat{k}$ के अनुदिश होगी।

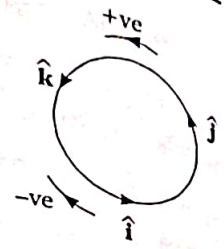


$$\therefore \quad \hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}| \sin\frac{\pi}{2}\hat{k} = 1 \times 1 \times 1 \times \hat{k} = \hat{k}$$

अर्थात् $\boxed{\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}}$

इसी तरह $\boxed{\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i};\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}}$

और $\boxed{\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k};\ \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i};\ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}}$



इन परिणामों को दिए गए चित्र के माध्यम से याद रखा जा सकता है।

(ii) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$ $[\because \vec{a} \times \vec{a} = 0]$

21.5 घटक के पदों में सारणिक रूप में सदिश गुणन (Vector Product in Terms of its Components in Determinant Form)

माना $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

तब $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$= a_1b_1\ (\hat{i} \times \hat{i}) + a_1b_2\ (\hat{i} \times \hat{j}) + a_1b_3\ (\hat{i} \times \hat{k}) + (a_2b_1\ (\hat{j} \times \hat{i})$
$+ a_2b_2\ \hat{j} \times \hat{j} + a_2b_3\hat{j} \times \hat{k} + a_3b_1\hat{k} \times \hat{i} + a_3b_2\hat{k} \times \hat{j} + a_3b_3\hat{k} \times \hat{k}$
$= a_1b_1\ (0) + a_1b_2\ (\hat{k}) + a_1b_3\ (-\hat{j}) + a_2b_1\ (-\hat{k}) + a_2b_2\ (0) + a_2b_3\ (\hat{i}) + a_3b_1\ (\hat{j})$
$+ a_3b_2\ (-\hat{i}) + a_3b_3\ (0)$
$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ [दायें पक्ष को सारणिक के रूप में रखने पर]

21.6 दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between Two Vectors)

माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है, तो $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\,\hat{n}$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ $\Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1} = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

21.6.1 दो दिए गए सदिशों के तल पर लंबवत् सदिश (Vector Normal to the Plane of Two Given Vectors)

(i) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो अशून्य तथा असमानांतर सदिश हैं तो

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\,\hat{n} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}}$

जहाँ $\hat{n}$ इकाई सदिश है जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के समतल पर लंबवत् है तथा $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ दक्षिणावर्त क्रम (Right Handed System) में हैं।

नोट :

• (i) $-\dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ भी $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के समतल पर लंबवत् इकाई सदिश है।

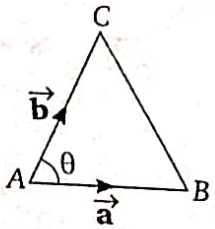
λ मापांक का सदिश जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के समतल पर लंबवत् है, का मान

$$\pm \frac{\lambda(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$ से दिया जाता है।

अन्य महत्वपूर्ण परिणाम

(i) ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$, जहाँ $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$ [चित्र (i)]

(ii) समानांतर चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|$, जहाँ $\vec{AC} = \vec{d}_1$ तथा $\vec{BD} = \vec{d}_2$ जिसके विकर्ण d_1 तथा d_2 हैं। [चित्र (ii)]



चित्र (i)

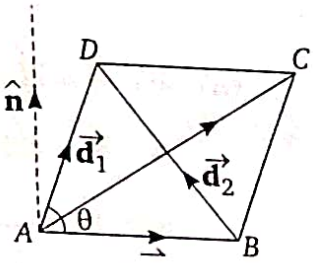
(iii) यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ किसी त्रिभुज के शीर्ष के स्थिति सदिश हों तो ΔABC का सदिश क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}]$$

(iv) **तीन बिंदुओं के संरेख (Collinear) होने का प्रतिबंध :** यदि तीन बिंदु होंगे तो उनसे बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

अर्थात् $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$

यह तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबंध है।



चित्र (ii)

साधित उदाहरण (Solved Examples)

रण 1. यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\vec{b} = 7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ तो $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ तथा उसके मापांक का मान निकालें।

हल : यहाँ $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$; $\vec{b} = 7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{a} + \vec{b} = (3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 10\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

तथा $\vec{a} - \vec{b} = (3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) - (7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$= 3\hat{i} - 7\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{j} - 5\hat{k} - 6\hat{k} = -4\hat{i} + 7\hat{j} - 11\hat{k}$

$\therefore \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = (10\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (-4\hat{i} + 7\hat{j} - 11\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 10 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & -11 \end{vmatrix} = \hat{i}(-11 - 7) - \hat{j}(-110 + 4) + \hat{k}(70 + 4)$$

$$= -18\hat{i} + 106\hat{j} + 74\hat{k}$$

$\therefore \quad |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = \sqrt{(-18)^2 + (106)^2 + (74)^2} = \sqrt{17036}$

अत: $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = -18\hat{i} + 106\hat{j} + 74\hat{k}$; $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = \sqrt{17036}$ **उत्तर**

हरण 2. (i) सदिश $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ के लंबवत् इकाई सदिश का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $\vec{A} \cdot \vec{B}$ तथा $\vec{A} \times \vec{B}$ का मान ज्ञात करें। एक इकाई सदिश ज्ञात करें जो $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ दोनों पर लंब हो।
इनके बीच के कोण का sine तथा cosine प्राप्त करें।

(iii) परिमाण 9 का वह सदिश प्राप्त करें जो $4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ दोनों पर लंब हो।

हल : (i) माना $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

तो $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i(-1+1) - \hat{j}(2+1) + \hat{k}(2+1)$$

$$= \hat{i}(0) - 3\hat{j} + 3\hat{k} = -3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \vec{a} \text{ तथा } \vec{b} \text{ पर लंब इकाई सदिश } \hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{-3\hat{j} + 3\hat{k}}{3\sqrt{2}} = \frac{3(-\hat{j} + \hat{k})}{3\sqrt{2}} = \frac{-\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

(ii) यहाँ $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 2 \times 6 + 2 \times (-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \times (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-3) - \hat{j}(4+6) + \hat{k}(-6-12) = \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-18)^2} = \sqrt{1 + 100 + 324} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$$

माना $\hat{n}$ वह इकाई सदिश है जो $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ पर लंब है, तो $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \dfrac{\hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}}{5\sqrt{17}}$

पुनः $$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण θ हो तो

$$\sin\theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{5\sqrt{17}}{3 \times 7} = \frac{5\sqrt{17}}{21} \quad \text{तथा} \quad \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{4}{3 \times 7} = \frac{4}{21}$$

(iii) माना $\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तो $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (2-3)\hat{i} - (-8+6)\hat{j} + (4-2)\hat{k} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

तथा $$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

अब सूत्र से λ मापांक का सदिश जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के तल पर लंब हो $= \frac{\lambda(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$; यहाँ $\lambda = 9$

$\therefore$ अभीष्ट सदिश $= 9\left\{\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\right\} = \frac{9}{3}(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = -3\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k}$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि किसी समानांतर चतुर्भुज के विकर्ण $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ हैं, तो समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालें।

हल : माना $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (4-6)\hat{i} - (12+2)\hat{j} + (-9-1)\hat{k} = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

तथा $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2} = \sqrt{300}$

$\therefore$ समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{300}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 4. उस समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी आसन्न भुजायें $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ हैं।

हल : माना $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तो

सामानान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल $= \vec{a} \times \vec{b}$

$$= (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(2+6) - \hat{j}(1-9) + \hat{k}(-2-6) = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$$

$\therefore$ समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{8^2 + 8^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 5. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके शीर्ष $A\,(3, -1, 2)$, $B\,(1, -1, -3)$ तथा $C\,(4, -3, 1)$ हैं।

हल : माना $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ बिन्दुओं A, B तथा C के स्थिति सदिश हैं, तो $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$

अब ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

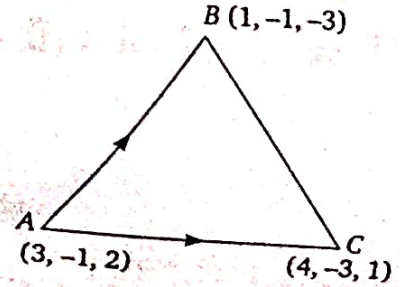
अत: $\vec{AB} = B$ का स्थिति सदिश $- A$ का स्थिति सदिश

$$= \vec{b} - \vec{a} = (\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) - (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= -2\hat{i} + 0\hat{j} - 5\hat{k} = -2\hat{i} - 5\hat{k}$$

तथा $\vec{AC} = C$ का स्थिति सदिश $- A$ का स्थिति सदिश

$$= \vec{c} - \vec{a} = (4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$



$$\therefore \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-10) - \hat{j}(2+5) + \hat{k}(4-0) = -10\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-10)^2 + (-7)^2 + (4)^2} = \sqrt{100 + 49 + 16} = \sqrt{165}$$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\sqrt{165}$ वर्ग इकाई

नोट :

- इसे $\Delta = \frac{1}{2}|[\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}]|$ से भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण 6. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन ऐसे सदिश हैं कि $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ तथा $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{a} \neq 0$ तो दिखायें $\vec{b} = \vec{c}$.

हल : यहाँ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ तथा $\vec{a} \neq 0$

$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{b} - \vec{c} = 0$ या $\vec{a} \perp \vec{b} - \vec{c} \qquad [\because \vec{a} \neq 0]$

$\Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{c}$ या $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$

पुनः $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ तथा $\vec{a} \neq 0$ ...(i)

$\Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{b} - \vec{c} = 0$ या $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c}) \qquad [\because \vec{a} \neq 0]$

$\Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{c}$ या $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ ...(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\vec{b} = \vec{c}$ क्योंकि $\vec{a}$ एक साथ $\vec{b} - \vec{c}$ के समानांतर तथा लंब नहीं हो सकता।

उदाहरण 7. यदि $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ तथा $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$, तो दिखायें $\vec{a} - \vec{d}$ तथा $\vec{b} - \vec{c}$ समानांतर सदिश हैं, जहाँ $\vec{a} \neq \vec{d}$ तथा $\vec{b} \neq \vec{c}$

हल : हम जानते हैं कि दो सदिश समानांतर होंगे यदि उनका सदिश गुणन शून्य होगा।

दिया गया है : $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ तथा $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$ ...(1)

जहाँ $\vec{a} \neq \vec{d}, \vec{b} \neq \vec{c}$

अब $(\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{d} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{c}$

$= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d} - \vec{c} \times \vec{d} \qquad [\because \vec{r_1} \times \vec{r_2} = -\vec{r_2} \times \vec{r_1}]$

$= \vec{c} \times \vec{d} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{c} - \vec{c} \times \vec{d}$

$= 0 \qquad$ [(1) से]

किन्तु $\vec{a} - \vec{d} = 0$ तथा $\vec{b} - \vec{c} = 0$ सम्भव नहीं। $[\because \vec{a} \neq \vec{d}, \vec{b} \neq \vec{c}]$

$\therefore \quad (\vec{a} - \vec{d}) \parallel (\vec{b} - \vec{c})$

उदाहरण 8. सिद्ध करें तीन बिन्दु A, B तथा C संरेख होंगे यदि और केवल यदि $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$, जहाँ $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ क्रमशः बिन्दु A, B तथा C के स्थिति सदिश हैं।

हल : A, B तथा C संरेख हैं $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ तथा $\vec{BC}$ समान्तर सदिश हैं $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} \times \vec{BC} = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ $[\because \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}; \vec{BC} = \vec{c} - \vec{a}]$

$\Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c} - (\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{b} = 0$ $\Leftrightarrow (\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) - (0 - \vec{a} \times \vec{b}) = 0$ $[\because \vec{a} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{a}]$

$\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$

उदाहरण 9. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए सिद्ध करें :

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix}$$

अथवा $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

हल : $\because \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{n}$ $\therefore$ $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\theta$

$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta$

$= |\vec{a}|^2 \times |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta)^2 = |\vec{a}|^2 \times |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

अर्थात् $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ सिद्ध हुआ।

पुनः $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & |\vec{b}|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix}$ सिद्ध हुआ।

इस तरह $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ सिद्ध हुआ।

टिप्पणी : यह **लैगरांज तत्समक (Lagrange's Indentity)** के नाम से जाना जाता है तथा सूत्र के रूप में प्रयुक्त होता है।

उदाहरण 10. यदि $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान बतायें।

हल : सूत्र से $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ $\therefore$ $(12)^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 10^2 \times 2^2$

या $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 400 - 144 = 256$ $\therefore$ $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{256} = 16$ उत्तर

उदाहरण 11. किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लिए सिद्ध करें कि

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

हल : दिया गया व्यंजक $= \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$

$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$ [वितरण नियम से]

$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}$ $[\because \vec{r_1} \times \vec{r_2} = -\vec{r_2} \times \vec{r_1}]$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 12. यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन ऐसे सदिश हों जिनके लिए $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ तो सिद्ध करें कि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

हल : दिया गया है, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times 0$ $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}=0$ $[\because \vec{a}\times\vec{a}=0,\ \vec{a}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{a}]$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$

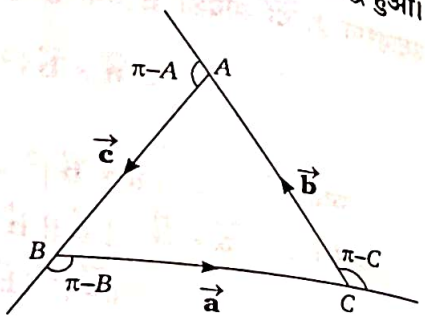
इसी तरह $\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\times 0$ $\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ...(i)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$ ...(ii)

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 13. सदिश विधि से सिद्ध करें :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



हल : मान लिया ΔABC में $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$ तथा $\vec{AC}=\vec{c}$

तो सदिश योग नियम से $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=0$

अर्थात् $\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}=0$ $\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$

$\Rightarrow 0+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}=0$ $[\because \vec{a}\times\vec{a}=0,\ \vec{a}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{a}]$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$

इसी प्रकार $\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$ $\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ...(1)

$\therefore$ (1) तथा (2) से ...(2)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{c}\times\vec{a}|$$

$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi-C)=|\vec{b}||\vec{c}|\sin(\pi-A)=|\vec{c}||\vec{a}|\sin(\pi-B)$

$\Rightarrow ab\sin C=bc\sin A=ca\sin B$ $[|\vec{a}|=a, |\vec{b}|=b, |\vec{c}|=c$ लेने पर]

$\Rightarrow \dfrac{ab\sin C}{abc}=\dfrac{bc\sin A}{abc}=\dfrac{ca\sin B}{abc}$ $\Rightarrow \dfrac{\sin C}{c}=\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 14. सिद्ध करें :

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$$

हल : माना $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

तो $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})=\hat{i}\times[a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}]\times\hat{i}$

$=\hat{i}\times[a_1\hat{i}\times\hat{i}+a_2\hat{j}\times\hat{i}+a_3\hat{k}\times\hat{i}]$

$=\hat{i}\times[a_1\ (0)+a_2\ (-\hat{k})+a_3\ (\hat{j})]$ $[\because \hat{i}\times\hat{i}=0,\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}]$

$$= \hat{i} \times [a_3\hat{j} - a_2\hat{k}] = a_3\hat{i} \times \hat{j} - a_2\hat{i} \times \hat{k} = a_3\hat{k} + a_2\hat{j} \quad \ldots(1)$$

इसी तरह $\hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) = a_1\hat{i} + a_3\hat{k}$ $\ldots(2)$

$\hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = a_2\hat{j} + a_1\hat{i}$ $\ldots(3)$

तथा

(1) + (2) + (3) से

$$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j}(\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k}(\vec{a} + \hat{k}) = a_3\hat{k} + a_2\hat{j} + a_1\hat{i} + a_3\hat{k} + a_2\hat{j} + a_1\hat{i}$$

$$= 2(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = 2\vec{a}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 15. यदि $\vec{V} = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ तो सिद्ध करें :

(i) $\vec{V} \cdot \vec{V} = 1$ (ii) $\vec{V} \times \vec{V} = 0$

हल : (i) $\vec{V} = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{k}$

$$\therefore \vec{V} \cdot \vec{V} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{k}\right)$$

$$\cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\times \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \times \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$ सिद्ध हुआ।

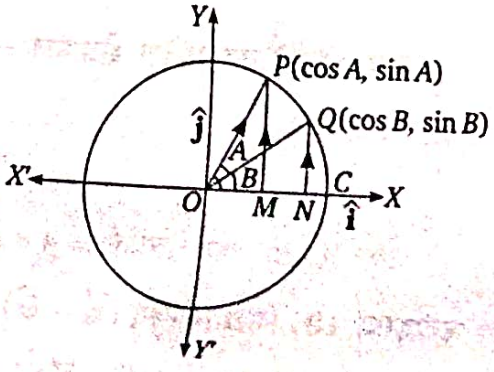
तथा $\vec{V} \times \vec{V} = 0$ [समान सदिशों का सदिश गुणन शून्य होता है।]

ज्यामिति तथा त्रिकोणमिति पर आधारित प्रश्न :

उदाहरण 16. सदिश विधि से सिद्ध करें :

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

हल : चित्र में इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचा गया है जिसका केन्द्र O है। माना P तथा Q वृत्त की परिधि पर दो बिंदु हैं।



P तथा Q से वृत्त की त्रिज्या OC पर लंब PM तथा QN डाले गए हैं।

माना केन्द्र बिंदु O मूल बिंदु OX, x-अक्ष एवं OY, y-अक्ष हैं; चित्र में

माना $\angle POX = A$ तथा $\angle QOX = B$ तो $\angle POQ = A - B$

अब $\vec{OQ} \times \vec{OP} = |\vec{OQ}||\vec{OP}| \sin(A-B)\,\hat{n}$

$= 1 \times 1 \times \sin(A-B)\,\hat{n}$ [$\because |\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = 1$ = त्रिज्या]

$\therefore \quad |\vec{OQ} \times \vec{OP}| = \sin(A-B)$ [$\because |\hat{n}| = 1$]

$\vec{OQ} = \vec{ON} + \vec{NQ} = ON\,\hat{i} + NQ\,\hat{j} = \cos B\,\hat{i} + \sin B\,\hat{j}$ ...(1)

$\left[\because \cos B = \frac{ON}{OQ} = \frac{ON}{1};\ \sin B = \frac{QN}{OQ} = \frac{QN}{1}\right]$

तथा $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = OM\,\hat{i} + MP\,\hat{j} = \cos A\,\hat{i} + \sin A\,\hat{j}$ $\left[\because \cos A = \frac{OM}{1},\ \sin A = \frac{PM}{1}\right]$

$\therefore \quad \vec{OQ} \times \vec{OP} = (\cos B\,\hat{i} + \sin B\,\hat{j}) \times (\cos A\,\hat{i} + \sin A\,\hat{j})$

$= \cos A \cos B\,\hat{i} \times \hat{i} + \cos B \sin A\,\hat{i} \times \hat{j} + \sin B \cos A\,\hat{j} \times \hat{i} + \sin B \sin A\,\hat{j} \times \hat{j}$

$= 0 + \cos B \sin A\,\hat{k} - \sin B \cos A\,\hat{k} + 0$ [$\because \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = 0$]

$= (\sin A \cos B - \cos A \sin B)\,\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{OQ} \times \vec{OP}| = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

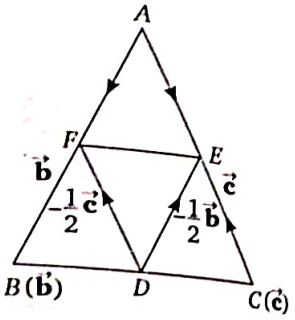
$\therefore$ (1) तथा (2) से $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ ...(2)

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 17. यदि D, E तथा F ΔABC में क्रमशः भुजा BC, CA तथा AB के मध्य बिंदु हैं, तो सिद्ध करें

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta DEF) = \frac{1}{4} \text{ क्षेत्रफल } (\Delta ABC)$$

हल : माना ΔABC में शीर्ष A के सापेक्ष B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं *i.e.*, $AB = \vec{b}$, $AC = \vec{c}$ तथा D, E तथा F क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु हैं



$\therefore \quad D$ का स्थिति सदिश $= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$;

E का स्थिति सदिश $= \frac{1}{2}\vec{c}$; F का स्थिति सदिश $= \frac{1}{2}\vec{b}$

तथा $DE \parallel BA$, $DF \parallel CA$ तथा $DE = \frac{1}{2}BA$, $DF = \frac{1}{2}CA$ [ज्यामिति से]

$\therefore \quad \vec{DE} = -\frac{1}{2}\vec{b} \qquad \vec{DF} = -\frac{1}{2}\vec{c}$

अब ΔDEF का सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \vec{DE} \times \vec{DF} = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(\vec{b} \times \vec{c})\right]$

$= \frac{1}{4}\Delta ABC$ का सदिश क्षेत्रफल

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= 4 \times \Delta DEF$ का क्षेत्रफल सिद्ध हुआ।

उदाहरण 18. सिद्ध कीजिए $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}$ तथा इसकी ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

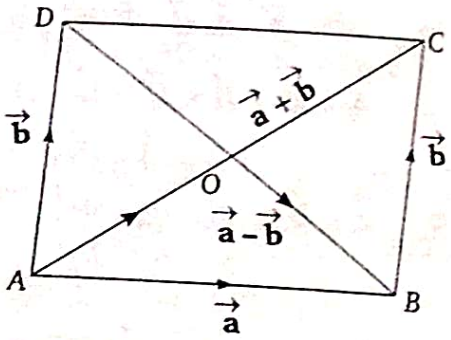
हल : बायाँ पक्ष $= (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}$

$$= 0 + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} - 0 \qquad \left[\because \vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0,\ \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}\right]$$

$$= 2\vec{a} \times \vec{b} \qquad \ldots(1)$$

ज्यामितीय व्याख्या :

माना $ABCD$ एक समानांतर चतुर्भुज है तथा उसके विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं।



माना $\vec{AB} = \vec{a}$ तथा $\vec{AD} = \vec{b}$

$\therefore$ ΔABC से $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\therefore$ ΔABD से $\vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AB}$

$\Rightarrow$ $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}$

अब $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow \vec{DB} \times \vec{AC} = 2(\vec{AB} \times \vec{AD})$

अतः किसी समानांतर चतुर्भुज के विकर्णों द्वारा बने समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उस समानांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का दूना होता है।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}$, जहाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है और $\hat{n}$ दोनों सदिशों तथा उनके समतल पर लंब इकाई सदिश है।

2. $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta$, जहाँ $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b$

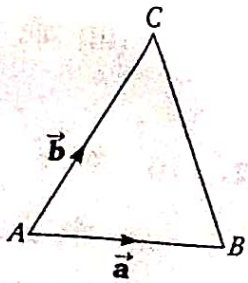
3. $\sin\theta = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

4. $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लंब इकाई सदिश $\hat{n} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

5. (i) Δ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

   (ii) $\Delta = \dfrac{1}{2}|(\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A})|$,

   जहाँ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं।



6. (i) समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}|$, जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समानान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजायें हैं,

   (ii) समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}|\vec{d_1} \times \vec{d_2}|$,

   जहाँ $\vec{d_1}$ तथा $\vec{d_2}$ समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण हैं।

7. (a) यदि $\vec{a} \parallel \vec{b}$ तो (i) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

(ii) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$, जहाँ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ या $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ संरेखीय हैं, जहाँ $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$

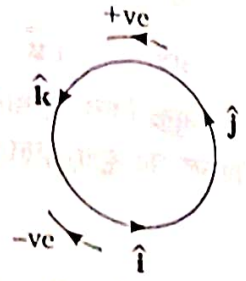
8. यदि $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ किन्हीं तीन बिन्दुओं के स्थिति सदिश हों, तो तीनों बिंदु समरेखीय होंगे यदि $\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A} = 0$

9. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, जहाँ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

10. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ तथा $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ अर्थात् सदिश गुणन क्रम-विनिमेय नियम का पालन नहीं करता।

11. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ [वितरण नियम]

12. (i) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}; \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}; \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$
(ii) $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}; \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}; \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$
(iii) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$



13. $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ [लैगरांज आइडेंटिटी]

प्रश्नावली 21.1

1. (a) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ तो निम्नलिखित का मान निकालें :

(i) $\vec{a} \times \vec{b}$ (ii) $\vec{b} \times \vec{a}$ (iii) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

(b) (i) यदि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

(iii) यदि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]

2. (i) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान बतायें।

(ii) यदि $\vec{a} = (\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} + \hat{3k})$ तो $|\vec{a}|$ का मान बतायें।

(iii) यदि $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान बतायें।

3. (i) यदि $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तो वह इकाई सदिश ज्ञात करें जो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ पर लम्ब है।

(ii) उस इकाई सदिश को ज्ञात करें जो सदिश $\hat{i} - 2\hat{j}$ तथा $3\hat{j} - \hat{k}$ पर लंब है।

4. यदि $\vec{\alpha} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{\beta} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{\gamma} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तब $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma})$ का मान बतायें।

5. (i) दिखाइए कि सदिशों $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ और $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ के मध्यस्थ कोण का sine $(2/\sqrt{7})$ है।
(ii) सदिशों $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ के बीच के कोण की ज्या (sine) ज्ञात कीजिए।
[उ० प्र० डिप्लोमा 2018]

6. (i) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{c} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तो दिखायें कि $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ परस्पर लंब हैं। $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{a}$ तथा $(\vec{a} \times \vec{b}) . (\vec{c} \times \vec{a})$ का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ सिद्ध कीजिए $\vec{a} \times \vec{b}$ सदिश $\vec{c}$ पर लंब है।

(iii) यदि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ तो सिद्ध कीजिए $\vec{a} \times \vec{b}$ सदिश $\vec{c}$ पर लंब है।

7. यदि $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$ और $\vec{a} \times \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।
[उ० प्र० डिप्लोमा 2022]

[संकेत : $\sin 0 = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$]

8. यदि $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = 0$ तो λ तथा μ का मान ज्ञात करें।

9. यदि सदिश जिसका परिमाण 49 है, $2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ पर लंब है, तो सदिश प्राप्त करें।

10. (i) यदि किसी समानांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजायें $3\hat{i} + 4\hat{j}$ तथा $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ हों तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।
(ii) उस समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी आसन्न भुजायें $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ हैं।

11. उस समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके विकर्ण
(i) $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ हैं। (ii) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$

12. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी दो आसन्न भुजायें सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $10\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ से दी जाती है।

13. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ तथा $-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

14. सिद्ध करें कि
(i) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$
(ii) $\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} . (\vec{a} \times \vec{b})$

15. यदि $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ और $|\vec{a} \times \vec{b}| = 25$ तो $\vec{a} . \vec{b}$ का मान प्राप्त करें।

16. सिद्ध करें बिंदु $-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $7\hat{i} - \hat{k}$ एक-रैखिक हैं।

17. यदि $\vec{A} = 3i - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो
(i) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ ज्ञात करें।
(ii) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ज्ञात करें तथा दिखायें $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \neq \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$.
(iii) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ तो $\vec{a} . (\vec{a} \times \vec{b})$ का मान बतायें।

18. निम्नलिखित को जाँचें :
(a) (i) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (ii) $(\vec{c} + \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c}$

जबकि $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$; $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

(b) यदि $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{C} = \hat{i} - \hat{k}$ तो दिखायें $\vec{A} + (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ तथा नियम का नाम दें।

(c) यदि $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{a}$ तो सिद्ध करें $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2019]

19. यदि $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ तो सिद्ध करें $\vec{a} = 0$ या $\vec{b} = 0$ या $\vec{a}$ तथा $\vec{b} - \vec{c}$ समानांतर सदिश हैं।

20. यदि $\hat{a} + 2\hat{b}$ तथा $5\hat{a} - 4\hat{b}$ परस्पर लंब हों, जहाँ $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ इकाई सदिश हैं, तो $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ के बीच का कोण बताइये।

✍ बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान है—
(a) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (b) $3\hat{i} + 5\hat{k}$ (c) $6\hat{i} + 7\hat{j} + \hat{k}$ (d) कोई नहीं।

2. $\hat{i} \times (\hat{j} + \hat{k}) + \hat{j} \times (\hat{k} + \hat{i}) \times \hat{k} \times (\hat{i} + \hat{j}) =$
(a) 0 (b) 1 (c) $\hat{k}$ (d) कोई नहीं

3. $\hat{i} \cdot (\hat{j} + \hat{k}) =$
(a) 1 (b) –1 (c) 0 (d) कोई नहीं

4. यदि $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}| =$
(a) $\sqrt{26}$ (b) $\sqrt{93}$ (c) $\sqrt{85}$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (a) (i) $10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$ (ii) $-10\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k}$ (iii) $-20\hat{i} - 6\hat{j} - 22\hat{k}$
(b) (i) $4\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$ (ii) $2\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$ (iii) $-7\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$

2. (i) $\sqrt{26}$ (ii) $\sqrt{115}$ (iii) $5\sqrt{86}$

3. (i) $\frac{7\hat{i} - 6\hat{j} - 10\hat{k}}{\sqrt{185}}$ (ii) $\frac{2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{14}}$ **4.** –74 **5.** (ii) $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{115}{3}}$

6. $42\hat{i} + 14\hat{j} - 21\hat{k}$, $21\hat{i} - 42\hat{j} + 14\hat{k}$, 0 **7.** $\frac{\pi}{6}$ **8.** $\lambda = 3, \mu = \frac{27}{2}$

9. $42\hat{i} + 14\hat{j} - 21\hat{k}$ **10.** (i) $\sqrt{26}$ (ii) $11\sqrt{5}$ **11.** (i) $5\sqrt{3}$ वर्ग इकाई (ii) $\frac{49}{2}$ वर्ग इकाई

12. $\sqrt{74}$ वर्ग इकाई **13.** $\frac{1}{2}\sqrt{155}$ वर्ग इकाई **15.** 60

18. (i) $24\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k}$ (ii) $15\hat{i} + 15\hat{j} - 15\hat{k}$ **21.** $\frac{\pi}{3}$

✍ बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple Choice Questions)

1. (d) **2.** (a) **3.** (a) **4.** (b)

□□□

अध्याय

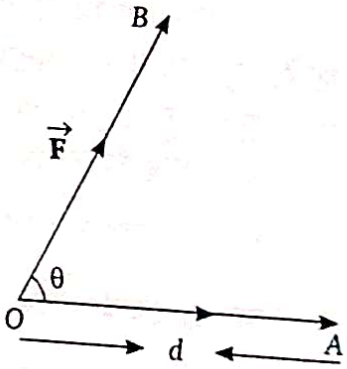
22 सदिशों के गुणन के अनुप्रयोग (Applications of Product of Vectors)

सदिशों के गुणन के प्रयोग से कार्य, बल आघूर्ण एवं कोणीय वेग की गणना की जाती है।

22.1 कार्य (Work)

यदि कोई बल किसी कण पर लगकर उसे अपनी दिशा में विस्थापित कर देता है, तो कहा जाता है कि बल के द्वारा कार्य हुआ।

कार्य एक अदिश राशि है तथा इसका मान **बल के परिमाण तथा बल की दिशा में कण के विस्थापन के वियोजित भाग के गुणनफल से प्राप्त होता है।**



अर्थात् कृत कार्य $= |\vec{F}||\vec{d}| \cos\theta$,

जहाँ $\vec{d}$ = विस्थापन तथा θ बल और विस्थापन के बीच का कोण है।

अत: कृत कार्य $W = \vec{F}.\vec{d}$

टिप्पणी : विस्थापन तथा बल की दिशा परस्पर लंब नहीं होनी चाहिए, अन्यथा कृत कार्य शून्य होगा, क्योंकि यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$, तो $\cos\theta = 0$

$$\therefore \quad \vec{F}.\vec{d} = |\vec{F}|.|\vec{d}| \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

22.1.1 कई बलों द्वारा किया गया कार्य (Work done by more than one force)

माना बिन्दु O पर कई बल $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ क्रियाशील हैं, जिससे कण O से A पर विस्थापित हो जाता है।

अर्थात् $\vec{OA} = \vec{d}$

तथा परिणामी बल $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots + \vec{F_n}$

$\therefore$ बल द्वारा कृत्त कार्य $W = (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots + \vec{F_n}).\vec{d} = \vec{F}.\vec{d}$

= परिणामी बल द्वारा किया गया कार्य

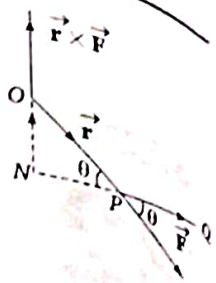
अत: यदि किसी कण पर कई बल क्रियाशील हों तो बलों द्वारा किया गया कार्य उनके परिणामी तथा परिणामी की दिशा में कण के विस्थापन के अदिश गुणनफल के बराबर होता है।

22.1.1 बल आघूर्ण

बल आघूर्ण किसी बल को घुमाने की शक्ति का मापन है। यह वह बल है, जो किसी पिंड को किसी अक्ष या बिंदु के परित: घूर्णन कराता है। किसी बिंदु के सापेक्ष बल आघूर्ण क्रियाशील बल और बल की दिशा से बिंदु की लंबवत् दूरी के गुणनफल के बराबर होता है।

माना एक बल $\vec{F}$ किसी बिंदु P पर कार्यशील है।

यदि $\vec{PQ} = \vec{F}$ तथा ON बल की दिशा से P की लंबवत् दूरी है।



O के परितः बल $\vec{F}$ का बल आघूर्ण

= बल × बल की दिशा से बिंदु की लंबवत् दूरी

= $(P) \times (ON)\ (\hat{n})$, जहाँ $\hat{n}$ बल की दिशा में इकाई सदिश है

= $(PQ)\ (OP) \sin 0\ (\hat{n})$ $\quad [\because$ चित्र से $\sin\theta = \frac{ON}{OP}]$

= $(OP)\ (PQ) \sin 0\ (\hat{n})$

= $\vec{OP} \times \vec{PQ}$ $\quad [\because\ \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin 0\ \hat{n}\,|$

i.e., बल आघूर्ण $\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{PQ} = \vec{r} \times \vec{F}$

▸22.2 कोणीय वेग

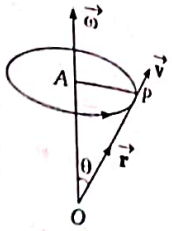
कोणीय वेग किसी वस्तु के घूर्णन दर को बताता है। यह समय के साथ किसी वस्तु द्वारा किसी बिंदु या अक्ष के सापेक्ष घूमे कोण का सदिश मापन है।

इसे ω या Ω से व्यक्त करते हैं तथा इसकी इकाई रेडियन/सेकण्ड है।

माना कोई पिण्ड अक्ष OA के परितः कोणीय वेग ω से घूम रहा है

तथा P पिण्ड पर कोई बिंदु है जो रेखीय गति v से गतिशील है। यदि $\vec{OP} = \vec{r}$, $\angle AOP = 0$, $AO \perp OA$

तथा $\hat{n}$ इकाई सदिश हो, जो $\vec{\omega}$ तथा $\vec{r}$ पर अभिलंब हो, तो



अब $\vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega r \sin 0)\ \hat{n}$

= $(\omega\, AP)\ \hat{n}$ $\quad \left[\because\ \sin 0 = \frac{AP}{r}\right]$

= (P की चाल) $\hat{n}$

= P का वेग जो $\vec{\omega}$ तथा $\vec{r}$ पर अभिलंब है।

= $\vec{v}$ $\quad \therefore\ \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

▸कार्य पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 1. किसी बल $\vec{F} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा किसी कण को बिंदु A (1, 1, 1) से बिन्दु B (2, 1, 3) तक विस्थापित करने में किए जाने वाले कार्य की गणना करें।

हल : दिया गया बल $\vec{F} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ...(1)

माना बिंदु A का स्थिति सदिश $\vec{OA} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

तथा बिंदु B का स्थिति सदिश $\vec{OB} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

∴ विस्थापन $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$= (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$= \hat{i} + 2\hat{k}$ ...(2)

∴ किया गया कार्य = $\vec{F} \cdot \vec{AB}$

$= (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{k})$ [(1) तथा (2) से]

$= 2 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 2 = 2 + 0 + 2 = 4$ इकाई

अर्थात् किया गया कार्य = 4 इकाई।

उदाहरण 2. एक बल $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ किसी कण पर क्रियाशील है। यदि कण बिन्दु A, जिसका स्थिति सदिश $4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ है, से बिन्दु B जिसका स्थिति सदिश $6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ है, पर स्थानांतरित होता है, तो कृत कार्य की गणना करें।

हल : दिया गया बल $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$

यदि O मूल बिन्दु है, तो $\vec{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{OB} = 6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore$ विस्थापन $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) - (4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ बल द्वारा दिया गया कार्य $= \vec{F} \cdot \vec{AB} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$

$= 2 \times 2 + 3 \times 4 + 7 \times (-1) = 4 + 12 - 7 = 9$ इकाई

उत्तर

उदाहरण 3. एक कण पर क्रिया करते हुए दो अचर बल $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ और $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ कण को बिन्दु $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ से बिंदु $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ तक हटा देते हैं। बलों द्वारा किया गया संपूर्ण कार्य ज्ञात करें।

हल : माना $\vec{F_1} = 4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$; $\vec{F_2} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ परिणामी $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) + (3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$= 7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

माना बल F कण को बिंदु A से बिंदु B तक विस्थापित कर देता है, तो

बिन्दु A का स्थिति सदिश $\vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा बिन्दु B का स्थिति सदिश $\vec{OB} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ विस्थापन $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ बलों द्वारा किया गया संपूर्ण कार्य $= \vec{F} \cdot \vec{AB}$

$= (7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$= 7 \times 4 + 2 \times 2 + (-4) \times (-2)$

$= 28 + 4 + 8 = 40$ इकाई

उत्तर

आघूर्ण पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 4. एक बल $5\hat{i} + \hat{k}$ बिन्दु $9\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ पर कार्य कर रहा है। इस बल का सदिश आघूर्ण बिंदु $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ के परित: ज्ञात करें।

हल : माना O सदिशों का मूल बिंदु है तथा बल $\vec{F} = 5\hat{i} + \hat{k}$ बिंदु $9\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ पर कार्यरत है। माना यदि बिंदु Q है, तो $\vec{OQ} = 9\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

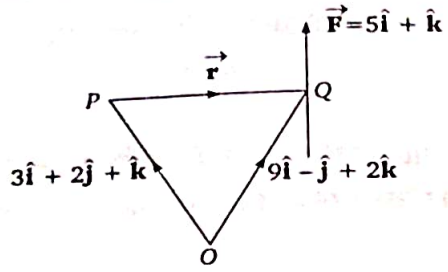
यदि बिन्दु P वह बिंदु है, जिसके परित: आघूर्ण ज्ञात करना है, तो

$\vec{OP} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

तथा $\vec{r} = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

$= (9\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= 6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$



$\therefore$ अभीष्ट सदिश आघूर्ण $= \vec{r} \times \vec{F}$

$= (6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) \times (5\hat{i} + \hat{k})$

$= 6\hat{i} \times 5\hat{i} + 6\hat{i} \times \hat{k} - 3\hat{j} \times 5\hat{i} - 3\hat{j} \times \hat{k} + \hat{k} \times 5\hat{i} + \hat{k} \times \hat{k}$

$= 0 - 6\hat{i} + 15\hat{k} - 3\hat{i} + 5\hat{j} + 0$

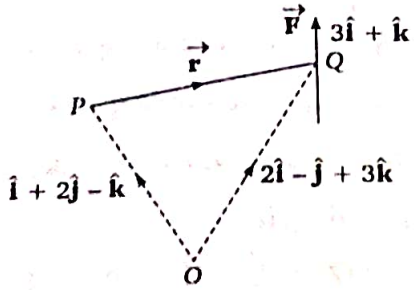
$= -3\hat{i} - \hat{j} + 15\hat{k}$

उदाहरण 5. कबल $3\hat{j} + \hat{k}$ बिंदु $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ पर कार्यशील है। इस बल का बिदुं $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के परित: सदिश आघूर्ण ज्ञात करें।

हल : माना बल $\vec{F} = 3\hat{j} + \hat{k}$

Q इस बल की क्रिया रेखा पर कोई बिंदु हो तथा O मूल बिंदु हो, तो

$$\vec{OQ} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$



तथा P वह बिंदु हो, जिसके परित: आघूर्ण ज्ञात करना है, तो

$$\vec{OP} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

अब $\vec{r} = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

$= \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

अभीष्ट सदिश आघूर्ण $M = \vec{r} \times \vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times (3\hat{i} + \hat{k})$

$= 0 - \hat{j} + 9\hat{k} - 3\hat{i} + 12\hat{j} + 0$ $\left[\because \begin{array}{l} \hat{i} \times \hat{i} = 0,\ \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j},\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \end{array}\right]$

$= -3\hat{i} + 11\hat{j} + 9\hat{k}$

• कोणीय वेग पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 6. एक पिण्ड 2 रेडियन/से० के कोणीय वेग से बिंदुओं (1, 2, 3) तथा (2, 3, 5) को मिलाने वाली रेखा के परित: घूम रहा है। पिण्ड के किसी कण का जो बिंदु (3, 5, 6) पर है, का वेग ज्ञात करें।

हल : माना O_1 मूल बिंदु है तथा बिंदु O, A तथा P के नियामक (1, 2, 3), (2, 3, 5) तथा (3, 5, 6) हैं, तो

$$\vec{O_1O} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{O_1A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{O_1P} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$$

तथा

$$\vec{OA} = \vec{O_1A} - \vec{O_1O} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

∴

$$\vec{OP} = \vec{r} = \vec{O_1P} - \vec{O_1O} = (3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

∴ घूर्णन अक्ष OA के परित: इकाई सदिश $= \dfrac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{|\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}|} = \dfrac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

∴ सदिश कोणीय वेग $\vec{\omega} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ [∵ $\omega = 2$ रेडियन/सेकण्ड]

∴ अभीष्ट वेग $= \vec{\omega} \times \vec{r} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k})$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}[3\hat{k} - 3\hat{j} - 2\hat{k} + 3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{i}] \qquad \left[\because \begin{array}{l} \hat{i} \times \hat{i} = 0,\ \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \text{ etc.} \\ \hat{j} \times \hat{i} = 0 \\ \hat{k} \times \hat{k} = 0 \end{array}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}[-3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}]$$

उदाहरण 7. एक पिण्ड 6 रेडियन/से० के कोणीय वेग से एक अक्ष के परित: जो $3\hat{j} - \hat{k}$ के समानांतर है, तथा बिंदु $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ से गुजरता है, घूम रहा है। पिण्ड के उस कण का जो बिंदु $4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ पर है, वेग ज्ञात करें।

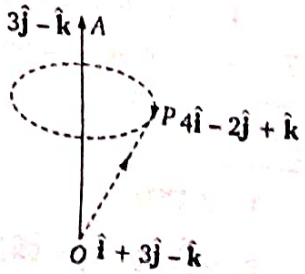
हल : माना बिंदु O तथा P क्रमश: $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ तथा $4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ से दिए जाते हैं, तो

∵ $\vec{r} = \vec{OP} = (4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$$= 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

तथा घूर्णन अक्ष के समानांतर इकाई सदिश

$$= \frac{3\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\hat{j} - \hat{k})$$



∴ कोणीय वेग $\vec{\omega} = 6 \times \dfrac{1}{\sqrt{10}}[3\hat{j} - \hat{k}]$ [∵ $\omega = 6$ रेडियन/सेकण्ड]

∴ अभीष्ट वेग $= \vec{\omega} \times \vec{r} = \dfrac{6}{\sqrt{10}}[3\hat{j} - \hat{k}] \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \frac{6}{\sqrt{10}}(-9\hat{k} + 6\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{i})$$

$$= \frac{6}{\sqrt{10}}(\hat{i} - 3\hat{j} - 9\hat{k})$$

महत्वपूर्ण सूत्र

(i) यदि बल $\vec{F}$ किसी कण को बिंदु A से बिंदु B तक विस्थापित कर देता है, तो कृत कार्य

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \text{ जहाँ } \vec{d} = \vec{AB}$$

(ii) यदि एक बिंदु पर कई बल $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots$, क्रियाशील हों तो परिणमी बल $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots$

$$\therefore \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots) \cdot \vec{d}$$

(iii) आघूर्ण $= \vec{r} \times \vec{F}$, जहाँ $\vec{F}$ = क्रियाशील बल, $\vec{r}$ = बिंदु का स्थिति सदिश

(iv) कोण $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

प्रश्नावली 22.1

1. किसी गतिमान कण को बिंदु P जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ है, से बिंदु Q जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ है, तक बल $\vec{F} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ लगाकर प्रतिस्थापित करने में किया गया कार्य ज्ञात करें।
2. दो अचल बल $\vec{P}$ तथा $\vec{Q}$ जो क्रमशः $2\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$ और $-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ हैं, एक कण पर कार्य करते हैं। अगर वे कण को A से B पर खिसका दें, जो सदिश क्रमशः $4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ से दिए हैं, तो उनके द्वारा किया गया कार्य की गणना करें।
3. एक कण दो अपरिवर्ती बलों $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के द्वारा बिंदु $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ से बिंदु $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ तक विस्थापित हो जाता है तो बलों द्वारा किया गया कुल कार्य ज्ञात करें।
4. बिंदु $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ पर क्रियाशील बल $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ का बिंदु $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के परितः आघूर्ण ज्ञात करें। इसका परिमाण भी ज्ञात करें।
5. एक पिण्ड कोणीय वेग 4 रेडियन प्रति सेकण्ड की दर से एक अक्ष के परितः जो $3\hat{i} - \hat{k}$ के समानांतर है और जो बिंदु $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ से गुजरता है, घूम रहा है। पिण्ड के किसी कण का बिंदु $4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ पर वेग ज्ञात करें।
6. एक पिण्ड कोणीय वेग 4 रेडियन प्रति सेकण्ड की दर से एक अक्ष के परितः जो $3\hat{j} + \hat{k}$ के समानांतर है तथा बिंदु $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ से गुजरता है, घूम रहा है। पिण्ड के किसी कण की चाल बिंदु $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ पर ज्ञात करें।
7. बल $3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ बिंदु $(1, 0, -2)$ पर क्रियाशील है, तो बिंदु $(1, -1, 1)$ के परितः बल का सदिश आघूर्ण ज्ञात करें।

उत्तरमाला

1. 7 इकाई
2. 15 मात्रक
3. 40 मात्रक
4. $-4\hat{k} + 2\hat{i}$, $2\sqrt{5}$
5. $\frac{4}{\sqrt{10}}(\hat{i} - 3\hat{j} - 9\hat{k})$
6. वेग $= \frac{4}{\sqrt{10}}(11\hat{i} + 3\hat{j} - 9\hat{k})$; चाल $= 4\frac{\sqrt{211}}{10}$
7. $7\hat{i} - 9\hat{j} - 3\hat{k}$

□□□

Determinant & Matrices

Integral Calculus

Numerical Methods

Vector Algebra

Differential Equation

Two Dimensional Co-ordinate Geometry

सार्थक

गणित–II

MATHEMATICS-II

अजय कुमार

JP NP

Jai Prakash Nath Publi

41/5 Behind Hero Showroom, Jagriti Vihar, Mee

web : www.jpnpbooks.com E-mail : jpnpmrt@

Tel.: (0121) 4056123, 4009382

find us on facebook www.facebook.com/jpnp